



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

111

$\{a_n\}$ - геом. прогр. с четн. q

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = a_{10}$$

$$2-x = a_{12}$$

$$\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = a_{18}$$

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = q^8 = \frac{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)^3}} = \frac{1}{(3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

Заметим $q^2 > 0 \Rightarrow 2-x > 0 \Rightarrow x < 2$

Также $x \neq -\frac{34}{25}$ и $x \neq -\frac{2}{3}$, т.к. иначе $a_{10} = 0$, что невозможно
 $\Rightarrow 0$, а $2-x \neq a_{12} \neq 0$, что невозможно

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = q^8 = \frac{\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = \frac{1}{(3x+2)^2} \quad q^2 = \sqrt[4]{\frac{1}{(3x+2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}}$$

① $x > -\frac{2}{3} \Rightarrow x > -\frac{2}{3}$

$$q^2 = \frac{1}{\sqrt{3x+2}} \quad a_{12} = a_{10} \cdot q^2 = \sqrt{25x+34} = 2-x$$

② $x < -\frac{2}{3} \Rightarrow x < -\frac{2}{3}$

$$a_{12} = a_{10} \cdot q^2 = \sqrt{-25x-34} = 2-x$$

$$x^2 - 4x + 4 = -25x - 34$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$(x+19)(x+2) = 0$$

$$25x+34 = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x-30)(x+1) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 30 \\ x \leq 2 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 19 \\ \hline 225 \\ 25 \\ \hline 475 \\ - 34 \\ \hline 441 = 21^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times 28 \\ \hline 200 \\ 56 \\ \hline 700 \end{array}$$

Ответ: $\{-2; -19\}$

$$\begin{cases} x = -19 \\ x = -2 \\ x \leq 2 \\ x < -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{array}{l} -34 \\ -25 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 4 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} & (1) \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

Заметим из зам. с. 1 $|y+2| + |y-18| \geq 20$
Также $|y-18| \geq 0$ и $\sqrt{400-z^2} \leq 20$

Получается:

$$\begin{cases} z=0 \\ y=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=4 \\ c=2,5 \\ ab=4 & (2) \\ ab=2,5 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ a-b=1 \\ ab=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=\sqrt{17} \\ b-a=1 \\ a+b=\sqrt{17} \end{cases}$$

$$x+6=$$

$$(1) \sqrt{x+6}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$a+b=4$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{18-3x-x^2} - 4$$

$$a-b=1$$

$$\begin{cases} a-b+4=2ab \\ a^2+b^2=9 \end{cases}$$

$$a^2+b^2-2ab=4a^2b^2-28ab+49$$

$$9-2c=4c^2-28c+49 \quad c=ab$$

$$4c^2-32c+40=0$$

$$2c^2-16c+20=0$$

$$(2c-5)(c-4)=0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) \sqrt{18-3x-x^2} = 4$$

$$18-3x-x^2=16$$

$$x^2+3x-2=0$$

$$D=9+8=17$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}; 18; 0 \right) \right\} \quad \begin{matrix} x > -6 \\ x < 3 \end{matrix} \quad \checkmark$$

Замечаем, что $x+6$ и $3-x$ ~~никогда~~ не могут быть одновременно $\leq 0 \Rightarrow$ не требуется совств. проверка корней.

$$(3) \sqrt{18-3x-x^2} = 5$$

$$18-3x-x^2=25$$

$$x^2+3x-4=0$$

$$D=9+16=25$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{4}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos 3x + p \cos x =$$

$$12 \cos^3 x - 12 \cos x + 4 = -p(\cos 3x + 3 \cos x)$$

$$3(2 \cos x + 1)^2 + 1 = -p(\cos 3x + 3 \cos x)$$

$$3(2 \cos x + 1)^2 + 1 = -p \cdot 4 \cos^3 x$$

$$3 \cos^3 x + 12 \cos x + 1 = -p \cdot 4 \cos^3 x$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^3 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$p-1 = -\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

$$\Rightarrow p \neq 0, \text{ при } p \neq 0$$

$$-15 \frac{1}{\sqrt{1-p}-1} \leq 1$$

$$\textcircled{1} 1 \sqrt[3]{1-p}-1 \neq 0 \geq 1$$

$$2 \sqrt[3]{1-p} \geq 2$$

$$1-p \geq 8$$

$$p \leq -7$$

$$\text{Answer: } p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

$$x \in \left\{ \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1-p}-1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right\} \textcircled{2} \sqrt[3]{1-p}-1 \leq -1$$

$$\sqrt[3]{1-p} \leq 0$$

$$1-p \leq 0$$

$$1 \leq p$$

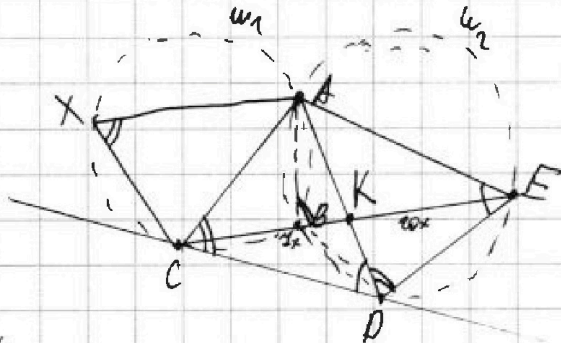
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14



$$\frac{CD^2}{CB \cdot CE} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow CD = \frac{CE \cdot x}{y} = \frac{35 \cdot 4}{20} = 7$$

Пусть точка X на дуге AC не содержит B , тогда
 $\angle ACD = \frac{1}{2} \angle ABC = \angle CXA = 180^\circ - \angle ABC = \angle ABE = \frac{1}{2} \angle A\hat{E} = \angle ADE$

$$\angle ADC = \frac{1}{2} \angle A\hat{D} = \angle AED \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ADE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CAD = \angle DAE \Rightarrow AK - \text{биссектриса } \angle CAE \Rightarrow AC : AE = 4 : 20$$

Пусть $AC = 4a$, тогда $AE = 20a$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD^2 = AC \cdot AE = 140a \Rightarrow AD = 2\sqrt{35}a$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{20a}{2\sqrt{35}a} = \frac{10}{\sqrt{35}} = \frac{10\sqrt{35}}{35} = \frac{2\sqrt{35}}{7}$$

Ответ: $ED : CD = \frac{2\sqrt{35}}{7}$

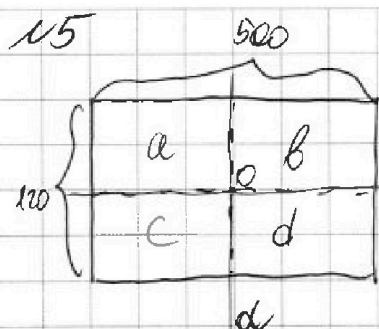


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



разделим п/у на 4 области - a, b, c, d
по $250 \cdot 60 \text{ кв. м} = 15000 \text{ кв. м}$ в каждой

Заметим, что средние линии п/у не содержат кл. р. к. $500:2$ и $120:2$

① п/у имеет симметрию отн. d, тогда мы можем расставить 4 клетки в ΔOAC и однозначно определим оставшиеся из симметрии. - таких спос. - C_{30000}^4

② п/у имеет симм. отн. b. - аналог. ④ - C_{30000}^4 спос.

③ п/у имеет симметрию отн. O, тогда ΔOAC и ΔOBD однозначно определим Δ и по e однозначно определим b $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ расставив 4 клетки в ΔOAC мы однозначно получим способ расстановки $\Rightarrow C_{30000}^4$ спос.

④ Заметим, что если у п/у есть две из трех симметрий отн. осей и 3-я (пусть O - (0,0), координаты точек не равны 0), то

$-1/2 \ 1/2 \ 2/2$
 $-1/2 \ 1/2 \ 2/2$

① d и b $\Delta OAC (x_0, y_0) \Rightarrow$ есть $(-x_0, y_0)$
симметрия

② d и O $\Delta OAC (x_0, y_0) \Rightarrow$ есть $(0, -y_0)$
 $\Delta OAC (x_0, y_0) \Rightarrow$ есть $(x_0, 0)$
 $\Rightarrow$ есть b

③ аналог.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решение~~

Таким образом, если мы расставим все в 2 клетки, мы однозначно восстановим остальные $\Rightarrow$ таких способов.

C_{15000}^2

Заметим, что каждый из (1) мы можем 3-мя в

(1), (2) и (3) $\Rightarrow$ Ответ: $3 \cdot C_{30000}^4 - 2 \cdot C_{15000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16

$$a < b$$

$$b - a \neq 3$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$(a - c)(b - c) = p^2, p - \text{простое}$$

II $p = 3$, тогда

$$(a - c)(b - c) = 9$$

$$a \neq b \Rightarrow a - c \neq b - c$$

$$b > a \Rightarrow b - c > a - c$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 9 \text{ (1)} \\ -9 & -1 \text{ (2)} \end{array}$$

$$\text{(1)} \quad a = c + 1 \quad b = c + 9$$

$$c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 1000$$

$$c^2 + 3c - 990 = 0$$

$$(c - 30)(c + 33) = 0$$

$$\begin{cases} a = 31 \\ b = 39 \\ c = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -33 \end{cases}$$

$$\text{(4)} \quad p \neq 3, \text{ тогда } p^2 \neq 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a - c) \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ и } (b - c) \not\equiv 0 \pmod{3}, \text{ раз } (b - a) \equiv 0 \pmod{3}$$

b и a имеют разные остатки

деления на 3 $\Rightarrow (b - c)$ и $(a - c)$ имеют разные, а т.к. ни один из них $\neq 0$, то один из них $\equiv 2$, а второй $\equiv 1 \Rightarrow$

$$(a - c)(b - c) \equiv 2 \pmod{3}, \text{ заметим, что}$$

квадраты целых чисел могут

иметь только ост. $\equiv 0$ или $\equiv 1 \pmod{3}$

$$(3k)^2 = 9k^2 \equiv 0$$

$$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1$$

$$(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1$$

т.е. такое невозможно

$$\text{(2)} \quad a = c - 9 \quad b = c - 1$$

$$c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000$$

$$c^2 - 17c - 910 = 0$$

$$\begin{aligned} 910 &= 46 \cdot 10 + 10 \\ &= 23 \cdot 40 \end{aligned}$$

$$(c - 40)(c + 23) = 0$$

$$\begin{cases} a = 31 \\ b = 39 \\ c = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -23 \end{cases}$$

Ответ: $\{(31, 39, 30); (-32, -24, -33); (31, 39, 40); (-32, -24, -23)\}$



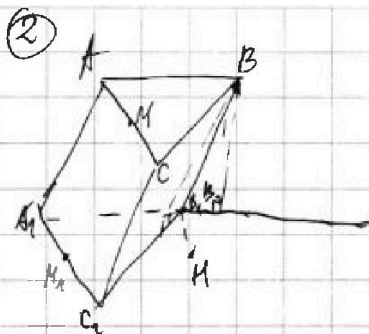
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



тогда $B_1H \parallel A_1C_1$ и плоск $BB_1H \perp ABC$
 ~~$h = \frac{1}{2} \sqrt{16 - 4} = \frac{1}{2} \sqrt{12} = \sqrt{3}$~~ тогда $B_1H \perp B_1M$ и $B_1M \perp BM \Rightarrow$
 ~~$B_1M \perp$~~
 $B_1H \parallel A_1C_1, AA_1 \parallel BB_1 \Rightarrow AA_1C_1C \parallel \alpha \Rightarrow AA_1C_1C \perp ABC \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ высота $AA_1C_1C = h = BH$ ~~т.к. $\perp A_1C_1, \perp A_1B_1$~~
 $\Rightarrow$ расст. между // прямыми

$$\text{Пусть } \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 4 \quad h = \frac{5}{a} \quad a = \sqrt{\frac{16}{\sqrt{3}}} = 4\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}$$

$$V_{\text{пр.}} = S_{ABC} \cdot h = 4 \cdot \frac{5}{a} = \frac{20}{a} = \frac{5}{\frac{1}{4\sqrt{3}}} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: $V_{\text{пр.}} = 5\sqrt{3}$