



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порта QR-кода непустима!

$\sqrt{3}$

$$x = \sqrt{3} - 1: \quad a_3 = 3x + 3 = 3 \cdot (\sqrt{3} - 1) + 3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 + 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) = 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = 2^2 = 4$$

$$a_9 = 3x^2 = 3 \cdot (\sqrt{3} - 1)^2 = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$a_9 - a_5 = 8 - 6\sqrt{3} \text{ и } a_5 - a_3 = 4 - 3\sqrt{3} \Rightarrow a_9 - a_5 = 4d,$$

$$a_5 - a_3 = 2d \text{ или } d = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (так } 4d = 8 - 3\sqrt{3} \cdot 4 = 8 - 6\sqrt{3} = a_9 - a_5)$$

$$2d = (2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}) \cdot 2 = 4 - 3\sqrt{3} = a_5 - a_3 \Rightarrow x = \sqrt{3} - 1 \text{ подходит}$$

под условие (по Зам. 1))

$$x = -(\sqrt{3} + 1): \quad a_3 = (-\sqrt{3} - 1) \cdot 3 + 3 = -3\sqrt{3} \text{ - так } a_3 = 3x + 3, x = -\sqrt{3} - 1$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = ((-\sqrt{3} - 1)^2 + 2 \cdot (-\sqrt{3} - 1))^2 = (4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2)^2 = 2^2 = 4$$

$$a_9 = 3x^2 = 3(-\sqrt{3} - 1)^2 = 3 \cdot (4 + 2\sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$a_9 - a_5 = 12 + 6\sqrt{3} - 4 = 8 + 6\sqrt{3} \Rightarrow a_9 - a_5 = 4d, a_5 - a_3 = 2d \text{ или}$$

$$a_5 - a_3 = 4 - (-3\sqrt{3}) = 4 + 3\sqrt{3}$$

$$d = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (так } 4d = 4 \cdot (2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}) = 8 + 6\sqrt{3}; 2d = 2 \cdot (2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}) = 4 + 3\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{3} - 1 \text{ подходит под условие (по Зам. 1))}$$

Итак, мы получили, что под условие могут подходить лишь $x = -1$, $x = -\sqrt{3} - 1$ и $x = \sqrt{3} - 1$, и все эти числа подходят

Ответ: $-\sqrt{3} - 1, -1, \sqrt{3} - 1$.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть $\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия из условия с шагом d . Тогда числа a_3, a_5 и a_9 являются в $\{a_n\}$
 $\Leftrightarrow a_5 - a_3 = 2d, a_9 - a_5 = 4d$ при некотором значении d . (Знаб.!)

по укл.:

$$\begin{cases} a_3 = 3x+3 \\ a_5 = (x^2+2x)^2 \\ a_9 = 3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_5 - a_3 &= 2d \\ a_9 - a_5 &= 4d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_5 - a_3 = (x^2+2x)^2 - (3x+3) \\ a_9 - a_5 = 3x^2 - (x^2+2x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 - a_3 = 2d \\ a_9 - a_5 = 4d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - (x^2+2x)^2 = 2 \cdot ((x^2+2x)^2 - (3x+3))$$

$$3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 2 \cdot (x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3)$$

$$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = (x+1)^2 (x^2 + 2x - 2)$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 \cdot (x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\text{м.к. } x^2 + 2x - 2 = (x - (\sqrt{3}-1))(x - (-\sqrt{3}-1))$$

$$(x+1)^2 (x - (\sqrt{3}-1))(x - (-\sqrt{3}-1)) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = \sqrt{3}-1 \\ x = -\sqrt{3}-1 \end{cases}$$

$$x = -1: a_3 = 3x+3 = 0$$

$$a_5 = (x^2+2x)^2 = (-1-2)^2 = 1$$

$$a_9 = 3 \cdot x^2 = 3 \cdot (-1)^2 = 3$$

$$a_9 - a_5 = 2, a_5 - a_3 = 1 \Rightarrow a_9 - a_5 = 4d \text{ и } a_5 - a_3 = 2d \text{ при } d = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = -1$ удовлетворяет условию (по Знаб.!).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 Запись $C \geq A \geq B$ означает, что $\begin{cases} C \geq A \\ A \geq B \end{cases}$.

Запись $C \leq A \leq B$ означает, что $\begin{cases} C \leq A \\ A \leq B \end{cases}$.

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq x-3y \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \geq 3y-x \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \text{(сложим пер-ва)} \Rightarrow \begin{cases} 4 \geq 2x-4y \geq -4 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \text{ (сложим пер-ва)} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \geq 4x-3 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ y \leq 1\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 8x+4y \leq 8 \cdot \frac{3}{4} +$$

$$+ 4 \cdot 1\frac{1}{4} = 6 + 5 = 11. \Rightarrow 8x+4y \leq 11$$

Заметим, что $8x+4y=11$ при $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1\frac{1}{4} \end{cases}$, и это

$\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1\frac{1}{4} \end{cases}$ подходит под условие:

$$|x-3y| = \left| \frac{3}{4} - 3 \cdot 1\frac{1}{4} \right| = \left| \frac{3}{4} - \frac{15}{4} \right| = \left| -\frac{12}{4} \right| = 3$$

$$|3x-y| = \left| 3 \cdot \frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} \right| = \left| \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \right| = \left| \frac{4}{4} \right| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } x = \frac{3}{4} \text{ и } y = 1\frac{1}{4}, \begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}, \text{ т.е.}$$

такое x и y удовлетворяют условию задачи.

Итак, мы показали, что $8x+4y \leq 11$ и привели пример $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1\frac{1}{4} \end{cases}$, при котором x и y подходят под условие и $8x+4y=11 \Rightarrow$ наибольшее возможное значение $8x+4y$ равно 11.

Ответ: 11.



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n \leq 39 \\ m+n-9 \leq 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m+n \leq 39 \\ m+n-9 \leq 3 \end{cases} \text{, но } (m+n-9) = 30 \neq 3. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ система $\begin{cases} m+n \leq 39 \\ m+n-9 \leq 3 \end{cases}$ не имеет решений $\Rightarrow$ совокупность (1) не имеет решений $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ при $p \neq 3$ нет решений

Если $p \neq 3$: тогда $(m+n)/3$, т.к. $(m+n)(m+n-9) = 13p^2$, $13p^2/3$.

Значит, $(m+n; m+n-9) = 1$ (т.е. $\text{НОД}(m+n; m+n-9) = 1$)

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n = 1 \\ m+n-9 = 13p^2 \end{cases}$$

$$\text{Если } \begin{cases} m+n = 1 \\ m+n-9 = 13p^2 \end{cases}, \text{ то } \begin{cases} m+n = 1 \\ m+n-9 = -8 \end{cases}$$

Очевидно, такая система не имеет решений

$$\text{Если } \begin{cases} m+n = 13 \\ m+n-9 = p^2 \end{cases}, \text{ то } m+n = 13, m+n-9 = 4$$

$m+n-9 = p^2$, что, очевидно, верно лишь

при $p=2$. (p -простое, т.к. 2-простое)

Если $\begin{cases} m+n = 13p^2 \\ m+n-9 = 1 \end{cases}$, то $m+n = 10$ и $m+n = 13p^2$, что, очевидно,

невозможно. Если же $\begin{cases} m+n = p^2 \\ m+n-9 = 13 \end{cases}$, то $m+n = 22$ и $m+n = p^2$, что, очевидно, невозможно.

В случае $A = 13p^2$ и $B = 75q^2$ решения есть лишь при $m+n = 13$ и $p = 2$.

$$B = mn(m+n-3)$$

$$\Rightarrow mn \cdot (13-3) = 75q^2 \Rightarrow 10mn = 75q^2 \Rightarrow 2mn = 15q^2. \text{ Заметим,}$$

что $(2mn) : 2$, а $15q^2 : 2$ лишь при $q=2 \Rightarrow$ т.к. $2mn = 15q^2$, то $q=2$ и $2mn = 15 \cdot 4 \Rightarrow mn = 30$

Уточним, мы знаем, что $\begin{cases} m+n = 13 \\ mn = 30 \end{cases}$.

$$\begin{cases} m+n = 13 \\ mn = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 13-n \\ (13-n)n = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 13-n \\ n^2 - 13n + 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 13-n \\ n = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 3 \end{cases}$ Очевидно, пары $(10, 3)$ и $(3, 10)$ подходят,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 Под записью (a, b) имеем ввиду, что $\text{НОД}(a, b) = c$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Если $A = 13p^2$ и $B = 75q^2$:

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \\ mn(m+n-3) = 75q^2 \end{cases}$$

Рассмотрим $(m+n)(m+n-9) = 13p^2$.

Если $p=3$: $(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 9 = 117$.

Тогда ~~$(m+n) \div 3$~~ Тогда, если $(m+n) \div 9$ или

$(m+n-9) \div 9$, то и $(m+n) \div 9$, и $(m+n-9) \div 9$, т.е. $(m+n) \cdot$

$(m+n-9) \div 81$, но $(m+n)(m+n-9) = 117$, $117 \nmid 81$. Кроме-

того $\Rightarrow (m+n) \nmid 9$ и $(m+n-9) \nmid 9$.

Также $\left[\begin{matrix} (m+n) \div 3 \\ (m+n-9) \div 3 \end{matrix} \right]$, т.к. $(m+n)(m+n-9) = 117$, $117 \div 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (m+n) \div 3$ и $(m+n-9) \div 3$, при этом $(m+n) \nmid 9$ и $(m+n-9) \nmid 9$

$\Rightarrow (m+n) \div 3$, но $(m+n) \nmid 9$.

т.к. m и n - натуральные $\Rightarrow (m+n) \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$(m+n)(m+n-9) = 117$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} m+n=3 \\ m+n-9=39 \end{matrix} \right\}$ - т.к. $(m+n) \div 3$ и $(m+n) \nmid 9$, и

Следовательно $m+n=3$ не имеет решений ~~т.к. m и n - натуральные~~

(т.к. если $m+n=3$, то $m+n-9 = -6 \neq 39$)

Везде в
решении
имеем
ввиду, что
 p и q -
простые и
их натураль-
ность имеет
то, что они
простые и не
делят 13 и 75 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м.к. тогда $A = (m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 4 = 13p^2$, где $p=2$ и

$$B = mn \cdot (m+n-3) = 10 \cdot 3 \cdot (10+3-3) = 30 \cdot 10 = 300 = 45 \cdot 4 = 45q^2,$$

где $q=2$ ($p=2$ и $q=2$ - простые, м.к. 2-простое число)

При $A = 13p^2$ и $B = 45q^2$, подберем пары $(3;10)$ и $(10;3)$

~~(10;3)~~

$$\text{Если } \begin{cases} A = 45q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 45q^2 \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases}$$

Заметим, что $45:3 \Rightarrow$ м.к. $(m+n)(m+n-9) = 45q^2$, но

м.к. q -простое (м.к. и натуральное), то $(m+n):3$ или

$$(m+n-9):3 \Rightarrow \text{и } (m+n):3, \text{ и } (m+n-9):3 \text{ (м.к. } 9:3) \Rightarrow 45q^2:9$$

м.к. $(m+n)(m+n-9) = 45q^2$. Очевидно, $(45q^2):9$ или при $q=3$

$$\Rightarrow \text{при } A = 45p^2, B = 13p^2, q=3 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 45 \cdot 9 = 630 + 45 = 675.$$

*: м.к. q -простое

Если $(m+n):9$, то и $(m+n-9):9$ (м.к. $9:9$) и если

$$(m+n-9):9, \text{ то и } (m+n):9 \Rightarrow \text{если } (m+n):9, \text{ то } (m+n)(m+n-9):81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 45q^2:9, 45q^2 = 675, \text{ но } 675 \nmid 81 \Rightarrow (m+n) \nmid 9, \text{ но при этом}$$

$(m+n):3$ (из предыдущей абзаца). Но тогда $(m+n):3, (m+n) \nmid 9,$

$$(m+n-9):3, (m+n-9):9 \text{ (м.к. или } (m+n):3, \text{ то и } (m+n-9):3; \text{ и м.к.}$$

$$\text{если } (m+n) \nmid 9, \text{ то } (m+n-9) \nmid 9 \text{ - м.к. } 9:3 \Rightarrow (m+n)(m+n-9):9 \nmid$$

$$(m+n)(m+n-9) \nmid 27. \text{ Но } (m+n)(m+n-9) = 675, \text{ а } 675:27$$

$$\text{(м.к. } 675 = 45 \cdot 9 = 27 \cdot 25), \text{ противоречие} \Rightarrow \text{при } A = 45q^2 \text{ и } B = 13p^2$$

решений нет

Мы разобрали оба случая ($A = 13p^2$ и $B = 45q^2$; или

или $A = 45q^2$ и $B = 13p^2$), и получили, что под условие

подходят только пары $(3;10)$ и $(10;3)$ (м.к. в силу

$A = 13p^2$ и $B = 45q^2$ подходят только $(3;10)$ и $(10;3)$, а при $A = 45q^2$ и

$B = 13p^2$ нет таких пар $(m;n)$, подпадающих под условие) $\Rightarrow$

~~нет других пар~~ Ответ: $(3;10)$ и $(10;3)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По теореме косинусов в $\triangle AZY$: $YZ^2 = AZ^2 + AY^2 - 2 \cdot AZ \cdot AY \cdot \cos \angle YAZ$.

$YZ = 8$, $AZ = 6$, $AY = AZ$ (т.к. $\angle AZY = \angle AZE$, т.е. $\triangle AYZ$ - равнобедренный с основанием YZ)

$$\Rightarrow 8^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos \angle YAZ \Rightarrow \cos \angle YAZ = \frac{8^2 - 2 \cdot 6^2}{6 \cdot 6 \cdot 2}$$

$$\cos(\angle YAZ) = \frac{64 - 2 \cdot 36}{6 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{64 - 72}{72} = -\frac{1}{9}$$

$\angle YAZ$ и $\angle CAB$ - смежные $\Rightarrow \cos \angle CAB = -\cos \angle YAZ$ (т.к. $\angle CAB + \angle YAZ = 180^\circ$) $\Rightarrow \cos \angle CAB = \frac{1}{9}$ - (Умб. 4)

По теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle CAB$$

$BA = 30$ - по (Умб. 3)

$AC = 18$ - по условию

$\cos \angle CAB = \frac{1}{9}$ - по (Умб. 4)

$$\Rightarrow BC^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \cos \angle CAB$$

$$BC^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9} = 1104$$

$$BC = 4\sqrt{69}$$

Ответ: $4\sqrt{69}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

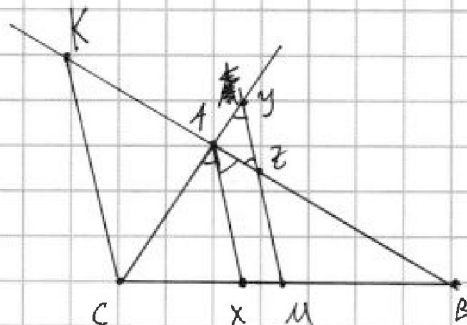
№4

прям. - прямая; $\triangle$ - равнобедренный

Продлим BA за точку A .

Пусть точка $K \in$ прм. AB , $ZB = ZK$, $K \neq B$.

Тогда $KZ \parallel MZ \parallel KC$ - т.к. MZ - средняя линия в $\triangle BKC$ (т.к. M - середина BC , Z - середина BK , т.к. $ZB = ZK$ и $K \neq B$) - (Умб.1)



т.к. $MZ \parallel AX$, то $\angle CAX = \angle CYM$ - по св-ву, и $\angle XAB = \angle AZY$ - по св-ву (т.к. Z лежит между M и Y , т.к. $MZ \parallel AX$ и Z лежит на стороне AB , а Y - на

продолжении стороны AC) ~~и $\angle CMZ < 180^\circ$, т.к. он смежен углу ZMB , который больше 0° , т.к. $Z \neq B$~~ ~~$Z \notin$ прм. BC (т.к. $MZ \parallel AC$, $AC \notin BC$, $M \in$ прм. BC)~~

Итак, $\angle CAX = \angle CYM$ и $\angle XAB = \angle AZY$. т.к. AX - биссектриса $\triangle ABC$ $\angle CAB$ в $\triangle ABC$, то $\angle XAB = \angle CAX \Rightarrow \angle AYZ = \angle AZY$. (т.к. $\angle CYM = \angle AYZ$).

По (Умб.1), $KC \parallel MZ \Rightarrow \angle KCA = \angle AYZ$, $\angle KAC = \angle CKA = \angle AZY \Rightarrow$ т.к. $\angle AZY = \angle AYZ$, то $\angle KCA = \angle CKA \Rightarrow \triangle KCA$ - $\triangle$ с основанием $KC \Rightarrow AC = AK \Rightarrow AC + AZ = AK + AZ$ - (Умб.2)

Z лежит между K и B , т.к. $ZB > AZ$ и $ZB = KZ$, а $ZB > AZ$, т.к. $AZ/ZB = XM/MB$ - по теореме Фалеса для $\angle CBA$ и $MZ \parallel AX$, а $XA \parallel MB$ $XM \neq MB < 1$ (т.к. $XM < MB$, т.к. $X \in$ отрезок CM или $X \in$ отрезок MB) т.к. $X \in$ (т.к. X лежит на стороне BC) $\Rightarrow A$ лежит между K и Z на прямой $AB \Rightarrow KZ = AK + AZ$. По (Умб.2), $AK + KZ = AC + AZ \Rightarrow BZ = AC + AZ \Rightarrow BA = BZ + AZ = AC + 2 \cdot AZ$. $AC = 18$ и $AZ = 6$ - по условию $\Rightarrow BA = 18 + 2 \cdot 6 = 30$. - (Умб.3)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}\sqrt{6-x} = 1,5 \\ \sqrt{(x+1)(6-x)} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(6-x) = 2,25 \\ (x+1)(6-x) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 5x + 6 = 2,25 \\ -x^2 + 5x + 6 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 20x + 24 = 9 \\ -x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 20x + 15 = 0 \\ -x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

(4) из (3): $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 \geq 0$.

Мы знаем, что $x \geq 0$ - из (1) $\Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1$, $\sqrt{6-x} \leq \sqrt{6}$

$$\sqrt{6-x} \leq \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 \geq 1 - \sqrt{6} + 5 = 6 - \sqrt{6} > 0,$$

т.к. $6 - \sqrt{6} = \sqrt{6}(\sqrt{6} - 1)$, $\sqrt{6} > 1$ (т.к. $6 > 1$) $\Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 \geq 0$ или $6 \geq x \geq 0$.

из (3) и (4):

$$\begin{cases} \frac{5+2\sqrt{10}}{2} > \frac{5-2\sqrt{10}}{2} \\ \frac{5+\sqrt{13}}{2} > \frac{5-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{5+2\sqrt{10}}{2} < 6, \text{ т.к. } 2\sqrt{10} < 7, \text{ т.к. } 40 < 49.$$

$$40 < 49.$$

$$\frac{5-2\sqrt{10}}{2} < 0, \text{ т.к. } 5 < 2\sqrt{10}, \text{ т.к. } 25 < 40.$$

$$\frac{5-\sqrt{13}}{2} > 0, \text{ т.к. } 5 > \sqrt{13}$$

$$\frac{5+\sqrt{13}}{2} < 6, \text{ т.к. } \sqrt{13} < 7 \text{ (т.к. } 13 < 49) \text{ (справе } \frac{5-2\sqrt{10}}{2})$$

Следовательно будем, что все эти значения лежат на отрезке $[0, 6] \Rightarrow$ все они подходят $\Rightarrow$ т.к. $y = x$.

Ответ: $(\frac{5-2\sqrt{10}}{2}, \frac{5-2\sqrt{10}}{2}), (\frac{5+2\sqrt{10}}{2}, \frac{5+2\sqrt{10}}{2}), (\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}), (\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} \quad \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 & (2) \end{cases}$$

$$(2): x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2, \quad x \geq 0 \text{ и } y \geq 0 \text{ (м.к. для } \sqrt{x} \text{ и } \sqrt{y})$$

$$(x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2) + 5(x + y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} \leq \sqrt{y} \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2) + 5(x + y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{т.к. } (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2) + 5(x + y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 > 0, \text{ м.к. } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0 \text{ (м.к. } \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0, x + y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 0) \text{ и } 1 > 0.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \sqrt{y} \\ x &= y \end{aligned}$$

$$(1) \text{ и } (2): x = y$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5$$

$$\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} \right)^2 = \left(2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5 \right)^2$$

$$x+1+6-x = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4(x+1)(6-x) - 20\sqrt{(x+1)(6-x)} + 25$$

$$(3): 2\sqrt{(x+1)(6-x)} + 5 = 4(x+1)(6-x) - 20\sqrt{(x+1)(6-x)} + 25$$

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$-2x + 75x^2 - 20x + 25$$

$$4x^2 - 48x + 18 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^2 - 48t + 18 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 9^2 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 81 - 72 = 9$$

$$D = 81 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 121 - 72 = 49$$

$$\begin{cases} t = \frac{\sqrt{81+9}}{4} \\ t = \frac{-\sqrt{81+9}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)(6-x)} = 4,5 \\ \sqrt{(x+1)(6-x)} = 3 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x - 5 = 0$$

$$x^2 - 5x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24 + 20x - 4x^2 = 81 \\ -x^2 + 5x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

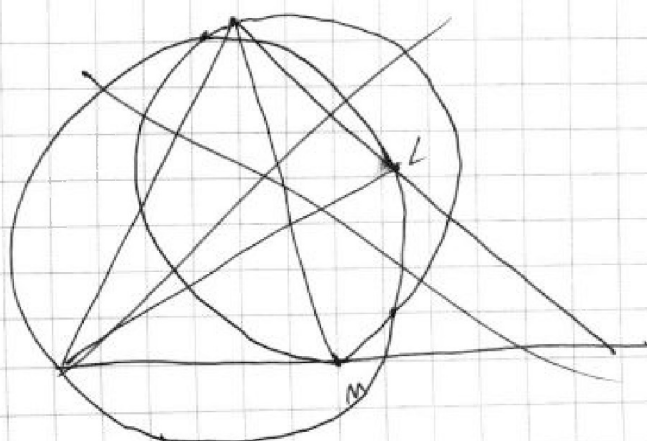
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 20x + 57 = 0 \\ x^2 - 5x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 5 = 0, \text{ м.к.} \end{cases}$$

$4x^2 - 20x + 57 = 0$ не имеет корней (м.к. $D = 20^2 - 57 \cdot 4 = 400 - 228 = 172 < 0$, т.е. $D < 0$ и корней нет)

$$x^2 - 5x - 5 = 0 \quad D = 25 + 5 \cdot 4 = 45$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{45+5}}{2} \\ x = \frac{-\sqrt{45+5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{5}+5}{2} \\ x = \frac{5-3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3. Очевидно, имеет смысл рассматривать только повороты на $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ и 270° . Заметим, что всего у нас 81 точка. Рассмотрим C_{81}^2 способов выбрать две точки, чтобы их сделать белыми, без учёта поворотов (далее мы будем называть это ситуацией А; а с учётом поворотов — ситуацией В).

Рассмотрим пары (пара В) белых точек, которые центрально симметричны. Тогда в ситуации А существует ещё одна пара белых точек, получаемая из пары С (помощью поворота), а в ситуации В эти пары различны (Зуб. 1).

В ситуации А ровно $80/2$ пар центрально симметричных точек (симметрична отн. центру доски), т.к. можно ровно 80 способов выбрать одну из точек, а другую определить однозначно, причём каждая пара считается дважды (80 способов выбрать одну из точек, т.к. одна из 81 точек совп. с центром доски, и если выбрать её белыми, то центрально симм. ему точка — это она сама, т.е. в паре белых точек эти точки совпадают, что не удовлетворяет условию).

(1) Таких пар ровно 40 (пар центрально симм. точек), а в ситуации В, таких пар 20 — то (Зуб. 1) (т.е. каждая пара из ситуации В в ситуации А подсчитана дважды). Каждая пара из ситуации А соответствует ровно одной паре из ситуации В (это очевидно).

Каждая пара не центрально симм. точек из ситуации В очевидно ровно 4 раза подсчитана в ситуации А, а каждая пара из ситуации А соответствует (т.е. «появляется») ровно одной паре из ситуации В. В-Зуб. 2

В ситуации А ровно $C_{81}^2 - 40$ пар (т.к. не центрально симметричными клетками (т.к. всего способов выбрать пару C_{81}^2 , а из них 40 — пары центрально симм. точек). Значит в ситуации В ровно $(C_{81}^2 - 40)/4$ пар не центрально симм. точек, т.е. их $(81 \cdot 80/2 - 40)/4 = 80 \cdot 40/4 = 800$ — это (2).

Из (1) и (2) следует, что в ситуации В ровно $800 + 20 = 820$ различных пар точек $\Rightarrow$ в ситуации В ровно 820 способов выбрать две белые точки.

Ответ: 820

различных пар. центр. симм. — центрально симметричные

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 3x-y \leq 1 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq 3x-y \leq 1 \\ 1 \geq y-x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Черновики}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq y-x \geq -1 \\ 2 \geq 2x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq y-x \geq -1 \\ 1 \geq x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 3y-x \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 4 \geq 2x+2y \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-3y \geq -1 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 4x \geq -3 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 1 \frac{1}{4} \geq y \geq -1 \frac{1}{4} \end{cases}$$

√2 Заметим $C \leq A \leq B$ означает, что $\begin{cases} A \leq B \\ C \leq A \end{cases}$. Заметим $C \geq A \geq B$ значит, что $\begin{cases} C \geq A \\ A \geq B \end{cases}$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 3y-x \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 4 \geq 2x+2y \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 4x \geq -3 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 1 \frac{1}{4} \geq y \geq -1 \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ y \leq 1 \frac{1}{4} \end{cases}, \text{ т.е. } 8x+4y \leq$$

Заметим, что

$$\sqrt{3}. A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n, B = m^2 + mn + n^2 - 3mn.$$

$$\text{Если } A = 13p^2: (m+n)^2 - 9(m+n) = 13p^2$$

$$\begin{cases} B = 75q^2: (m+n)(m+n-9) = 75q^2 \end{cases}$$

Если $p=3$, то $(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 9 = 117$. Ф, т.к. если одна скобка ≥ 9 , то другая тоже $\Rightarrow p \neq 3 \Rightarrow (m+n, m+n-9) \leq 1$.

Если $k=1$: то $m+n-9 \leq 13$, $m+n \geq 22$. то 22 - не нач. кв. Ф.

Если $k=13$: $m+n-9 \leq 1$, $m+n \geq 10$ Ф. не кратен 13.

$$\text{Если } \begin{cases} A = 45q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases}: \begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 45q^2 \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases} \quad 75:3 \Rightarrow mn:3 \text{ и } m+n-9:3 \Rightarrow$$

$$\frac{13+13}{2} = 13$$

$$n^2 - 13n + 30 \leq 0. \quad 169 - 120 = 49.$$

$$75q^2: 9 \text{ или } 25 \text{ или } 45$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} - 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x = -1: a_1; a_2; a_3 \quad \text{area } d = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{3} - 1: 3\sqrt{3} - 3 + 3 = 3\sqrt{3} \quad a_3$$

$$\begin{aligned} ((\sqrt{3}-1)^2 + 2\sqrt{3})^2 &= (3+1-2\sqrt{3}+2\sqrt{3})^2 = 16 \\ 3 \cdot (\sqrt{3}-1)^2 &= 3 \cdot (4-2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3} \\ 4 - 3\sqrt{3} \\ 8 - 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 2 \\ (x - (\sqrt{3}-1))(x - (\sqrt{3}+1)) &= x^2 - ((\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)x) \\ (\sqrt{3}-1)(-\sqrt{3}-1) &= -2 \\ 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \quad 4y + 8x \\ \begin{cases} -3 \leq x - 3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x - y \leq 1 \\ -1 \leq x - y \leq 1 \end{cases} \\ -2 \leq 4x - 2y \leq 2 \\ -4 \leq 4x - 4y \leq 4 \\ 8y - 4x \geq -4 \end{aligned}$$

$$6 \geq 2y \geq -6$$

$$3 \geq y \geq -3$$

$$9 \geq 3y \geq -9$$

$$30x - 3y \geq -3$$

$$12x \geq -12$$

$$96 \geq 8x \geq -96$$

$$12 \geq y \geq -12$$

$$12 \geq x \geq -12$$

$$8 \geq 8x + 4y \geq -108$$

$$8 + 4 \cdot 12 \geq 8 + 48 \geq 56$$

$$x \geq 11$$

$$\begin{aligned} x &\geq 3y + 3 \\ 4 \geq 3y - x &\geq -3 \\ 4 \geq 2x + 2y &\geq -4 \\ 8 \geq 4x + 4y &\geq -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y + 2x \\ 8 + 4y \\ 8 + 4 \cdot 12 \end{aligned}$$

$$4 \geq x \geq -4 \Rightarrow 8x + 4y \leq 4 \cdot 8 + 4 \cdot 3 = 32 + 12 = 44$$

$$\leq -8x + 4y \leq$$

$$108 \geq 8x + 4y \geq -108$$

$$\begin{aligned} 8 \geq 8x + 4y &\geq -108 \\ 8 + 4 \cdot 12 &\geq 8 + 48 \geq 56 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

