



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть d — разность прогрессии, тогда

$$\begin{cases} 3x + 3 + 2d = (x^2 + 2x)^2 \cdot 2 \\ (x^2 + 2x)^2 + 4d = 3x^2 \end{cases}$$

$$6x + 6 - (x^2 + 2x)^2 = 2(x^2 + 2x)^2 - 3x^2$$

$$2x + 2 = (x^2 + 2x)^2 - x^2$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$x = -1$ — корень

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \mid x+1$$

$$2(1 - 2x^2) \cdot (x+1) = (x+1)(x-1)x^2$$

$$(x+1)(x-1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \pm \sqrt{3} - 1$$

Ответ: $-1, \pm\sqrt{3} - 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

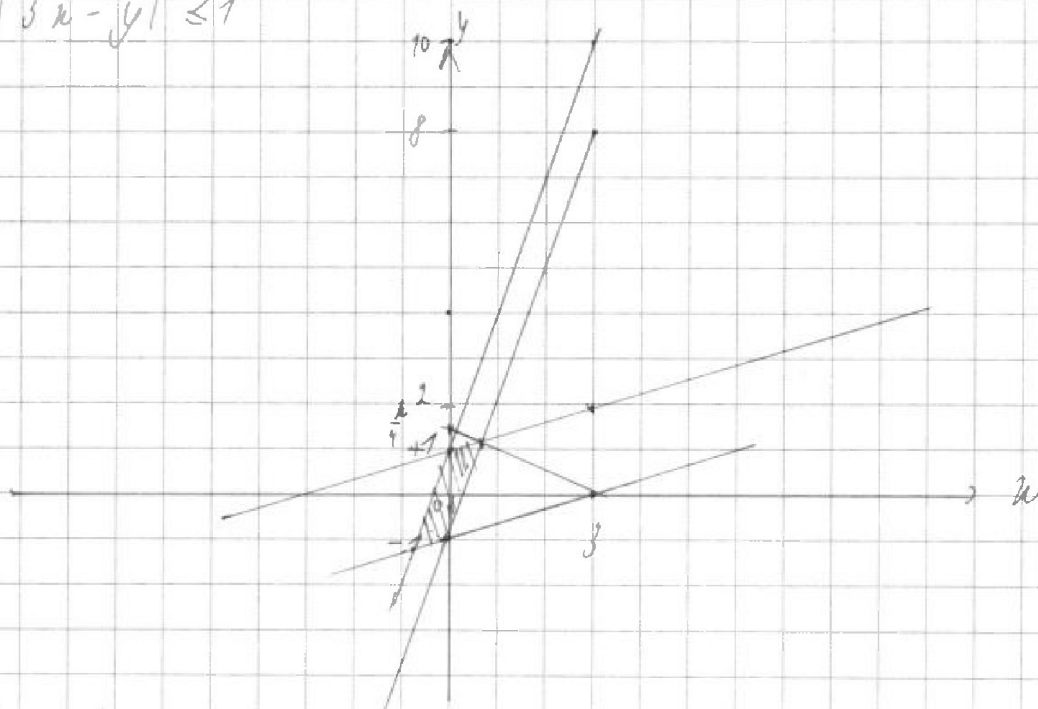
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дана $4y - 8x = k \Rightarrow y = -2x + \frac{k}{4}$

Найдем множество точек на координатной плоскости

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$$



Преобразуем уравнение $y = -2x$ параллельно находим
ту прямую при которой она еще пересекает множество
и пересекает ось OY в наибольшей точке $(0; \frac{k}{4})$

Прямая $y = -2x + \frac{k}{4}$ проходит через т. пересечения

$y = 3x - 1$ и $y = x + 3 \Rightarrow y = \frac{x}{3} + 1 \Rightarrow$ точка

пересечения $(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$;

$$\frac{5}{4} = -2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{k}{4} \Rightarrow$$

$$k = 8 \quad k = 11$$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9mn - 9n^2 = (m+n-9)(m+n) = 13p^2$$

13 - простое число

$$m+n-9 < m+n \quad \text{при} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

2) несколько случаев

неподходящий: $(m+n=10); A=10 \rightarrow$

неподходящий: $m+n=22 \neq p^2 \rightarrow$

неподходящий: $m+n=13(m+n-9)$

$$9 = \frac{m(m+n)}{2} \geq 2$$

$m+n-9$	$m+n$
1	$13p^2$
13	p^2
p	$13p$
p^2	13

подходящий $m+n=13$

$$p^2=4; p=2$$

$$A=52$$

$$B = m^2n + mn^2 - 9mn = (m+n-9)mn = 10mn = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9^2$$

2) $9=2$ число простое $75 \cdot 9^2 \cdot 70$, но

одно слагаемое на 10 м.к. равно 10 м.к.

$$mn = 5 \cdot 2 \cdot 3; mn = 13 \Rightarrow m=10, n=3 \quad \text{или} \quad m=3, n=10$$

Ответ: $(10; 3), (3; 10)$



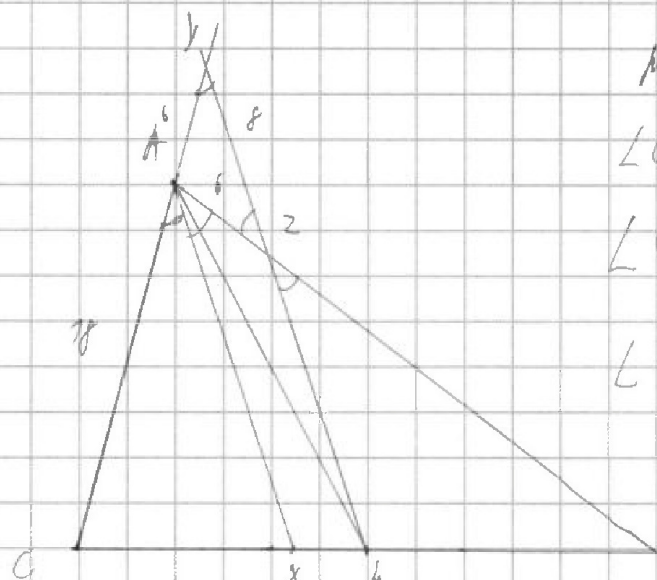
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



т. к. AX — биссектриса

$$\angle CAX = \angle BAX = 2^\circ$$

$\angle CAZ = \angle BAZ$ как
соответственные

$$\angle BAX = \angle AZY$$

как углы треугольника

то $AX \parallel YZ$

$\triangle AYZ$ — равнобедренный

$$AY = AZ = 6$$

По т. косинусов:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos 2^\circ$$

$$\cos 2^\circ = \frac{2}{3}; \quad \cos \angle CAB = \cos 2^\circ = \cos^2 2^\circ - \sin^2 2^\circ = \cos^2 2^\circ - 1 =$$

$$= -\frac{1}{9}$$

По т. Менелая ($\triangle ABC$; YH — прямая)

$$\frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CH}{HB} = 1 \Rightarrow BZ = 6 \cdot \frac{(1+6)}{6} = 24 \Rightarrow AB = 30$$

По т. косинусов ($\triangle ABC$)

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos 2^\circ$$

$$= \sqrt{18^2 + 30^2 - 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{324 + 900 - 720} = \sqrt{504}$$

$$= \sqrt{324 + 900 - 720} = \sqrt{504}$$

Ответ: $\sqrt{504}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y} \\ x^4 + 5x^2 - 15 = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

из второго уравнения $x, y \geq 0$, а также $x \neq y$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y}$$

Пусть $\sqrt{x+1} = a$; $\sqrt{6-y} = b$, тогда $b^2 + a^2 = 37$; $ab = \sqrt{6+5x-y-x^2}$

$$\cancel{a+b} + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} = xab$$

$$a-b + 5 = 2ab$$

$$\cancel{a+b} + (a-b)^2 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ a-b=1 \end{cases}; \quad a-b$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} = 1$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} = -2$$

$$x+1 = 1 - 2\sqrt{6-y} + 6-y$$

$$x+1 = 4 - 2\sqrt{6-y} + 6-y$$

$$2x - 5 = -2\sqrt{6-y}$$

$$2x-9 = -4\sqrt{6-y}$$

$$6-y = \sqrt{6-y}$$

$$4x^2 - 36x + 81 = 16 \cdot 6 - 9y$$

$$9 - 5x + x^2 = 6 - x$$

$$4x^2 - 32x + 36$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 13$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

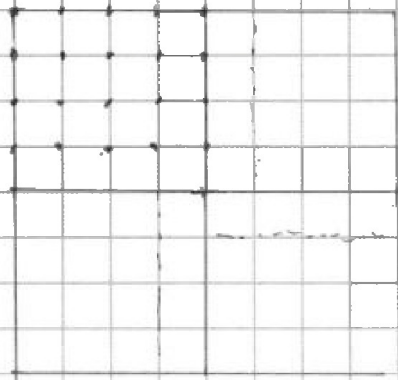


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Если одна из точек находится в центре, то вторая может быть на любой месте в одной из секторов (на рисунке)

представлен один из секторов; при повороте на 90° , 180° , 270° секторы накладываются, т.к. квадрат симметричен повороту на 90° , поэтому считая кол-во точек в одной из секторов

$$4 \cdot 5 = 20$$

2) для каждой еще точки находится в другом секторе $20 \cdot 19 = 380$

3) точки в каждом из секторов

$$20 \cdot 20 = 400$$

↑
каждо
по 20

4) в диагональных секторах

$$\frac{20 \cdot 20}{2} = 200$$

$$200 + 400 + 400 = 1000$$

Ответ: 1000



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 2x^2(2x + 2)$$

$$(1 - 2x^2) \cdot 2 \cdot (x + 1) = \frac{x^4}{x+1(x-1)} \cdot x^2$$

$$1 - 4x^2 = \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 5x^2 + 4x}$$

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$x^3 -$$

$$(x+1)(x^2+2x+2)$$

~~x~~

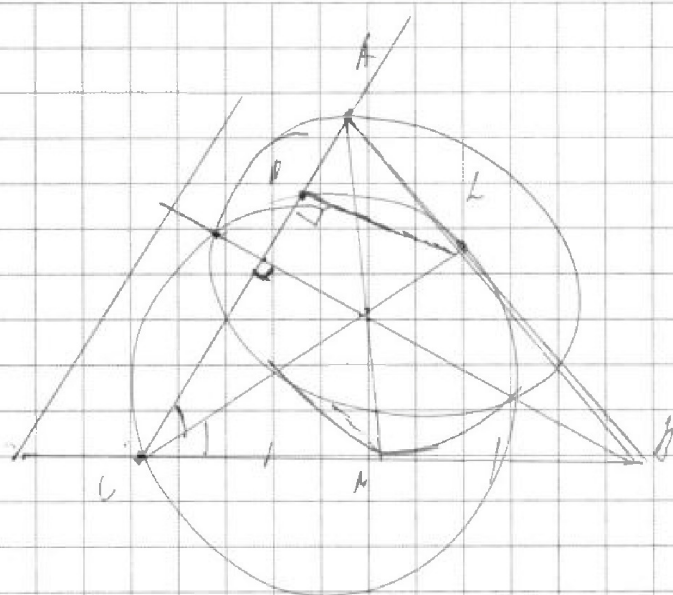


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



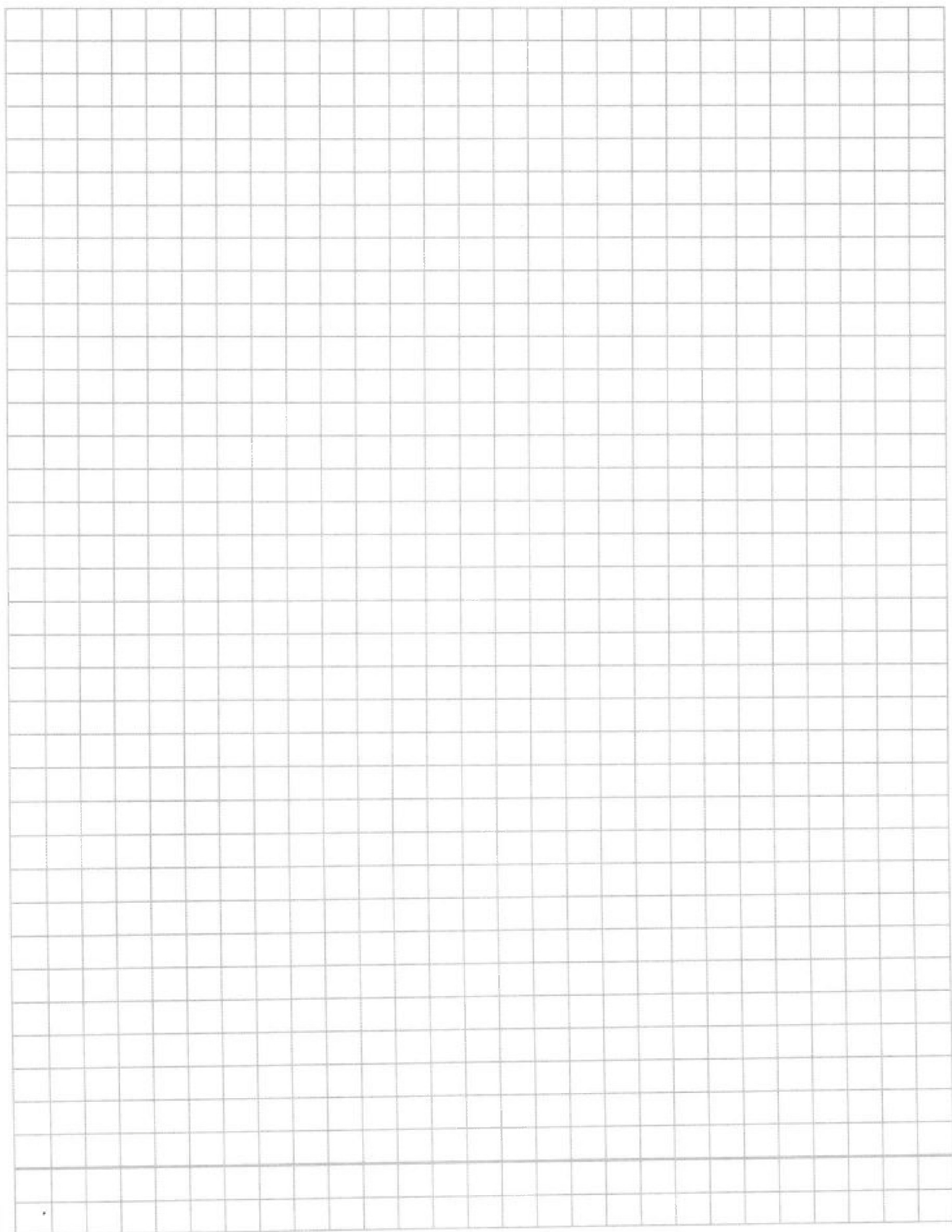


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

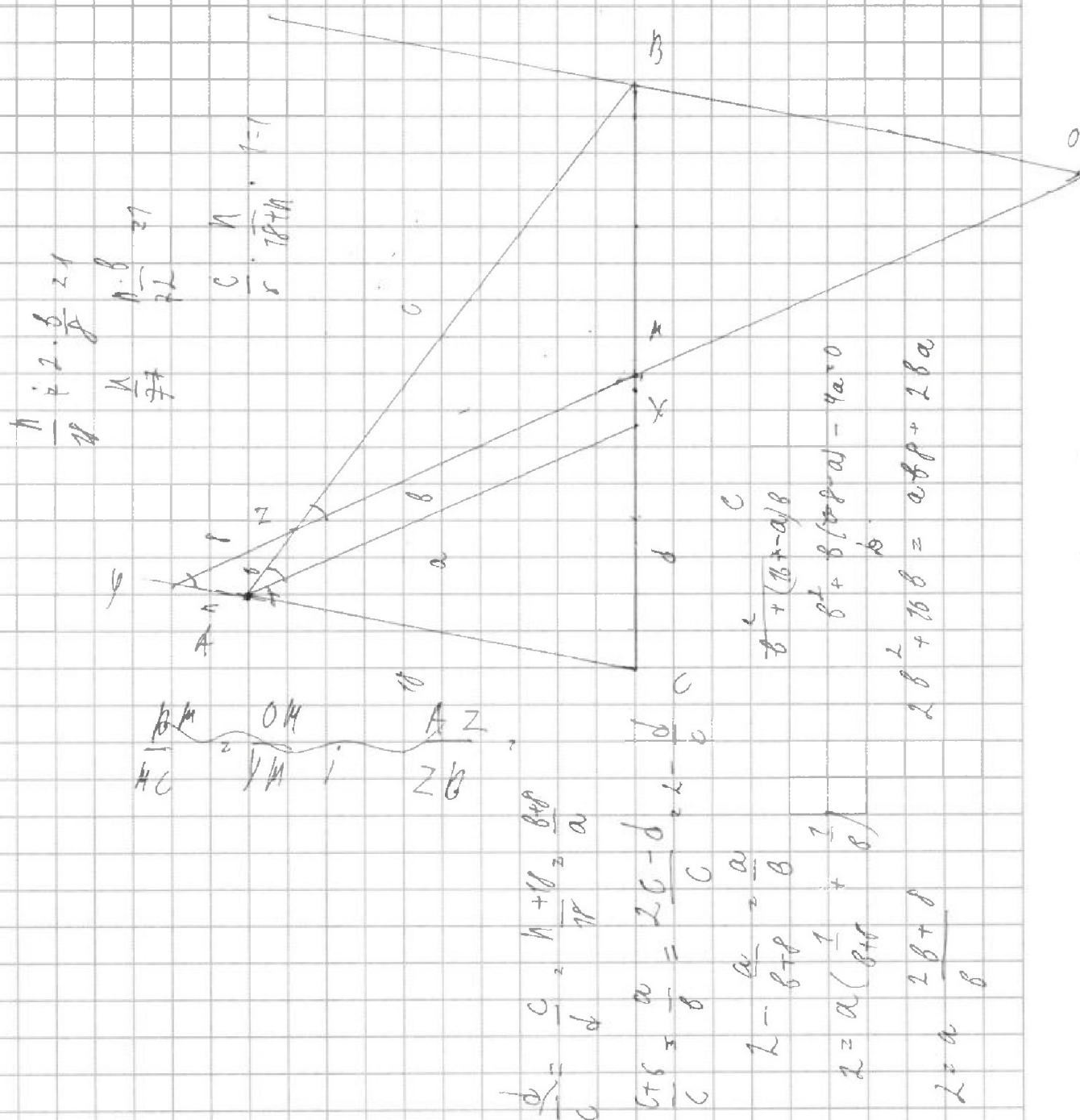
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

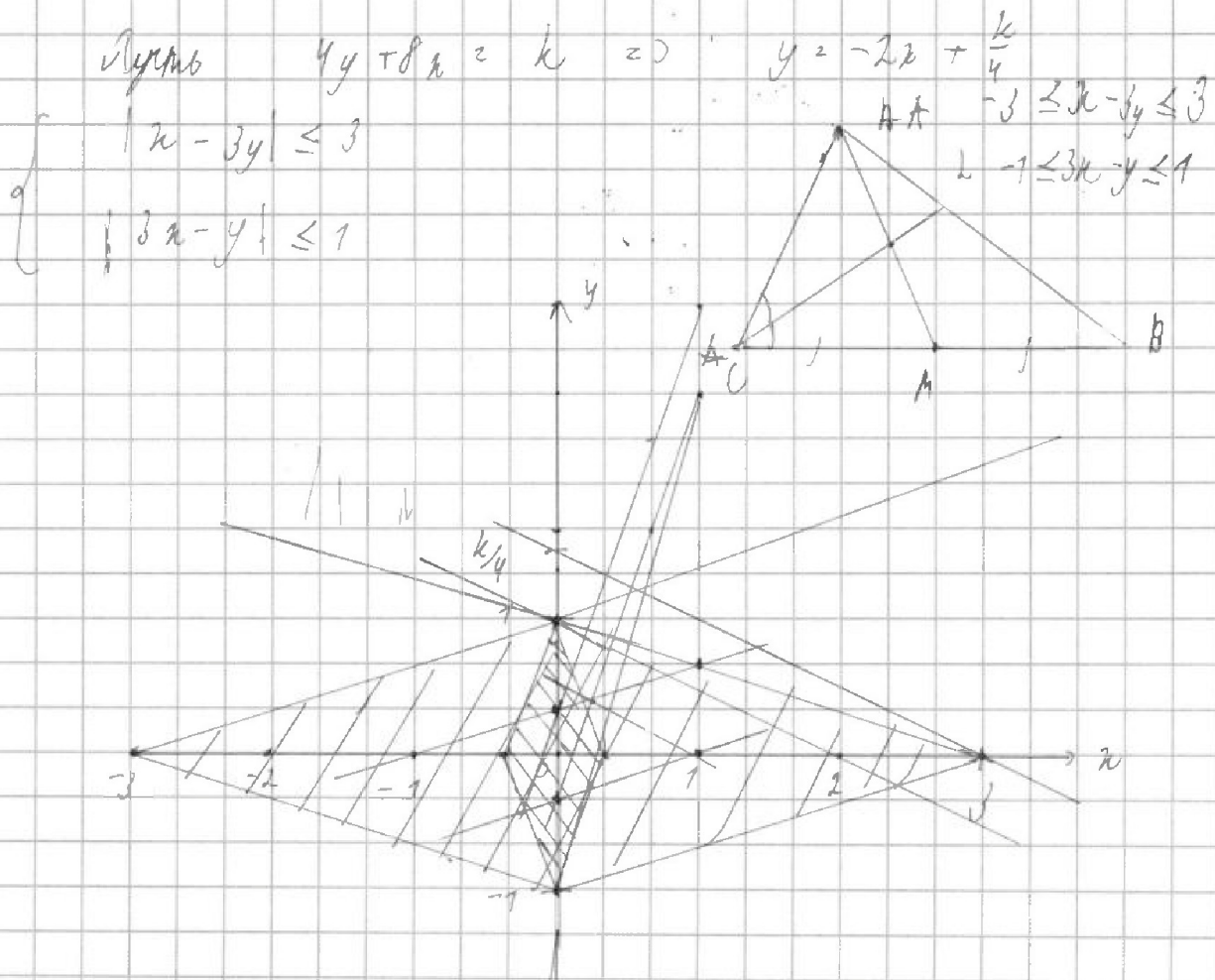
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На координатной плоскости нарисовать множество
удовлетворяющее первому и второму уравнению
системы где их пересечение — множество второго
уравнения

$$8x = 8 \quad k = \frac{3}{4}$$



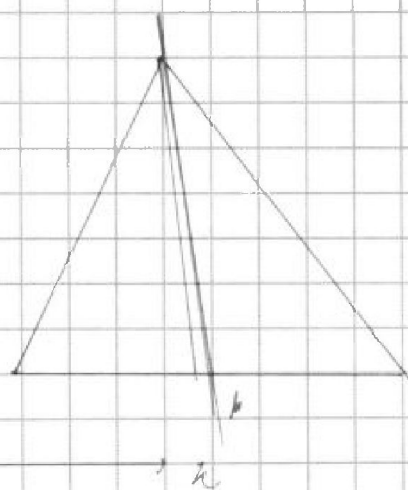
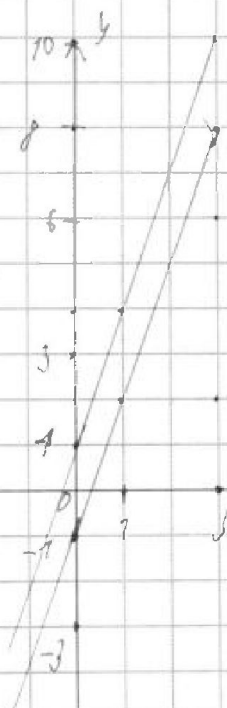
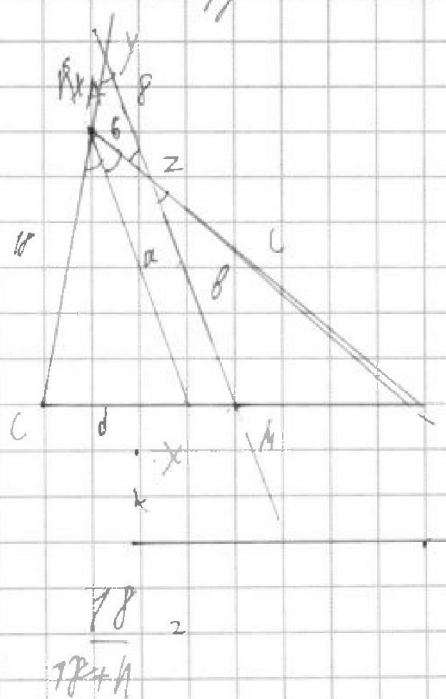
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $y + px = k > 0$ $y = -2x + \frac{k}{4}$
 Нарисовать множество $\begin{cases} |x - 6y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$ на
 координатной оси



$$A = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n-9)(m+n) = 13p^2$$

$$B = mn(m+n-9) =$$

$$m+n = (m+n-9)/-13$$

$$k^2 - k - 13 = 0$$

$$k^2 + k - 13 = 0$$

