



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть разность прогрессии равна d . Тогда

$$\begin{cases} 6x + 18 + 2d = (x^2 - 4x)^2 \\ 6x + 18 + 6d = -3x^2 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на 3 и вычтем из него второе:

$$18x + 54 + 6d - 6x - 18 - 6d = 3(x^2 - 4x)^2 + 3x^2$$

$$3x^2(x-4)^2 + 3x^2 - 12x - 36 = 0$$

~~$$3x^2(x-4)^2 - 4$$~~

$$3x^2(x-4)^2 + 3x(x-4) - 36 = 0$$

Пусть $t = x(x-4)$, тогда

$$3t^2 + 3t - 36 = 0$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$\begin{cases} t = -4 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} = 2 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

Ответ: $2, \pm\sqrt{7} + 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

Сложим эти неравенства:

$$-14 \leq 7x - 7y \leq 14$$

$$-2 \leq x - y \leq 2$$

Теперь домножим второе неравенство системы на -1 и сложим с первым:

$$-14 \leq x + y \leq 14$$

~~$$-21 \leq \frac{21}{2}x + \frac{21}{2}y \leq 21$$~~

$$\begin{cases} -147 \leq \frac{21}{2}x + \frac{21}{2}y \leq 147 \\ -7 \leq \frac{7}{2}x - \frac{7}{2}y \leq 7 \end{cases}$$

Сложим эти неравенства

$$-154 \leq 14x + 7y \leq 154$$

Значит, минимальное значение равно -154.

~~Оно достигается, например, при $x = -1, y = 30$~~

Ответ: -154.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

I. Рассмотрим случай, когда $A = 13p^2$, а $B = 3q^2$:

$$\begin{cases} (m-n)^2 + 9(m-n) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases}$$

$$1) m-n : 3 \Leftrightarrow m-n+3 : 3 \Leftrightarrow m-n+9 : 3$$

Тогда $p = 3$, и $(m-n)(m-n+9) = 13 \cdot 9$.

Так как оба множителя в левой части делятся на 3, один из них равен 3, а другой $3 \cdot 13$, ~~либо~~ ~~один равен 1-а~~. Но они не делятся на 9, противоречие. Значит, $m-n \not\vdots 3$.

$$2) m-n \not\vdots 3 \Rightarrow mn : 3 \Rightarrow \begin{cases} m : 3 \\ n : 3 \end{cases}$$

Тогда либо $mn = 3q^2$, а $m-n+3 = 1$, либо $mn = 3q$, а $m-n = 9$, либо $mn = 13$, а $m-n = 9^2$.

Третий случай, очевидно, невозможен, первый делает отрицательной правую часть первого уравнения системы.

II. Если $A = 3q^2$, $B = 13p^2$, то

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

В первом уравнении один из множителей делится на 3, значит делится и другой. Но тогда $q = 3$, а уравнение $x(x+9) = 27$ не имеет решений в целых числах.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{AB}{AC}, \text{ откуда } AB = \frac{6 \cdot AC}{12} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\text{Ответ } YA = \frac{1}{2} AB = 3.$$

Т. косинусов для $\triangle AZY$:

$$9 = 16 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \angle ZYA$$

$$\cos \angle ZYA = -\frac{16}{24} = -\frac{2}{3}$$

Т. косинусов для $\triangle MYB$:

$$MB^2 = 64 + 225 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} =$$

$$= 289 - 160 = 129$$

$$BC = 2MB = 2\sqrt{129}$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{129}$$

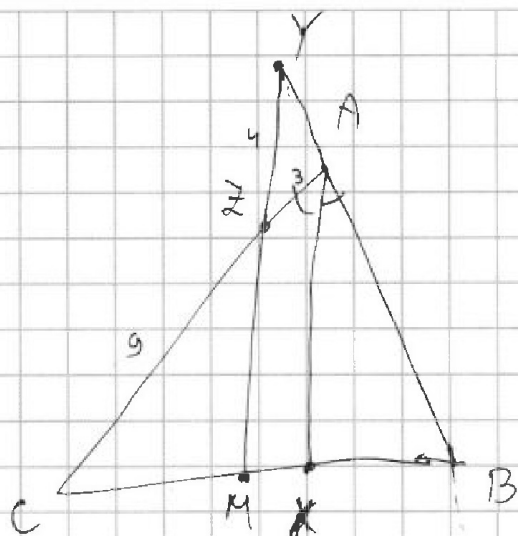


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Затем теорему Менелая для $\triangle ABC$ и прямой YM :

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YB} = 1$$

$$1 \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{AY}{YB} = 1$$

$$\left[\frac{AY}{YB} = \frac{1}{3} \right]$$

Теперь для $\triangle MYB$ и прямой AC :

$$\frac{AB}{AY} \cdot \frac{YM}{ZM} \cdot \frac{MC}{BC} = 1$$

$$\frac{AB}{AY} \cdot \frac{4}{2M} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$2M = 2 \cdot \frac{AB}{AY} = 2 \cdot \frac{YB - AY}{AY} = 2 \cdot \frac{YB}{AY} - 2 = 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

$$\frac{YB}{AB} = \frac{YB}{YB - AY} = 1 + \frac{YB}{AB} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{AB}{AY} = \frac{2M}{2} = 2, \text{ а значит } \triangle MYB \sim \triangle XAB \text{ (MY} \parallel \text{AX)}$$

с коэффициентом $\frac{3}{2}$. Тогда

$$\frac{BX}{CX} = \frac{BX}{CM + MX} = \frac{CM}{BX} + \frac{MX}{BX} = \frac{BM}{BX} + \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{10}{6}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\sqrt{x+6}=a$, $\sqrt{5-x}=b$. Тогда

$$\begin{cases} a-b+5-2ab=0 \\ a^2+b^2-11=0 \end{cases}$$

Сложим эти уравнения:

$$a-b+5+a^2+b^2-2ab-11=0$$

$$(a-b)^2+(a-b)-6=0$$

$$\begin{cases} a-b=2 \\ a-b=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x+6}-\sqrt{5-x}=-3 \\ \sqrt{x+6}-\sqrt{5-x}=-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{(x+6)(5-x)}=7 \\ 2\sqrt{(x+6)(5-x)}=2 \end{cases} \quad \begin{cases} 30-x^2-x=\frac{49}{4} \\ 30-x^2-x=1 \end{cases}$$

$$-x^2-x+\frac{71}{4}=0$$

$$-x^2-x+29=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{72}}{2}\cdot(-1)$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{117}}{2}$$

Нам подходит только те значения x , что лежат в промежутке $[0; 5]$.

Ответ: $\left(-\frac{1-\sqrt{72}}{2}, -\frac{1-\sqrt{72}}{2}\right), \left(-\frac{1-\sqrt{117}}{2}\right)$.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим второе уравнение системы. Его можно переписать так:

$$4x^4 + x + 5\sqrt{x} = 4y^4 + y + 5\sqrt{y}$$

Если функции $f(t) = 4t^4 + t + 5\sqrt{t}$, то уравнение имеет вид:

$$f(x) = f(y)$$

x и y неотрицательны, так как отрицательные числа не входят в область определения функции $\sqrt{t}$. Но $f(t)$ монотонно возрастает при положительных неотрицательных t , поскольку представляет собой сумму монотонно возрастающих функций. Поэтому $x = y$, иначе $f(t)$ принимает одно значение в двух точках, чего быть не может. Из первого уравнения:

~~$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)} \quad | +x-6+x+5$$~~
~~$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x}$$~~

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего способов из 100 точек выбрать две —
 $C_{100}^2 = \frac{100 \cdot 99}{2}$. Но таким образом мы некоторые раскраски, которые считаем уникальными, посчитали дважды (те, в которых две выбранные точки симметричны относительно центра) или четырежды (все остальные). Всего раскрасок, которые посчитали дважды, —

При этом мы посчитали дважды те раскраски, в которых выбранные точки симметричны относительно центра квадрата, остальные — четырежды. При этом для каждой точки найдется симметричная ей, а значит всего раскрасок, которые мы посчитали дважды столько же, сколько и пар точек, 50. Тогда поделив C_{100}^2 на 4, нужно добавить $2 \cdot 50$. Значит, ответ:

$$\frac{C_{100}^2 - 50}{4} + \frac{50}{2} = \frac{C_{100}^2 - 50}{4} + 25$$

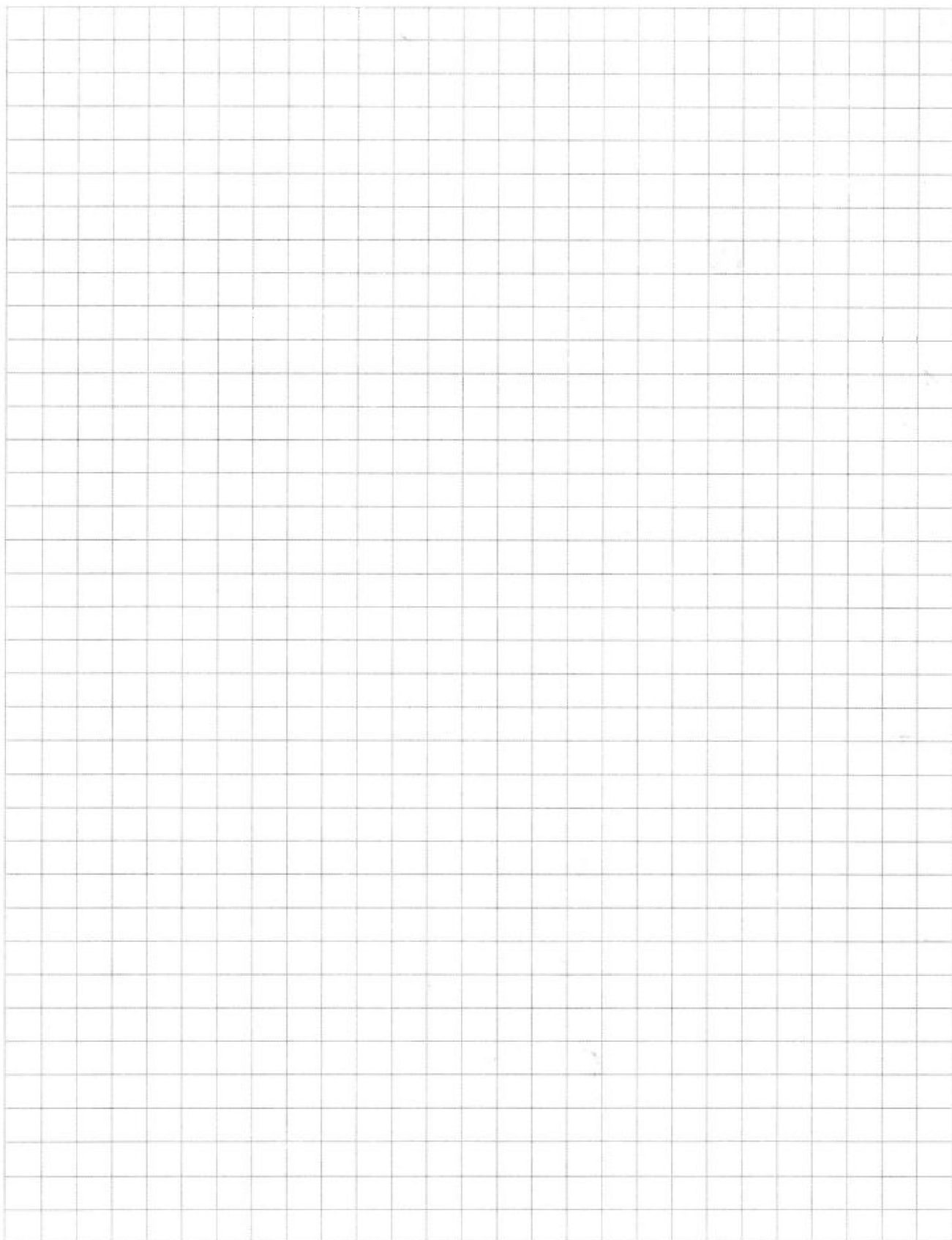


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 = 1 + 71 = 72$$

$$2 = 1 + 116 = 117$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

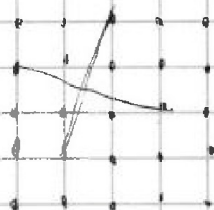
$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16 \quad -6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$x = \frac{4+y}{2} = 8$$

$$D = 16 + 4 \cdot 3 = 28$$

$$-8 \leq 3x - 4y \leq 8$$

$$-14 \leq 7x - 7y \leq 14$$



$$m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = 13p^2$$

$$(m-n)^2 + 9(m-n) = 13p^2 \quad -14 \leq x + y \leq 14$$

$$(m-n)(m-n+9) = 13p^2$$

$$4x - 3y + k(3x - 4y) =$$

$$\frac{AB}{AY} = 3 = \frac{12}{4}$$

$$m^2n - mn^2 + 3mn = 3p^2$$

$$mn(m-n+3) = 3p^2$$

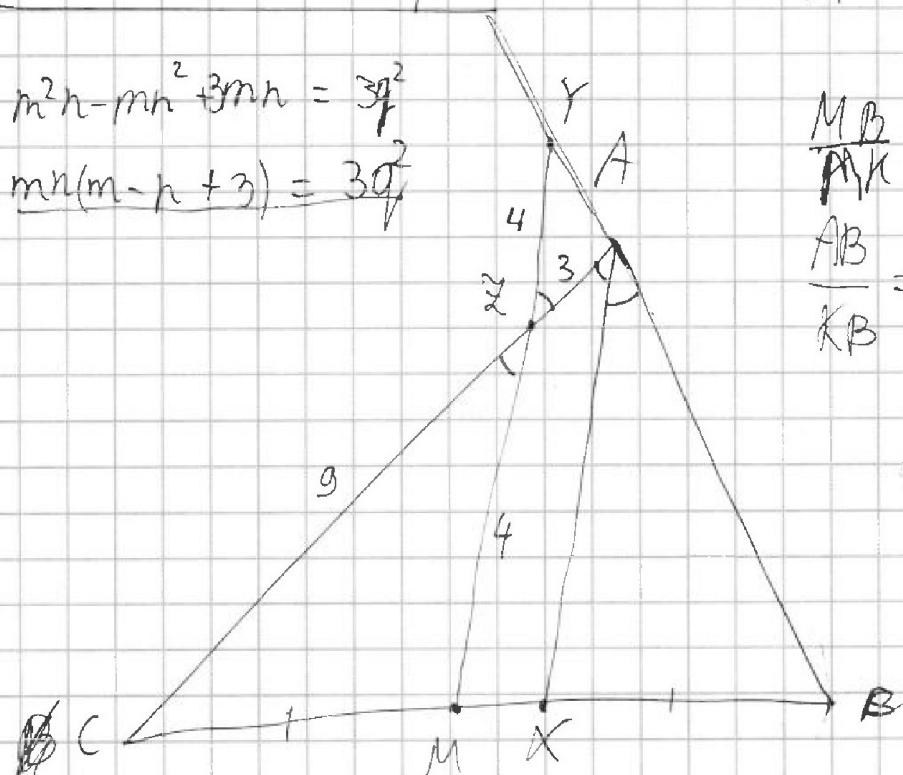
$$\frac{MB}{AK} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{21}{14} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{AB}{KB} = \frac{12}{6}$$

$$\frac{21}{7} = \frac{3}{1}$$

$$7 \cdot 2$$



$$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{YA}{AB} = 1$$

$$\frac{AB}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{CM}{CB} = 1$$

$$3 \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{YZ}{ZM} = \frac{2}{3}$$

