



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть q — знаменатель прогрессии

тогда $q^8 \sqrt{uv} = \sqrt{\frac{u}{v^3}}$, где $u = 25x + 34$
 $v = 3x + 2$

Если, пусть $u \neq 0$, иначе 10-ый член = 0 и
всё прогрессии состоит из 0, в частности
 $2-x=0 \Leftrightarrow 2=x \Rightarrow$ 10-ый член $\neq 0$

Значит $q^8 = \sqrt{\frac{1}{v^4}} = \frac{1}{v^2}$

$q^2 = \frac{1}{\sqrt{uv}}$

$q^2 \sqrt{uv} = 2-x$

$\sqrt{\frac{u}{v}}$

два случая:
(ввиду $v \neq 0$: см. оп3)

1) $v = 3x + 2 > 0$

$x > -\frac{2}{3} > -1 > -\frac{34}{25}$

$25x + 34 = u > 0$

$\sqrt{\frac{u}{v}} = \sqrt{u} = 2-x$

$u = (2-x)^2 = 4 - 2x + x^2$

$25x + 34$

$x^2 - 27x - 30 = 0$

$x = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot (-30)}}{2}$

$\frac{27 \pm \sqrt{729 + 120}}{2}$

$\frac{27 \pm \sqrt{849}}{2}$

ответ: $\frac{27 + \sqrt{849}}{2}$
 $\frac{-23 + \sqrt{377}}{2}$

$\frac{27 - \sqrt{849}}{2} < -\frac{2}{3}$, т.е.
 $27 + \frac{4}{3} < 29 = \sqrt{849} < 28$
 $27 + \frac{4}{3} < 29 = \sqrt{849} < 28$

Следовательно рассматриваем только значения $x < -\frac{2}{3}$

2) $v = 3x + 2 < 0$, но $\frac{u}{v} > 0$

значит $u < 0$ (такое невозможно, почему $u \neq 0$)

$\sqrt{u} = 2-x$

$-u = 4 - 2x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 23x + 38 = 0$
 $-25x - 34$

$x = \frac{-23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 38}}{2}$

$= \frac{-23 \pm \sqrt{529 - 152}}{2} = \frac{-23 \pm \sqrt{377}}{2}$

$\frac{-23 + \sqrt{377}}{2} < -\frac{34}{25}$
 $23 - \frac{68}{25} > 20 = \sqrt{400} > \sqrt{377}$

подходит

$\frac{-23 - \sqrt{377}}{2} < -\frac{34}{25}$

подходит



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- 3] Используя формулы косинуса 3-го и 2-го углов, перепишем данное равенство в следующем виде:
- $$(4p \cos^3 x - 3p \cos x) + (12 \cos^2 x - 6) + (3p \cos x + 4 \cos x) + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

Сокращая на 4 и делая замену $t = \cos x$, получим:

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t+1)^3 = 0$$

$$(p-1)t^3 = -(t+1)^3$$

$$\sqrt[3]{p-1}t = -t-1$$

$$t(1 + \sqrt[3]{p-1}) = -1$$

$$t = \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} = \cos x \in [-1; 1]$$

Если $1 + \sqrt[3]{p-1} = 0$, то $t \cdot 0 = -1$: противоречие

Значит $t = \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$ но $t = \cos x \in [-1; 1]$
 $t \neq 0$ (учитывая $t \neq 0$)

$$-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \in [-1; 1] \setminus \{0\}$$

$$1 + \sqrt[3]{p-1} \in [-1; 1] \setminus \{0\} \quad (p \neq 1)$$

$$1 + \sqrt[3]{p-1} \in [-1; 1] \setminus \{0\} \quad (p \neq 1)$$

$$\sqrt[3]{p-1} \in [-2; 0] \setminus \{-1\}$$

$$p-1 \in [-8; 0] \setminus \{-1\}$$

$$p \in [-7; 1] \setminus \{0\}$$

при всех p из этого множества:

$$\cos x = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \in [-1; 1] \setminus \{0\}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi n$$

ответ: $p \in [-7; 0) \cup (0; 1]$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi n$$

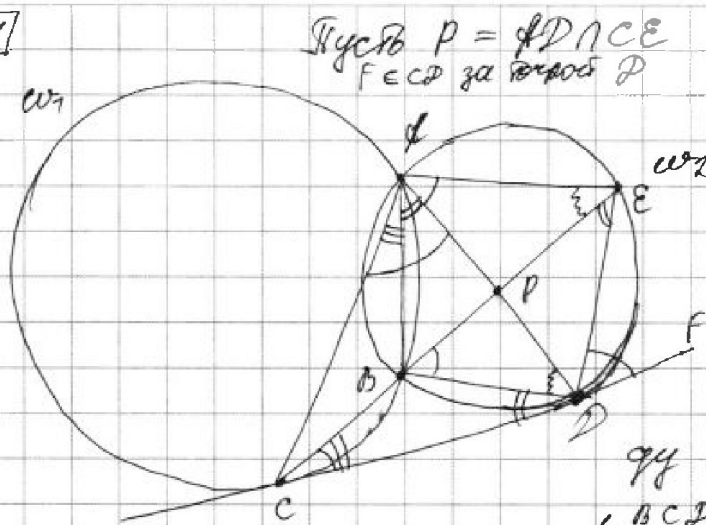
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4



$$\frac{CP}{PE} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{ED}{CD} = ?$$

Давайте посчитаем углы:

По теореме об угле между хордой и касательной:

$$\begin{aligned}\angle BCD &= \angle CFB \\ \angle BDC &= \angle BFD \\ \angle EDF &= \angle EFD\end{aligned}$$

Поскольку дуги вписанные, опирающиеся на одну хорду, равны:

$$\begin{aligned}\angle EFD &= \angle EBD \\ \angle FEB &= \angle FDB \text{ и } \angle BFD = \angle BED\end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \angle EFD = \angle EBD = \angle CDB + \angle BDC = \angle CFB + \angle BFD$$

$$\angle EFD = \angle CFB$$

$$\text{И ещё, } \left. \begin{aligned}\angle CDB &= \angle BFD = \angle BED \\ \angle BFD &= \angle BED\end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle CFB = \angle FED$$

$$\Rightarrow \triangle CFB \sim \triangle FED \text{ (по двум углам)}$$

$$\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{S_{FED}}{S_{FDB}}}$$

$$\text{Пусть } S_{FDB} = 7x, \text{ тогда } S_{FED} = 20x, \text{ т.к. } \frac{CP}{PE} = \frac{7}{20}$$

$$\text{Аналогично } S_{FDB} = 7y \Rightarrow S_{FED} = 20y$$

$$\text{Значит } \frac{S_{FED}}{S_{FDB}} = \frac{S_{FED} + S_{FDB}}{S_{FDB} + S_{FDB}} = \frac{20x + 20y}{7x + 7y} = \frac{20}{7}$$

$$\text{Итак, } \frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}} = \frac{2\sqrt{35}}{7}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{35}}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5 Пусть P_v, P_H, P_c — множества всех раскрасок, обладающие вертикальной, горизонтальной и центральной симметриями соответственно

По формуле включения — исключения:

$$|P_v \cup P_H \cup P_c| = |P_v| + |P_H| + |P_c| - |P_v \cap P_H| - |P_H \cap P_c| - |P_v \cap P_c| + |P_v \cap P_H \cap P_c|$$

$|P_v| = C_{250 \cdot 120}^4$ (раскраска определяется 4 клетками в левой части однозначно)

аналогично $|P_H| = C_{500 \cdot 60}^4 = C_{250 \cdot 120}^4$
(и клетки сверху)

$|P_c| = C_{250 \cdot 120}^2$ (определяется однозначно 4 клетками слева)

$|P_v \cap P_H| = C_{250 \cdot 60}^2$ (окр. 2 клетками в одной четверти)

$|P_H \cap P_c| = C_{250 \cdot 60}^2$ (аналогично)

$|P_v \cap P_c| = C_{250 \cdot 60}^2$ (аналогично)

$|P_v \cap P_H \cap P_c| = C_{250 \cdot 60}^2$ (аналогично)

Тогда число раск-во $= 3 C_{250 \cdot 120}^4 - 3 C_{250 \cdot 60}^2$

ответ: $3 C_{30000}^4 - 3 C_{15000}^2$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

[6] $a < b$, $3 + b - a$, $(a-c)(b-c) = p^2$, $a^2 + b = 1000$
(p - простое)

$b > a \Leftrightarrow b - c > a - c$

Значит, ввиду того, что $a-c, b-c \in \mathbb{Z}$, возможны два случая:

1) $b-c = p^2$
 $a-c = 1$

2) $b-c = -1$
 $a-c = -p^2$

(остальные случаи
противоречат кер-ву
выше)

Разберём их отдельно:

1) $\begin{cases} b-c = p^2 \\ a-c = 1 \end{cases} \Rightarrow b-a = (b-c) - (a-c) \div 3$

то это выражение $= p^2 - 1$

Если $p \neq 3$, то $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ (по малой теореме Ферма)
противоречие

Значит $p = 3$

Итак, подставляя все и только те тройки (a, b, c) ,
для которых удовлетворяют

$\begin{cases} a = c + 1, \\ b = c + 9, \\ a^2 + b = 1000, \end{cases}$ в зад.

Решим систему:

$b = c + 9 = (a - 1) + 9 = a + 8$

$a^2 + b = a^2 + a + 8 = 1000$

$a^2 + a = 992$

$a(a+1)$

$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 992}}{2}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{4000 - 3}}{2} =$
 $= \frac{-1 \pm \sqrt{3997}}{2}$

Если $\sqrt{3997} \in \mathbb{N}$, тогда это
чётно и $-1 \pm \sqrt{3997} \div 2$

$a \in \mathbb{Z}$

Иначе $a \notin \mathbb{Z}$
Итак, решений нет

$a = \frac{-1 \pm \sqrt{4000 - 3}}{2} = 31 \text{ или } -32$
 $b = 39 \text{ или } -24$
 $c = 30 \text{ или } -23$

не входят в зад.

2) Рассматривается
аналогично: ($p=3$)
(Противоречие)

$\begin{cases} a = c - 9 \\ b = c - 1 \\ a^2 + b = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c - 9 \\ b = c - 1 = (a + 9) - 1 \end{cases}$

$a^2 + a + 8 = 1000$

$a = 31 \text{ или } -32$

$b = 39 \text{ или } -24$

$c = 40 \text{ или } -23$

Ответ: $(31, 39, 40), (31, 39, 30),$
 $(-32, -24, -33), (-32, -24, -23)$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

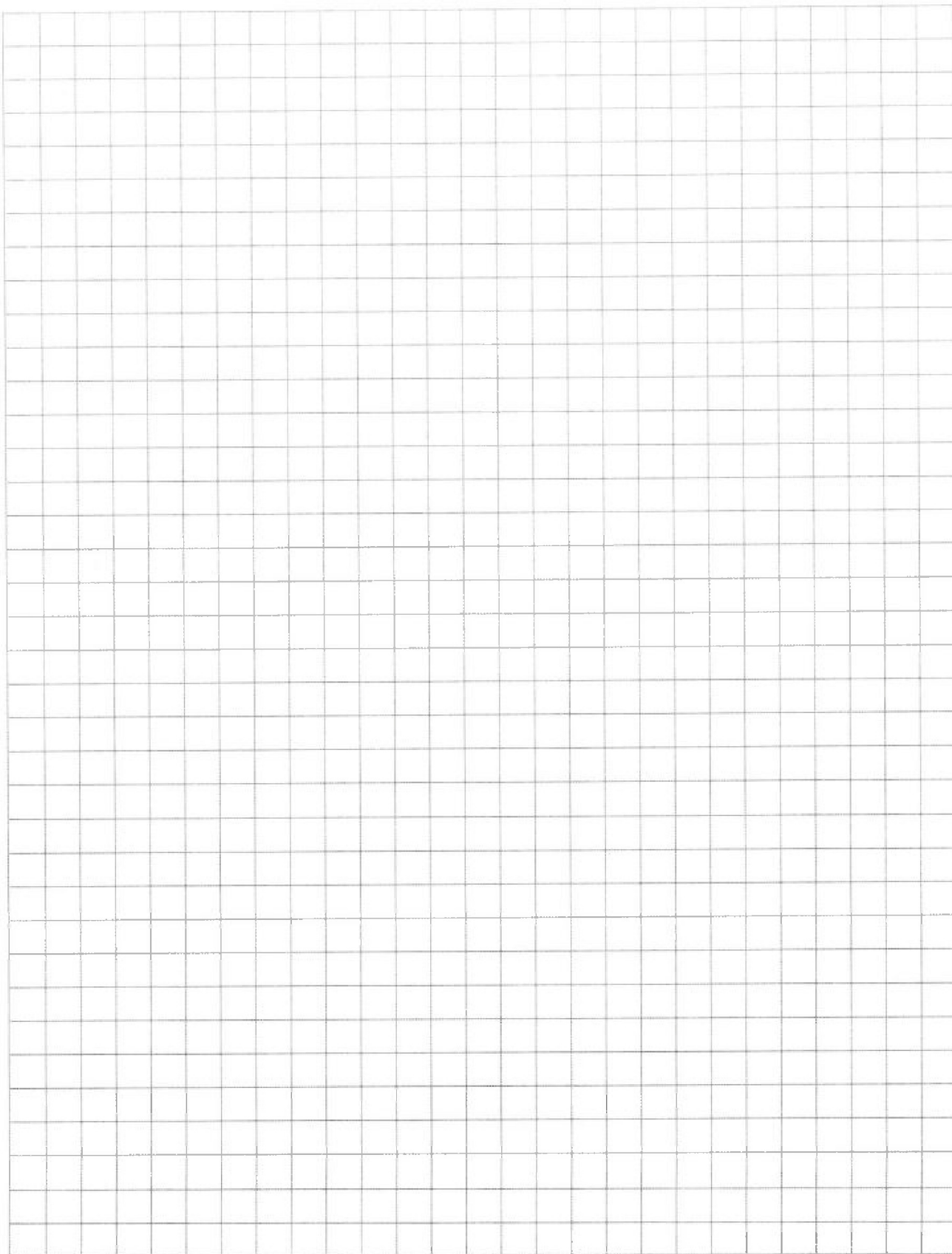
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

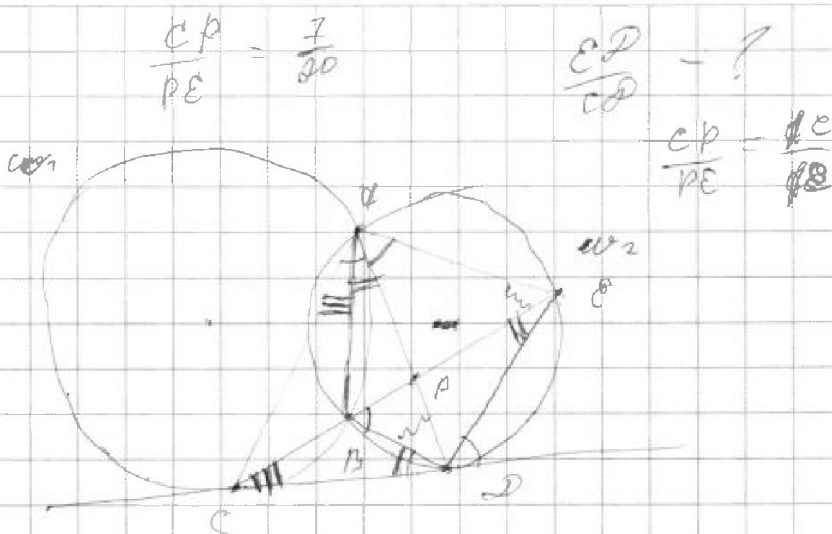
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

R
P₁
P₂

$$\begin{aligned} 250 \cdot 60 \\ \parallel \\ 25 \cdot 6 \cdot 100 \\ \parallel \\ 150 \cdot 100 \\ \parallel \\ 15000 \end{aligned}$$



$$\cos 3x$$

$$\cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$(2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x \sin^2 x$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^3 x - 6 \cos x +$$

$$+ 3p \cos x + 12 \cos x + 0 = 0$$

$$\cos x = t$$

$$4p t^3 + 12 \cos^3 x + 12 \cos x$$

$$4p t^3 + 12 t^2 +$$

$$+ 12 t + 4 = 0$$

$$p t^3 + 3 t^2 + 3 t + 1 = 0$$

$$(p-1) t^3 + (6+t)^2 = 0$$

$$\sqrt[p-1]{t} = -t - 1$$

$$\sqrt[p-1]{t} = -1 - \frac{1}{t}$$

$$p-1 \in [-8, 0]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$q^2 - \sqrt{25x + 34} \cdot (3x + 2)^{-1} = 2 - x$$

$$q^2 (2 - x) = \sqrt{25x + 34} \cdot (3x + 2)^{-1}$$

$$q^2 \sqrt{25x + 34} \cdot (3x + 2)^{-1}$$

Черновик

$$25x + 34 = 2$$

$$34 + 2 = 2$$

$$q^2 - \sqrt{25x + 34} \cdot (3x + 2)^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$q^2 = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$q^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad q^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{25x + 34} \cdot (3x + 2)^{-1} = 2 - x$$

$$\sqrt{\frac{25x + 34}{3(3x + 2)}} = 2 - x$$

$$\sqrt{25x + 34} \cdot (3x + 2)^{-1} = 2 - x \Rightarrow \sqrt{25x + 34} = (2 - x)(3x + 2)$$

$$\sqrt{25x + 34} = 2 - x$$

$$25x + 34 > 0$$

$$x > -\frac{34}{25} > -1 > -2$$

$$\begin{array}{r} \times 27 \\ 189 \\ + 54 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 28 \\ 216 \\ + 56 \\ \hline 776 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ 261 \\ + 58 \\ \hline 841 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ 261 \\ + 58 \\ \hline 841 \end{array}$$

a, b, c : $a < b$
 $3 + b - a$
 $(a - c)(b - c) = p^2$
 $a^2 + b = 100$

$$(b - c) - (a - c) \div 3$$

$$3968 \div 5, 100 > 25$$

$$3968 = 3 \cdot 100 + 468$$

$$9 \cdot 213$$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 31 \\ + 93 \\ \hline 951 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 32 \\ + 64 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 63 \\ 63 \\ + 189 \\ \hline 328 \end{array}$$

i) $a - c = 1$ ii) $a - c = p^2$
 $b - c = p^2$ $b - c = 1$

$$b > a$$

$$b - c > a - c$$

i) $a - c = 1$
 $b - c = p^2$
 $b - a = p^2 - 1$
 $p = 3$

$$\begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + 9 \\ a^2 + b = 1000 \end{cases}$$

ii) $a - c = -p^2$
 $b - c = -1$
 $b - a = p^2 - 1$
 $p = 3$

$$\begin{cases} a = c - 9 \\ b = c - 1 \\ a^2 + b = 1000 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

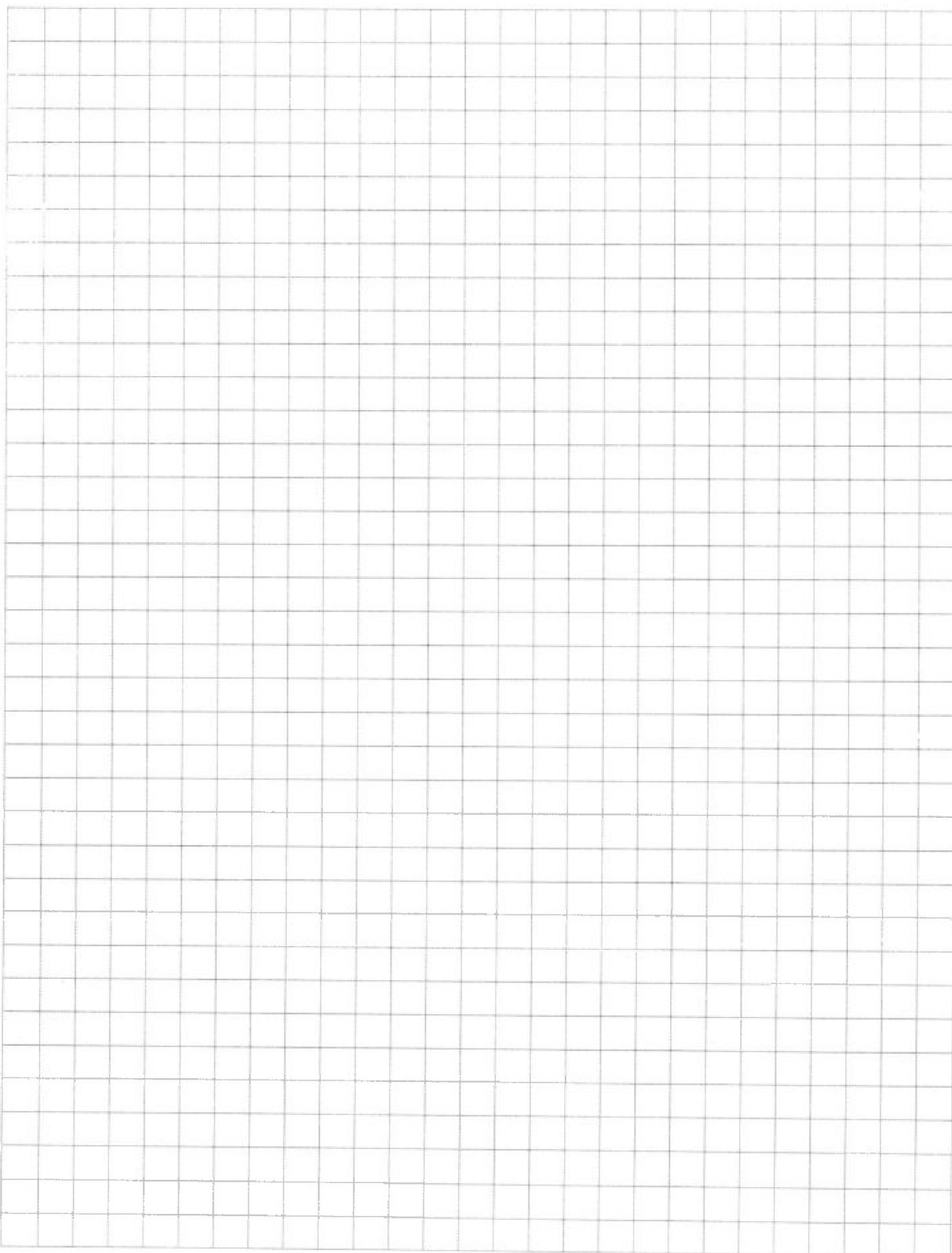
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

