



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- ✦ 1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

✦
$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

- ✦ 4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- ✦
 - $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

- ✦ 7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

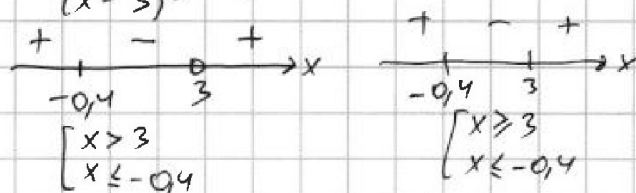
$$b_2 = bq$$

(b_n) - геометрическая прогрессия; $b_1 = b$; $b_i = bq^{i-1}$ ~~1...7~~

$$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}; \quad b_{10} = x+4, \quad b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

Найдем ОДЗ предположенных выражений:

$$\begin{cases} \frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0 & (1) \\ (15x+6)(x-3) \geq 0 & (2) \end{cases} \quad (1) \quad \frac{3(5x+2)}{(x-3)^3} \geq 0 \quad (2) \quad (15x+6)(x-3) \geq 0$$



$$\begin{cases} x > 3 \\ x \leq -0.4 \end{cases}$$

То $\begin{cases} x > 3 \\ x \leq -0.4 \end{cases}$ - исконое ОДЗ.

Заметим, что если $x = -0.4$, то $b_4 = 0$, то и все последующие члены прогрессии должны быть равны 0, однако $b_{10} = -0.4 + 4 \neq 0$, то $x = -0.4$ можно не рассматривать.

① Рассмотрим случай, если $x > 3$ (то $x-3 > 0$)

$$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^2(x-3)}} = \frac{1}{x-3} \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}} = \frac{1}{x-3} \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}}$$

Сделаем замену: $15x+6 = a$; $x-3 = c$, тогда.

$$b_4 = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{a}{c}}; \quad b_{10} = c+7; \quad b_{12} = \sqrt{ac}$$

С другой стороны: $b_4 = bq^3$; $b_{10} = bq^9$; $b_{12} = bq^{11}$.

То имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \sqrt{\frac{a}{c}} = bq^3 & (3) \\ c+7 = bq^9 & (4) \\ \sqrt{ac} = bq^{11} & (5) \end{cases}$$

Отметим то, что в силу условия $b_4 > 0, b_{10} > 0, b_{12} > 0$.

Тогда: $(5) : \frac{\sqrt{ac}}{c+7} = \frac{bq^{11}}{bq^9}$ т.е. $c > 0$.

$$c^2 = q^8, \text{ то } \begin{cases} q = \sqrt[4]{c} \\ q = -\sqrt[4]{c} \end{cases}$$

в первом случае (или втором) $q^2 = \sqrt{c}$

$$(5) : \frac{\sqrt{ac}}{c+7} = \frac{bq^{11}}{bq^9}$$

$$(4) : \frac{\sqrt{ac}}{c+7} = q^2$$

$$\frac{\sqrt{ac}}{c+7} = \sqrt{c} \quad | \cdot \frac{c+7}{\sqrt{c}} > 0 \text{ в силу } x > 3. \text{ , то } \sqrt{a} = c+7 \quad (6)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вернёмся к значению в выражении (6)

$$\sqrt{15x+6} = x+4$$

$$15x+6 = x^2+8x+16$$

$$x+4 \geq 0 \text{ — верно}$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5 \\ x=2 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases}, \quad x=2 \text{ не подходит в силу условия } x \geq 3, \text{ и}$$

$$x=5. \text{ Тогда } b_4 = \sqrt{\frac{15 \cdot 5 + 6}{(5-3)^3}} = \sqrt{\frac{75+6}{2^3}} = \sqrt{\frac{81}{2^3}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$b_{10} = 5+4 = 9; \quad b_{12} = \sqrt{(15 \cdot 5 + 6) \cdot 2} = 9\sqrt{2}.$$

а) Ищем, $\frac{9\sqrt{2}}{2} = bq^3$ Если $q = \sqrt[4]{c}$, то $q = \sqrt[4]{x-3} = \sqrt[4]{2}$.

$$b_4 = \frac{9\sqrt{2}}{2}, \Rightarrow bq^3 = \frac{9\sqrt{2}}{2}, \Rightarrow b\sqrt[4]{2^3} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = \frac{9\sqrt[4]{2^3}}{8}$$

Итак, $b = \frac{9\sqrt[4]{2^3}}{8}; q = \sqrt[4]{2}; b_4 = bq^3 = \frac{9\sqrt[4]{2^3}}{8} \cdot \sqrt[4]{2^3} = \frac{9}{8} \cdot \sqrt[4]{2^6} = \frac{9}{8} \cdot \sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$.

$$b_{10} = bq^9 = \frac{9\sqrt[4]{2^3}}{8} \cdot \sqrt[4]{2^9} = \frac{9 \cdot \sqrt[4]{2^{12}}}{8} = \frac{9 \cdot 8}{8} = 9.$$

$$b_{12} = bq^{11} = \frac{9\sqrt[4]{2^3}}{8} \cdot \sqrt[4]{2^{11}} = \frac{9\sqrt[4]{2^{14}}}{8} = \frac{9\sqrt{2^7}}{8} = \frac{9 \cdot 8\sqrt{2}}{8} = 9\sqrt{2}.$$

То при $x=5$ $\exists$ геом прогрессия. Искать $q = \sqrt[4]{c}$ разбирать не будем, т.к. мы уже искали геом. прогрессию.

(2) $x < -0,4$, т.о. $x-3 < 0$. (делаем замену аналогичную задаче (1))
 $15x+6 = a$
 $x-3 = c$

$$b_4 = \sqrt{\frac{a}{c^3}} = \frac{1}{|c|} \sqrt{\frac{a}{c}} = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{a}{c}}$$

$$b_{10} = c+1; \quad b_{12} = \sqrt{ac}$$

Опять же, отметим, что в силу $x < -0,4$ b_4, b_{10}, b_{12} не равны 0.

Ищем систему: (по аналогии)

$$\begin{cases} -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{a}{c}} = bq^3 & (7) \\ c+1 = bq^9 & (8) \\ \sqrt{ac} = bq^{11} & (9) \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(7)}{(7)}: \frac{\sqrt{ac}}{\frac{-1\sqrt{a}}{c} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{6q''}{6q^3} \quad \leftarrow c^2 = \frac{1}{4}$$

$$-c \cdot \sqrt{\frac{ac \cdot c}{a}} = q^8$$

$$-c \cdot |c| = q^8$$

$$q^8 = c^2$$

$$q^2 = \sqrt{|c|} = \sqrt{-c} \quad c+7$$

$$\frac{(9)}{(8)}: \frac{\sqrt{ac}}{c+7} = q^2 \quad \frac{\sqrt{ac}}{c+7} = \sqrt{-c} \quad / \cdot (\sqrt{-c}) > 0.$$

$$\sqrt{-a} = c+7$$

$$\sqrt{-15x-6} = x+4$$

$$\begin{cases} -15x-6 = x^2+8x+16 \\ x+4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+23x+22=0 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ x=-22 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

$$x=-1, -1 < 0,4$$

Если $x=-1$, то $b_4 = \sqrt{\frac{-9}{(-1-3)^3}} = \sqrt{\frac{-9}{-4^3}} = \sqrt{\frac{3^2}{2^6}} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$

$b_{10} = -1+4 = 3$; $b_{12} = \sqrt{(-15+6x-1-3)^2} = \sqrt{19 \cdot 4} = 6$.

$$\begin{cases} \frac{3}{8} = 6q^3 \\ 3 = 6q^9 \\ 6 = 6q'' \end{cases} \quad q^2 = \sqrt{-c} = \sqrt{-(x-3)} = \sqrt{3-x} = \sqrt{4} = 2$$

а) Если $q = \sqrt{2}$, то $b = \frac{3}{8q^3} = \frac{3}{8 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{32}$.

$$b_4 = 6q^3 = \frac{3\sqrt{2}}{32} \cdot \sqrt{2}^3 = \frac{3 \cdot 2^2}{32} = \frac{3}{8}$$

$$b_{10} = 6q^9 = \frac{3\sqrt{2}}{32} \cdot \sqrt{2}^9 = \frac{3 \cdot 2^5}{32} = 3$$

$$b_{12} = 6q'' = \frac{3\sqrt{2}}{32} \cdot \sqrt{2}^{11} = \frac{3 \cdot 2^6}{32} = 6$$

Итак, при $x=-1$ получилиgeom. прогрессию
при данных условиях, но также $q = -\sqrt{2}$ можно
не рассматривать

Ответ: $\{-1; 5\}$ (примеры подст. в решении)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

О.Д.З.

$$\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 5-x-3z \geq 0 \\ y-2x-x^2+z \geq 0 \\ 225-z^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x \geq -7$$

$$-15 \leq z \leq 15$$

$$x \leq 5-3z$$

$$5-3z \geq -7$$

$$z \leq 4$$

$$-15 \leq z \leq 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) - p = 0.$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 - p = 0.$$

Замена: $\cos x = t, \quad t \in [-1; 1].$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0, \quad t \in [-1; 1]$$

$$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p, \quad t \in [-1; 1].$$

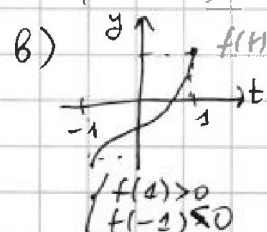
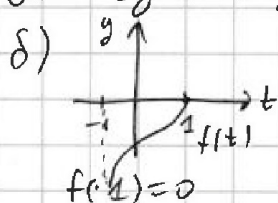
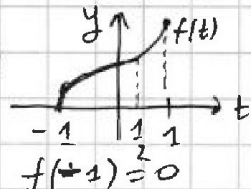
Функция непрерывна и дифф. на $[-1; 1]$ и $(-1; 1)$ соответственно.

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3; \quad f'(t) = (2\sqrt{3}t - \sqrt{3})^2, \text{ то}$$

$$f'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [-1; 1], \text{ то } f(t) \uparrow \text{ на } [-1; 1].$$

Тогда, ~~на~~ у уравнения $f(t) = 0$ не более одного корня. А нам нужно ≥ 1 решение, то это уравнение должно иметь ровно один корень (отн. t).

Возможны три случая:
(в силу монотонности $y = f(t)$)



а) $f(-1) = 0$
 $-4 - 6 - 3 + 3 - p = 0$
 $p = -10$

$$t = -1.$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) $f(1) = 0$
 $4 - 6 + 3 + 3 - p = 0$
 $p = 4.$

$$t = 1$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

В силу непрерывности $y = f(t)$, у $f(t) = 0$ при этих условиях будет один корень отн. t на $[-1; 1]$

в) $\begin{cases} f(1) > 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - p > 0 \\ -10 - p < 0 \end{cases} \Rightarrow -10 < p < 4.$

$$f(t) = \left(\sqrt[3]{4t - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^3 + \frac{5}{2} - p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(t) = 0 \quad \left(\sqrt[3]{4t} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = p - \frac{5}{2}$$

$$\sqrt[3]{4t} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{p - \frac{5}{2}}$$

$$t = \left(\sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$t = \sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} + \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} + \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \arccos\left(\sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

Если $p = -10$: $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Если $p = \frac{1}{4}$: $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Если $-10 < p < \frac{1}{4}, 10$ $x = \pm \arccos\left(\sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

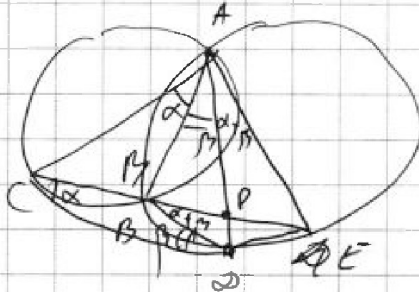


1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.



$$\textcircled{1} AD \cap CE = P \quad \frac{CP}{PE} = \frac{9}{25}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \angle BCD &= \angle CAB = \alpha \\ \angle BDC &= \angle DAB = \beta \\ \angle ADC &= \angle AED \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{углы} \\ \text{вписан-} \\ \text{ные} \\ \text{хорды} \text{ и} \\ \text{накрестовин-} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{3} \angle DBE = \angle BDC + \angle DCB = \alpha + \beta$$

или внешний угол $\triangle BCD$

$$\angle DBE = \angle DAE = \alpha + \beta - \text{впис. опис. на } \widehat{DE} \text{ в } \omega.$$

$$\angle CAD = \angle CAB + \angle DAB = \alpha + \beta, \text{ то } AD - \text{биссектр. } \angle CAE.$$

То по св-ву биссектрисы $\frac{CA}{AE} = \frac{CP}{PE} = \frac{9}{25}$

$$\textcircled{4} \triangle CAD \sim \triangle DAE \text{ по двум углам: } \begin{aligned} \angle CAD &= \angle DAE = \alpha + \beta \\ \angle CDA &= \angle AED \end{aligned}$$

(в силу $\textcircled{2}$)

$$\text{То } \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE} = \frac{CA}{AD}$$

$$\left(\frac{CD}{DE} \right)^2 = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE} \cdot \frac{CA}{AD} = \frac{CA}{AE} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{3}{5} \quad \frac{ED}{CD} = \frac{5}{3}$$

ответ. $\frac{5}{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2, \quad p - \text{простое}$$

$$c^2 - c(a+b) + ab = p^2 = 0 \quad - \text{квадратное, отн. } c.$$

$$D = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4p^2 = (a-b)^2 + 4p^2.$$

D должен быть полным квадратом, иначе c не будет целым, т.к. $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\text{То } (a-b)^2 + 4p^2 = n^2. \quad \text{Посмотрим на}$$

табл. остатков по mod 3. $(a-b) \not\equiv 3, \text{ то } (a-b)^2 \equiv 1 \pmod{3}$

	x	x^2
0	0	0
1	1	1
2	2	1

Но $(a-b)^2 + 4p^2$ — это полный квадрат.

$$\text{То } \begin{cases} (a-b)^2 + 4p^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ (a-b)^2 + 4p^2 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4p^2 \equiv 0 \pmod{3} \\ 4p^2 \equiv -1 \pmod{3} \end{cases}$$

но квадрат $(2p)^2$ не может быть сравним с 2 (см табл)

$$\text{То } 4p^2 \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{т.к. } (4; 3) = 1$$

$$p^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$p \equiv 0 \pmod{3}, \text{ то } p: 3.$$

$$a + b^2 = 820$$

$$820 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\begin{cases} b^2 \equiv 0 \pmod{3} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

Если $b^2 \equiv 0 \pmod{3}$, то $a \equiv 1 \pmod{3}$.

$$b \equiv 0 \pmod{3}$$

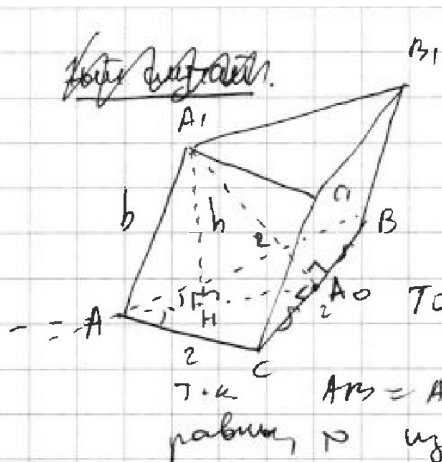
Если $b^2 \equiv 1 \pmod{3}$, то $a \equiv 0 \pmod{3}$.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7.

Пусть $AA_1B_1C_1$ — искомый призм.

$$\text{Пусть } S(AA_1C_1C) = S(AA_1B_1B) = 5$$

$$S(CA_1B_1B) = 4.$$

Пусть b — боковое ребро, h — высота.

AA_1C_1C и AA_1B_1B — параллелограммы — или прямоугольники боковых граней призм.

$$\text{То } S(AA_1C_1C) = AA_1 \cdot AC \sin \angle A_1AC = 5 \quad (1)$$

$$S(AA_1B_1B) = AA_1 \cdot AB \sin \angle A_1AB = 5 \quad (2)$$

$$\text{Так как } AB = AC = 2 \text{ и площади этих граней равны, то из (1) и (2) } \Rightarrow \sin \angle A_1AC = \sin \angle A_1AB. \quad (3)$$

Значит, либо $\angle A_1AC$ и $\angle A_1AB$ — острые, либо тупые.

(а) Если $\angle A_1AC$ и $\angle A_1AB$ — острые, то из (3) следует: $\angle A_1AC = \angle A_1AB$.

То A_1 проектируется на биссектрису $\angle BAC$.

$$\Pi_{P(AAC)}^{\perp}(A_1) = H, \quad AH \cap B_1C_1 = A_0.$$

AA_0 — биссектриса $\angle CAB$, то h — высота.

($\triangle BAC$ — р/с)

$$\text{По т. Пифагора для } \triangle AA_1H: \quad AH = \sqrt{b^2 - h^2}$$

По т. о 3-х косинусах.

$$\cos \angle A_1AC = \cos \angle CAH \cdot \cos \angle A_1AH.$$

$$\cos \angle A_1AC = \cos 30^\circ \cdot \cos \angle A_1AH.$$

$$\text{Из } \triangle AA_1H: \quad \cos \angle A_1AH = \frac{AH}{AA_1} = \frac{\sqrt{b^2 - h^2}}{b}$$

$$\cos \angle A_1AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - h^2}}{b}, \quad \text{то } \sin \angle A_1AC = \sqrt{1 - \frac{3(b^2 - h^2)}{4b^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{b^2 + 3h^2}{4b^2}} = \frac{\sqrt{b^2 + 3h^2}}{2b}$$

$$\text{Из } AA_1C_1C: \quad S(AA_1C_1C) = AA_1 \cdot AC \sin \angle A_1AC = 2b \sin \angle A_1AC$$

$$5 = \frac{2b \cdot \sqrt{b^2 + 3h^2}}{2b}$$

$$25 = b^2 + 3h^2$$

$$h = \sqrt{\frac{25 - b^2}{3}}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. $HAO \perp CB$, то по Т.Т.П. $A, AO \perp BC$.

То $BC \perp (A, HAO)$, то $BC \perp AA_1$.

Т.к. $CC_1 \parallel AA_1$, то $BC \perp CC_1$, то EC_1B - прямоугольник.

То $S(CC_1B_1B) = CC_1 \cdot BC = 2b = 4 \Rightarrow b = 2$.

То $h = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$.

8) Если один из углов $\angle A_1AC$, $\angle A_1AB$ острый, а другой - тупой. Не угадали обихот.

$\angle A_1AC$ - острый, $\angle A_1AB$ - острый, то в

силу (3): $\angle A_1AC + \angle A_1AB = 180^\circ$

Отметим точку D на луче CA за точкой A

$\angle A_1AD = 180^\circ - \angle A_1AC$

То $\angle A_1AD = \angle A_1AB$, то

AA_1 биссектриса $\angle DAN$

$\angle DPA_1(A_1) = H$.

$\angle BAC = 60^\circ$, то $\angle BAD = 120^\circ$, то $\angle BAH = 60^\circ$.

То т.о. B-X координатах:

$\cos \angle A_1AB = \cos \angle BAH \cdot \cos \angle A_1AH = \cos 60^\circ \cdot \cos \angle A_1AH$

$\cos \angle A_1AH = \frac{\sqrt{b^2 - h^2}}{b}$

$\cos \angle A_1AB = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{b^2 - h^2}}{b}$

То $\sin \angle A_1AB = \sqrt{1 - \frac{1}{4b^2}(b^2 - h^2)} = \frac{\sqrt{3b^2 + h^2}}{2b}$

$S(A_1B_1B) = \frac{2b \cdot \sqrt{3b^2 + h^2}}{2b} = \sqrt{3b^2 + h^2} = 5 \Rightarrow h = \sqrt{25 - 3b^2} (*)$

Реш. Д.п. AAO - биссектриса $\angle BAC$.

$\angle HAO = 90^\circ$ - как угол между внутренней и внешней биссектрисой.

то т.к. $HA \perp AAO$ и $BC \perp AAO$, то $HA \parallel BC$, т.к. лежит в (AB_1C) .

То $\angle A_1AH = \angle CCB_1$ как углы между соотв. сторонами

$\sin \angle CCB_1 = \frac{h}{b}$ (в $\triangle A_1AH$).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S(CCA_1B) = 2b \frac{b}{b} = 2h = 4 \Rightarrow h = 2, \text{ а } b = \sqrt{7} \text{ (из *)}$$

Решение

Если оба тупые
(и $\angle A_1AC$ и $\angle A_1AB$), то из (3)
следует, что

$$\angle A_1AC = \angle A_1AB$$

Тогда A_1 проектируется на
прямую, содержащую биссектрису
 $\angle BAC$.

$HP(A_1) = H$; $HA \cap BC = AO$. AO - биссектриса $\angle BAC$,

то HA - биссектриса внешнего угла при $\angle BAC$.

4. Отметим на луче CA за A точку D .
 $\angle A_1AD + \angle A_1AC = 180^\circ$.

По т. о 3-х косинусах $\cos \angle A_1AD = \cos \angle DAI \cdot \cos \angle A_1AI$

$$\cos(180^\circ - \angle A_1AC) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - h^2}}{b}$$

$$-\cos \angle A_1AC = \frac{\sqrt{3b^2 - 3h^2}}{2b}$$

$$\text{То } \sin \angle A_1AC = \frac{\sqrt{b^2 + 3h^2}}{2b}, \text{ по О.Т.Т.}$$

По аналогии с (1) CC_1B_1B - прямоугольник

$$S(CCA_1B) = 2b = 4$$

$$b = 2.$$

$$S(A_1AB) = 2b \frac{\sqrt{b^2 + 3h^2}}{2b} = \sqrt{b^2 + 3h^2} = 5$$

$$b^2 + 3h^2 = 25$$

$$4 + 3h^2 = 25$$

$$h^2 = 7$$

$$h = \sqrt{7}$$

Ответ: 2 или $\sqrt{7}$

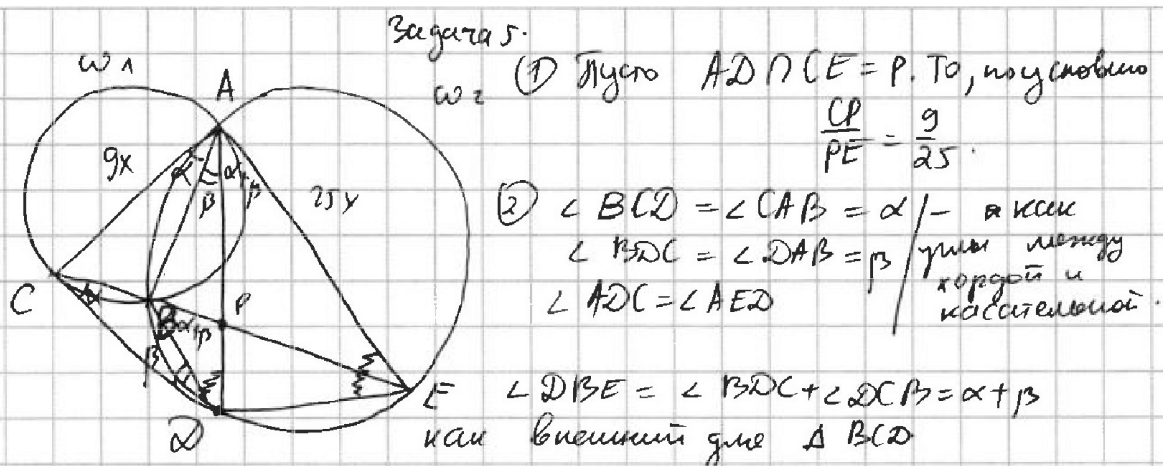


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle DBE = \angle DAE = \alpha + \beta$ - или вписанные в ω_2 , опирающиеся на UDE .

$\angle CAD = \angle CAB + \angle DAB = \alpha + \beta$. То, AD - биссектриса $\angle CAE$.

~~$\triangle CAD \sim \triangle DAE$~~ То, по свойствам биссектрисы угла $\triangle CAE$:

$$\frac{CA}{AE} = \frac{CP}{PE} = \frac{9}{25}, \text{ то пусть } CA = 9x, AE = 25y$$

③ $\triangle CAD \sim \triangle DAE$ по двум углам: $\angle CAD = \angle DAE = \alpha + \beta$
 $\angle CDA = \angle AED$.
 (в силу ②)

То $\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE} = \frac{CA}{AD}$.

$$\left(\frac{CD}{DE}\right)^2 = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE} \cdot \frac{CA}{AD} = \frac{CA}{AE} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{3}{5}$$

Ответ: $\frac{3}{5}$

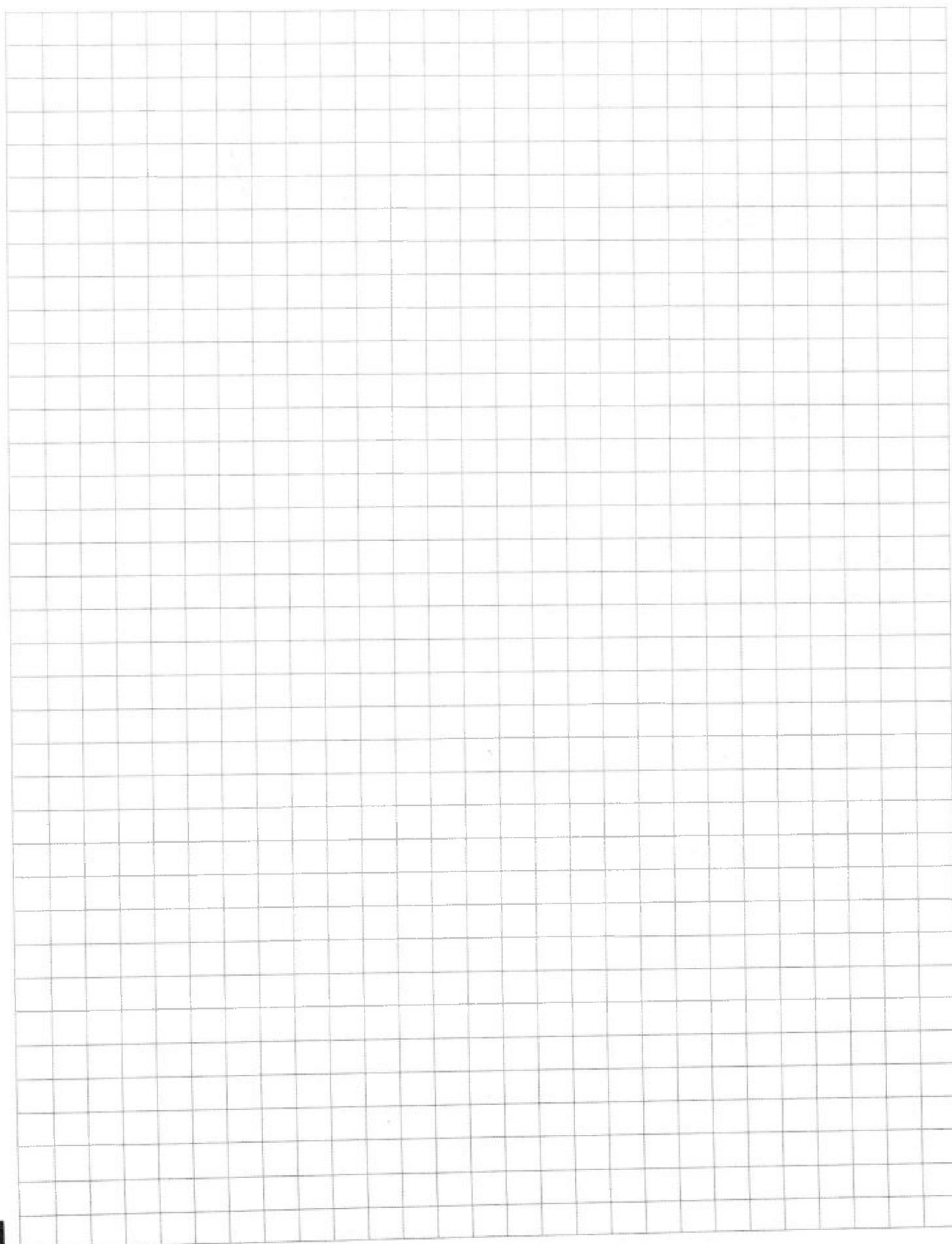


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

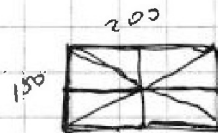
Черновики.

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2(y-35) = \sqrt{225-z^2} \end{cases} \quad y = 20 + 15 = 35$$

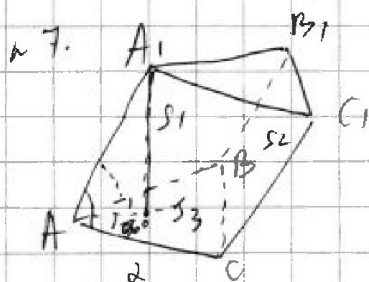
$$\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 5-x-3z \geq 0 \\ y-2x-x^2+z \geq 0 \\ 225-z^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -7 \\ -x \leq 7 \end{cases}$$

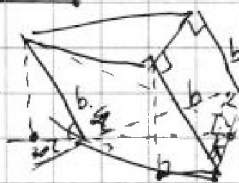
$$\begin{cases} 3z \leq 5-x \leq 12 \\ |z| \leq 4 \end{cases}$$



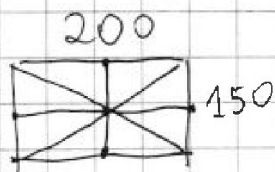
$$-15 \leq z \leq 4$$



$$\begin{cases} S_1 = 5 \\ S_2 = \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos 30^\circ \cdot \cos \varphi \\ \cos \alpha &= \cos 30^\circ \cdot \frac{\sqrt{b^2-h^2}}{b} \end{aligned}$$



$$b \cos \alpha = \cos 30^\circ \sqrt{b^2-h^2}$$

$$2b \sin \alpha = 5$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{2b}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{4b^2}} = \frac{\sqrt{4b^2-25}}{2b}$$

$$4p^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

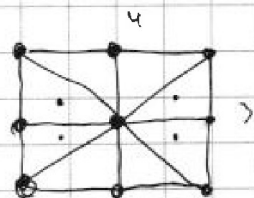
$$p^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$p \equiv 0 \pmod{3}$$

2.

$$2b \frac{\sqrt{3b^2+4}}{2b} = 5$$

$$25 = 4 + 3b^2$$



$$\frac{\sqrt{4b^2-25}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{b^2-h^2}$$

$$4b^2-25 = 3b^2-3h^2$$

$$3h^2 = 25-b^2$$

$$h^2 = \frac{25-b^2}{3}$$

$$(a, b, c) : a > b.$$

$$c^2 + ab - ac - bc = p^2$$

$$(a-b) \mid 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \quad c^2 - (a+b)c + ab - p^2 = 0$$

$$a+b^2 = 820$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4p^2 =$$

$$= (a-b)^2 + 4p^2$$

$$0 > 0$$

$$\begin{array}{r} \text{mod } 3 \\ n \mid n^2 \\ 0 \mid 0 \\ 1 \mid 1 \\ 2 \mid 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = a + b = 820 + b - b^2 \\ c_1 \cdot c_2 = ab - p^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} 4p^2 = 0$$

$$\begin{aligned} c^2 - c(a+b) + ab - p^2 &= 0 \\ a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4p^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$p^2 = 3$$

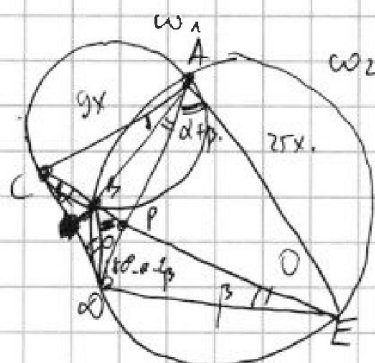


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



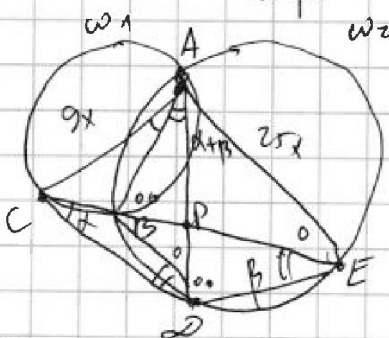
$$\frac{ED}{CD} = ?$$

$$1/5-2 \quad 1/5+2$$

$$\frac{CB}{AC \cdot PD} \cdot \frac{CD^2}{AC \cdot CE \cdot PD}$$

$$\frac{CA}{AE} = \frac{CP}{PE}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = ?$$



CP2

$$\frac{BD}{AE} = \frac{PD}{PE} \quad CB = \frac{\sin \alpha}{\sin 2(\alpha + \beta)}$$

$$BD = \frac{AE \cdot PD}{PE} \quad CE = 34y$$

CB

$$CB = \frac{DE}{\cos 64^\circ}$$

14.

$$\frac{CP}{PE} = \frac{9}{25}$$

15-точка Шмидта

$$\frac{ED}{\sin \alpha} = \frac{CD}{\sin \beta} \quad \frac{ED}{CD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$AP \cdot PD = BP \cdot PE$$

$$\frac{CB}{BP} = \frac{AC}{AP} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{CB \cdot AP}{BP \cdot AC} = \frac{CB}{AC} \frac{PE}{PD}$$

$$PD \cdot CB \cdot BP \cdot CE = CD^2$$

$$\frac{CD^2}{AC \cdot PD}$$



$$\frac{AP}{BP} = \frac{PE}{PD} \quad \frac{CD}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{PD}{ED}$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{ED}{PD} = \frac{CD}{CB}$$

$$\frac{CD}{ED} = \frac{CB^2 \cdot CE}{CD^2 \cdot BP}$$

$$\frac{AC}{\sin(\beta + \alpha)} = \frac{CD}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{AD}{\sin(\beta + \alpha)} = \frac{DE}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{AD}{AC \sin \alpha} = \frac{AD \sin \beta}{AC \sin \alpha}$$

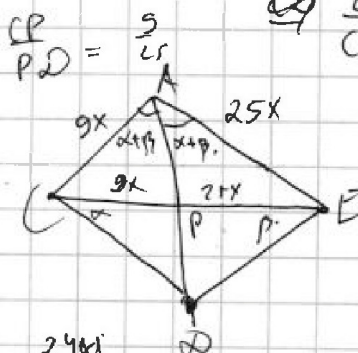
$$\frac{CB^2 \cdot CE}{CD^2 \cdot BD} =$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{CB^2 \cdot CE}{CB \cdot CE \cdot BD} = \frac{CB}{BD}$$

$$AP \cdot PD = BP \cdot PE$$

$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$\frac{CB}{CE} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2(\alpha + \beta)}$$



$$\frac{DE}{\sin \alpha} = \frac{CE}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{DE}{CE} = \frac{DE}{34y}$$

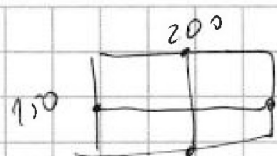


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

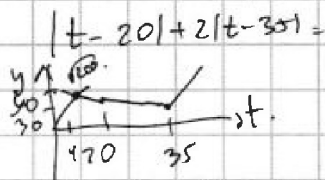
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a-b \equiv 1 \pmod{70}$$



$$(a-b) \div 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a+b^2 = 820$$

$$ab - ac - bc + c^2 = 820 p^2$$

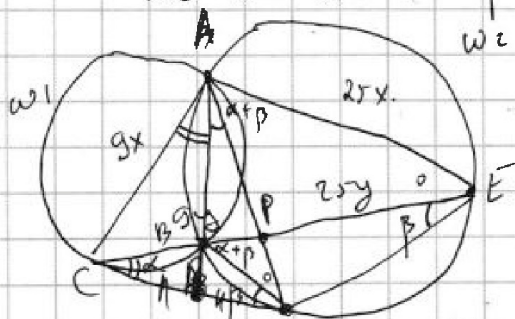
$$b(820 - b^2) \pmod{p^2}$$

$$820 - a \geq 0$$

$$a \leq 820$$

$$b \leq 819$$

$$ab - ac - bc + c^2 = p^2$$



$$\frac{CP}{PE} = \frac{9}{25}$$

$$E'ED = ?$$

$$CD = ?$$

$$\frac{9x}{\sin(p+10)} = \frac{10}{\sin(41p)} = 1$$

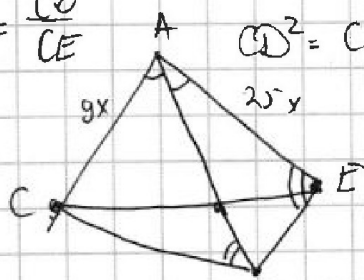
$$\frac{AD}{\sin(20+10)} = \frac{DE}{\sin(41p)}$$

$$\frac{DE}{10} = \frac{AD}{9x}$$

$$\frac{CD \cdot AD}{AE \cdot DE} =$$

$$\frac{BD}{DE} = \frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CE}$$

$$\frac{DE}{AB} =$$



$$CD^2 = CB \cdot 34y$$

$$\frac{9x}{AD} = \frac{CD}{DE} = \frac{10}{25x}$$



$$3+4+5+5+4+4+6$$

$$20+16+32$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$\leq 15$$

$$\frac{225}{209}$$

$$|x+1| \geq 0$$

$$3z \leq 5-x \leq 12$$

$$z \leq 4$$

$$x+1 \geq -6$$

$$-15 \leq z \leq 4$$

$$\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 5-x-3z \geq 0 \\ y-2x-x^2+z \geq 0 \\ 225-z^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x \geq -7$$

$$-x \leq 7$$

$$y \geq -z + (x+1)^2 - 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$17. \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$(y-2x) + 2(y-35) = \sqrt{225-2z}$$

$$\sqrt{-15 \leq z \leq 15}$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p. \quad \cos x \geq 1 \text{ км.}$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 + 6 \cos x - p = 0 \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 6 \cos x + 3 - p = 0$$

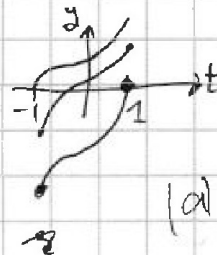
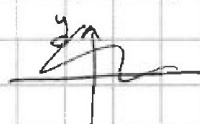
$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$$

$$f' = 12t^2 - 12t + 3 = (2\sqrt{3}t - \sqrt{3})^2 \geq 0$$

$$x \leq 5 - 3z$$



$$t = \frac{1}{2}$$



$$5 - 3z \geq -7$$

$$12 \geq 3z$$

$$z \leq 4$$

$$-4 - 6 - 3 + 3 - p = 0$$

$$p = -10$$

$$\begin{cases} -10 - p \leq 0 \\ -4 - p > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p > -10 \\ p < -4 \end{cases}$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\left(\sqrt[3]{4}t - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{4} = -3 \cdot 2 \sqrt[3]{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$3 \sqrt[3]{4}t \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\left(\sqrt[3]{4}t - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^3 =$$

$$= \sqrt[3]{4} \cdot 4t^3 - 3 \cdot \sqrt[3]{4}t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\left(\sqrt[3]{4}t - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^3 = 4t^3 - 6 \sqrt[3]{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}}t +$$

$$3 - \frac{1}{2}$$

$$3 \cdot \sqrt[3]{4}t \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\sqrt[3]{2^4} = 2 \sqrt[3]{2}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$4t^3 - 3 \cdot \sqrt[3]{4}t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\sqrt[3]{2^4}t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\text{B7 } \frac{c+7}{\sqrt[4]{c^9}} \cdot \sqrt[4]{c^9} = \sqrt{c} \cdot \sqrt{c+7} \cdot \sqrt{c} \quad \text{B6}$$