



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle \overset{CAN}{CEM}) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0 \quad a=1 \quad b=2\sqrt{3}t \quad c=4t^2-4$$

Чтобы квадратное уравнение имело 2 корня $D > 0$.

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2 > 0$$

$$4t^2 < 16$$

$$t < 4$$

$$t \in (-2; 2)$$

По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 4t^2 - 4 > 0$

$$t^2 > 1$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$\begin{cases} t < -1 \\ t > 1 \end{cases}$$

$$t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

$$\begin{cases} -2 < t < 2 \end{cases}$$

Ответ: ~~$t \in (-2; 2)$~~ При $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

Предположим, что $a-b$ и $a-b+15$ кратны p . Тогда $a-b+15-a-b = 15 : p$. Тогда $p = 2, 3$ или $5, 7, 11$ или 13 . Однако максимальное

Заметим, что максимальное значение $a-b = 38$ т.к.

$a+b=40$. Тогда максимальное значение $(a-b)(a-b+15)$ будет

равно $38 \cdot 53 = 2014$. При этом если $p \geq 3$, то $17p^5 \geq 4131$.

Значит $p=2$ и $17p^5 = 17 \cdot 32 = 544$. Теперь заметим,

что $a-b$ всегда кратно 2 т.к. $a+b=40 \Rightarrow a-b=40-2b=2(20-b)$.

Значит $a-b+15$ - нечетное. Это возможно если $a-b+15=17$ или ± 1 .

При $a-b+15=\pm 1$, $a-b=\pm 544$, что невозможно, ведь $a+b=40$.

При $a-b+15=-17$, $a-b=-32 \Rightarrow a=4, b=36$

При $a-b+15=17$, $a-b=17-15=2$. Но тогда $(a-b)(a-b+15)=34$, что противоречит условию. Значит $a=4, b=36$

Ответ: $a=4, b=36$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle ANC - \triangle$ (по признаку $\triangle$)

$$\angle NAC = \angle NCA$$

$$\angle BNA = 180^\circ - \angle ANC = 180^\circ - (180^\circ - 2\angle NAC) = 2\angle NAC$$

$\triangle BAC \sim \triangle BAN$ (по 1 признаку подобия $\triangle$)

$$\angle BAC = \angle BAN + \angle CAN = 2\angle NAC = \angle BNA$$

$$\angle BCA = \angle BAN$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BN} = \frac{AC}{AN}$$

$$AB^2 = BC \cdot BN$$

$$AB^2 = 12 \cdot 8 = 96$$

$$AB = 4\sqrt{6}$$

Ответ: $AB = 4\sqrt{6}$



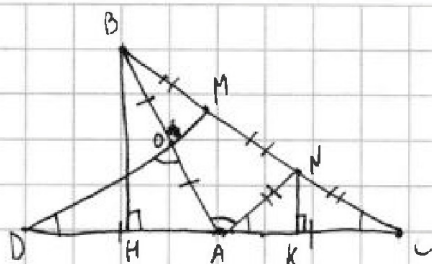
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle NAC = \angle ADM$ (как соотв при $AN \parallel DM$ и сек. AD)

$\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN}$ (по теореме Фалеса)

$$AC = AD$$

$\frac{BM}{MN} = \frac{BO}{OA} \Rightarrow BO = OA$ (по теореме Фалеса)

$$AC = AD = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} AB = OA = OB$$

$\angle ODA = \angle DOA$ (по св-ву Δ)

~~$\angle DOA = \angle BOM$ (по св-ву Δ)~~

$\angle DOA = \angle OAN$ (как н.д.у при $DM \parallel AN$ и сек. OA)

$\angle BAD = 180^\circ - 2\angle NAC$ (по св-ву смежных $\angle$)

Проведём в Δ отпустили высоту BH на DC .

$$AH = \cos(\angle BAD) \cdot AB$$

$$AH = \cos(180^\circ - 2\angle NAC) \cdot AB = \frac{1}{2} AB \text{ (т.к. } \cos(x) = -\cos(180^\circ - x))$$

Проведём высоту NK на сторону DC .

$$\frac{NC}{KC} = \frac{BC}{KC} \Rightarrow \frac{4}{KC} = \frac{12}{AH \cdot AC} \Rightarrow \frac{1}{KC} = \frac{3}{15AC} \Rightarrow KC = \frac{1}{2} AC \text{ (по теореме Фалеса)}$$

NK - высота и медиана ΔAVC



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что деревни из которых выхаживают по 1 дороге могут быть соединены или с 4 другими деревнями т.к. иначе ^{из них не получится добраться до других} ~~получится изолированными~~ деревни и условия не будет выполняться. Также известно, что никакие 3 не соединены друг с другом ведь в противном случае можно добраться из одной до другой двумя способами.

Теперь, рассматривая задачу в виде графа, где деревни - вершины, а дороги - рёбра, рассмотрим как могут быть соединены деревни с 3, 4, 5 и 7 деревнями.

Также случаев всего 2 (не считая те, что получаются перестановкой вершин): Π Σ . В каждом из случаев сумма степеней вершин этих деревень (без дорог к остальным) будет равна 6. Остальные 13 дорог будут вести к другим деревням.

Итого получается 14 деревень

Ответ: 14 деревень.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1-|x+y-2| \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+y) \geq x^2+y^2 \\ -1 \leq x+y-2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+y) \geq x^2+y^2 \\ 2 \leq 2(x+y) \leq 6 \end{cases}$$

$$x^2+y^2 \leq 6.$$

Если в целых числах есть всего 3 способа как это возможно

(x и y в данном уравнении взаимозаменяемы т.е. ^{их можно} поменять местами

и ~~ничего~~ ничего не изменится): $0+1 \leq 6$ $1+1 \leq 6$
 $0+4 \leq 6$ $0+0 \leq 6$
 $1+4 \leq 6.$

Значит возможные значения x и y будут ^{(0;0); (1;±1)} (0;±1); (0;±2); (±1;±2).

Подставляя значения в ^{уравнение} получим, что ~~под~~ ^{получим} подходят пары (0;1), (0;2) и (1;2) (и наоборот)

Ответ: (0;1); ~~(1;1)~~; (0;2); (1;2) и наоборот.

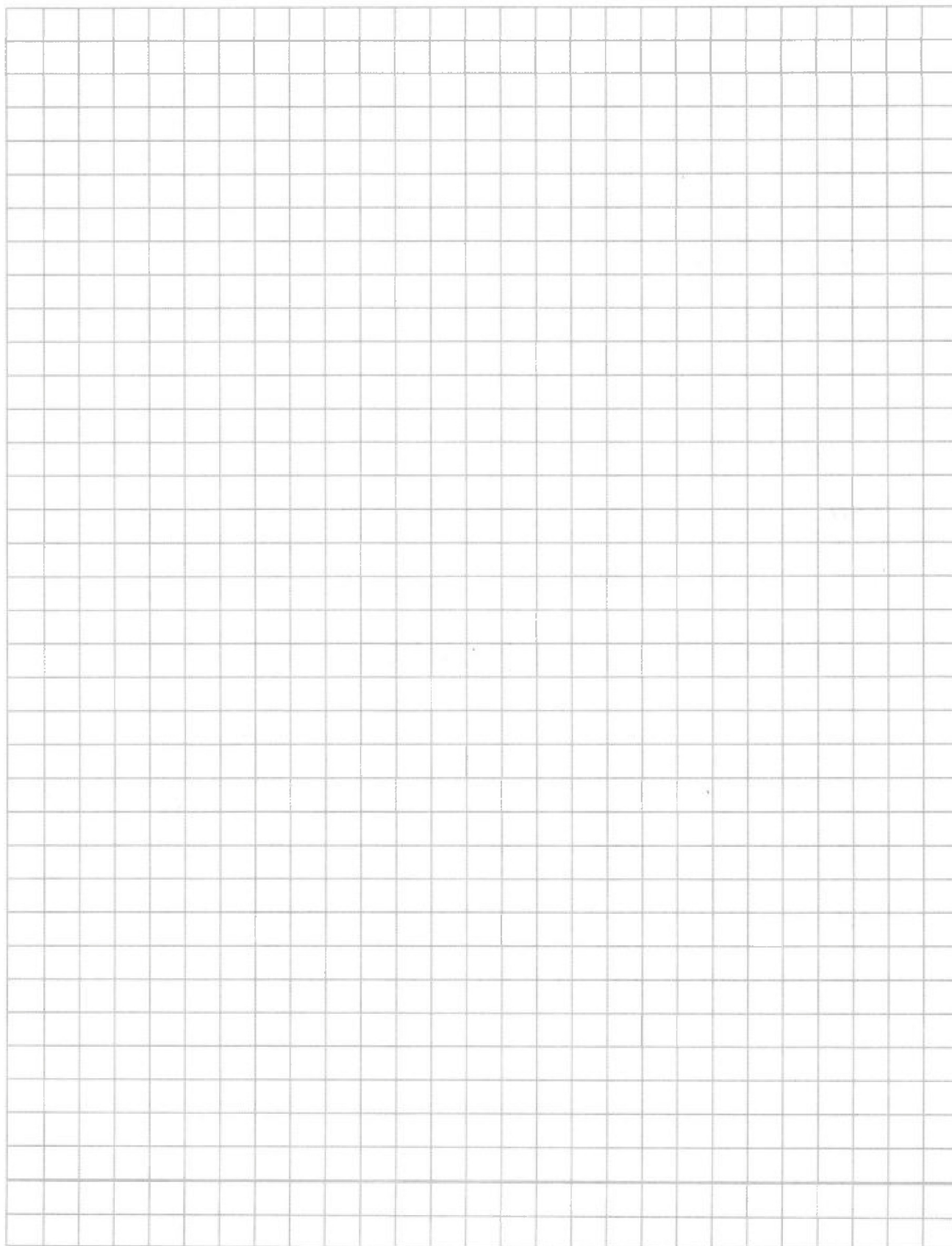


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

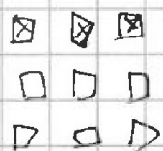


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

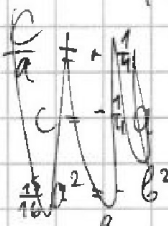
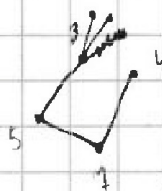
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



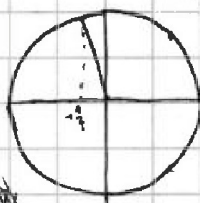
$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

$\cos 2\alpha$

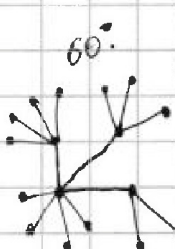
$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$$



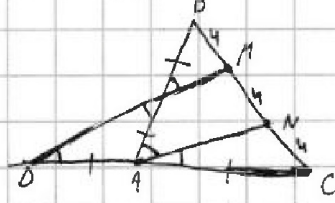
$\cos \alpha$



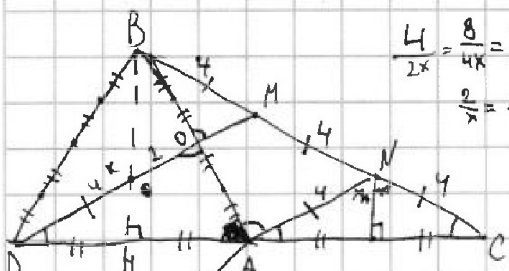
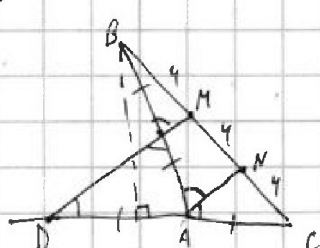
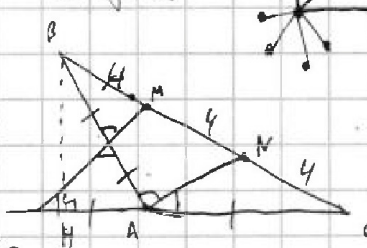
$$\cos(180^\circ - 2\angle CAN)$$



$\frac{1}{2}$



$$\frac{4}{2x} = \frac{8}{4x} = \frac{4x}{12}$$



$$AH = \frac{1}{2} AB$$

$$180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 2\angle 1$$

180°

$$180^\circ - 2\angle 1$$

$$180^\circ - 2\angle 1$$

$$180^\circ - 3\angle 1$$

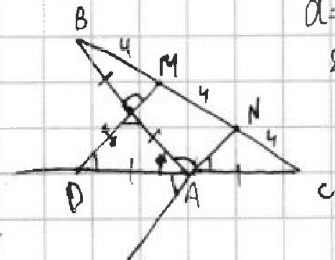
$$180^\circ + 180^\circ - 4\angle 1 + x = 180^\circ$$

$$180^\circ - 4\angle 1 = -x$$

$$x = 4\angle 1 - 180^\circ$$

$$\frac{1}{2}x = 2\angle 1 - 90^\circ$$

$$2x + 2y - x^2 - y^2$$



$a =$

$$2a^2 = c^2$$

$$a = \frac{c}{\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{5}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

$$D = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2 > 0$$

$$4t^2 < 16$$

$$t^2 < 4$$

$$t \in (-2; 2)$$

$$(a-b)/(a-b+15) = 17 \cdot 2^5 = 544$$

$$a+b=40$$

$$a=40-b$$

$$b=40-a$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

$$(40-2b)^2 + 15(40-2b) = 17p^5$$

$$2200 - 190b + 4b^2 = 17p^5$$

$$(2a-40)(2a-25) = 17p^5$$

$$4a^2 - 130a + 1000 = 17p^5$$

$$4a^2 - 130a + 1000 = 4b^2 - 190b + 2200$$

$$4(a-b)(a+b)$$

$$16a(a-b) - 130a + 190b - 1200 = 0$$

$$320a - 640 - 130a + 190b - 1200 = 0$$

$$2 \quad 3 \quad 5$$

$$a = 15 \cdot 4$$

$$b = 54 \cdot 36$$

$$a-b=1$$

$$a-b=1$$

$$a=b+1$$

$$2b+1=40$$

$$a-b+15=1$$

$$a-b+15=-1$$

$$2a=40$$

$$17 \cdot 32 = 544$$

$$2a=6$$

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

0

$$x^2 + 5x + 34 = 0$$

$$D = 25 - 136 = -111$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-111}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{-111}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{-111}}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = 34 = c$$

$$x_1 + x_2 = -5 = -b$$

$$a+b=c^2$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{4}$$

$$a = \frac{1}{4}c$$

$$b = \frac{1}{4}c$$

$$b = \frac{1}{4}c$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x_1 = \frac{-5 + 3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -2.5 = -\frac{b}{a}$$

$$(2a-40)(2a-25) = 17p^5$$

$$(40-2b)(55-2b) = 17p^5$$

$$2a-40=10$$

$$2a-40=10$$

$$a=3$$

$$t(t+15) = 17p^5$$

$$a-b+15=17$$

$$a \equiv b+2$$

$$2b+2 \equiv 40$$

$$b+1 \equiv 20$$

$$b \equiv 2$$

$$a \equiv 0$$

$$9 \quad 8 \quad 1$$

$$243$$

$$243$$

$$243$$

$$1701$$

$$243$$

$$4931$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2x+2y-x^2-y^2 \geq 0$$

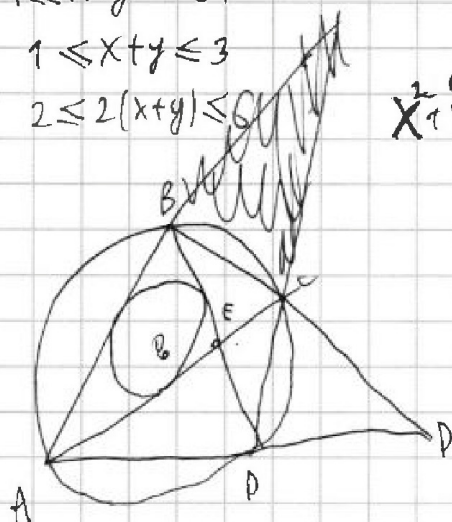
$$1-|x+y-2| \geq 0$$

$$|x+y-2| \leq 1$$

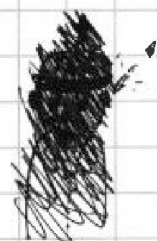
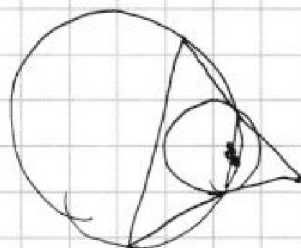
$$-1 \leq x+y-2 \leq 1$$

$$1 \leq x+y \leq 3$$

$$2 \leq 2(x+y) \leq 6$$



$$\begin{matrix} x^2+y \\ 0+1 \\ 0+2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1+2 \end{matrix}$$



$$2(x+y) \geq x^2+y^2$$

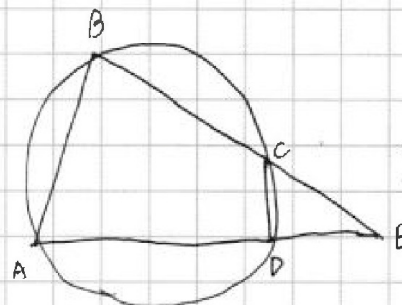
$$x+y \geq \frac{x^2+y^2}{2}$$



$$x^2+2x+y^2+2y$$

$$x(x+2)+y(y+2) \geq 2(x^2+y^2)$$

$$\begin{matrix} x^2+y^2 \leq 6 \\ 2+1 \end{matrix}$$



$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$