



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① Пусть же конкретное  $x$  такая прогрессия существует.

$$\text{Получе: } b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = b \cdot q^9$$

$$b_{12} = 2 - x = b \cdot q^{11}$$

$$b_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = b \cdot q^{17}$$

$$1) b \cdot q^9 \geq 0 \Rightarrow b \cdot q^{11} = b \cdot q^9 \cdot q^2 \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 - x \geq 0 \quad x \leq 2.$$

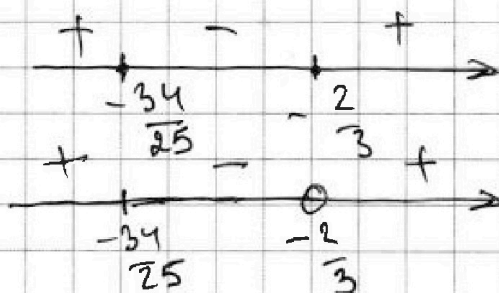
ОАБ:

2) ~~Т.к.  $x \leq 2$  то  $3x+2 \geq 0$~~

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \geq 0$$

$$3x+2 \neq 0$$



$$x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

$$\text{Если } x \leq 2: b_i = 0 \Rightarrow \forall i: b_i = 0$$

$$\text{но где } x = 2 \text{ но где } b_{10} \neq 0 \Rightarrow \forall i: b_i \neq 0$$

$$\frac{b_{18}}{b_{10}} = q^8 = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$\frac{q^{12}}{q^9} = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$$

~~Прогрессия~~ →





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

①. Найдите!!!

~~Умножить 2 выражения ибб в знаменателе~~  
 ~~$y^2 = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$  ибб  $y^2 = \frac{1}{\sqrt{5x+21}}$~~

~~Уг ОА 3: ибб  $x > -\frac{2}{3}$~~   
~~ибб  $x \leq -\frac{34}{25}$~~

~~и  $x > -\frac{2}{3}$ , ибб в знаменателе~~

~~$y^2 = \frac{1}{\sqrt{3x+21}}$~~

$b(2) = 2 - x = \sqrt{25x+34} \cdot \sqrt{3x+21} - y^2 =$   
 $= \sqrt{25x+34}$  т.к.

$\frac{(25x+34)(3x+21)}{|3x+21|} = (25+34) \cdot \text{не знак } (3x+21) \Rightarrow$

$\Rightarrow$  System must not have sign

что и по этому, но еще  $\geq 0$

$(2-x)^2 = |25x+34|$  1)  $x > -\frac{34}{25}$

$x^2 - 4x + 4 = 25x + 34$

$x^2 - 29x - 3020$   $\boxed{x = -1; 3020}$

2)  $x \leq -\frac{34}{25}$

$x^2 - 4x + 4 = -25x - 34$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.  $x^2 + 21x + 38 = 0$

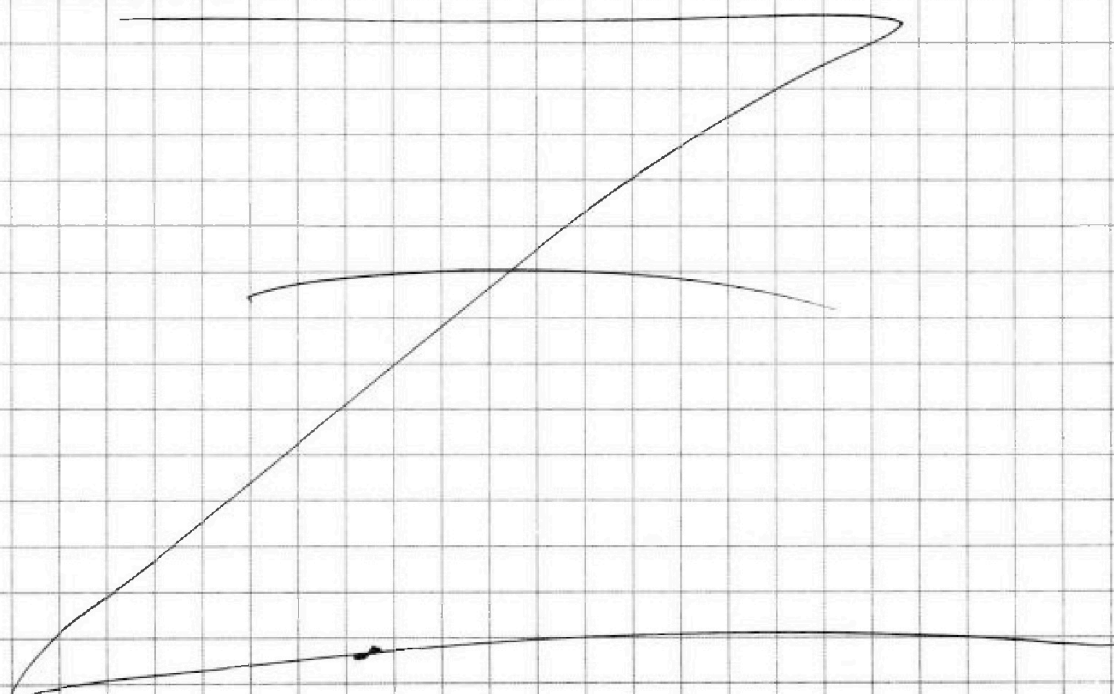
$$x = \frac{-21 \pm \sqrt{441 - 152}}{2} = \frac{-21 \pm \sqrt{289}}{2} =$$

$$= \frac{-21 \pm 17}{2} = -2; -19 \leq -\frac{34}{25}$$

И тогда получаем только  $x \in \{-1; 30; -2; -19\}$

При этом же контроле ч)  
ни  $x$   $\exists$  такое решение.

Ответ:  $-19; -2; -1; 30$







1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \quad p: \quad p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\underline{4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3(p+4) \cos x + 10 = 0}$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$(\cos x + 1)^3 = \cancel{p-1} (1-p) \cos^3 x$$

$$(\cos x + 1)^3 = (\sqrt[3]{1-p} \cos x)^3$$

$$\cos x + 1 = \sqrt[3]{1-p} \cos x$$

$$\cos x (\sqrt[3]{1-p} - 1) = 1$$

$$1) \quad p = 0 \quad \cos x \cdot 0 = 1 \quad x \in \emptyset$$

$$2) \quad p \neq 0 \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$$

$$3) \quad -1 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 1$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \geq -1 \end{cases}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Фигурирует!!!

$$1) \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 1$$

$$\frac{1 - \sqrt[3]{1-p}}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 0$$

$$\frac{2 - \sqrt[3]{1-p}}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 0$$

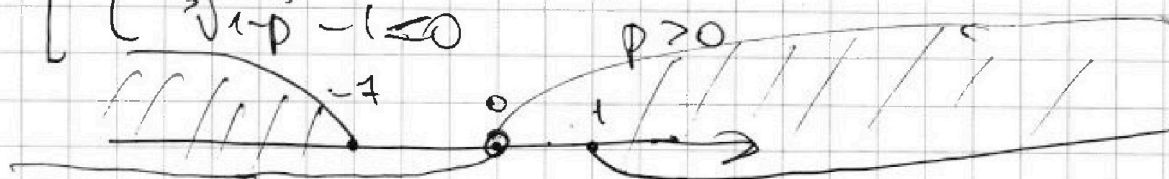
$$\left[ \begin{cases} 2 - \sqrt[3]{1-p} \geq 0 & 1-p \leq 8 & p \geq -7 \\ \sqrt[3]{1-p} - 1 < 0 & 1-p < 1 & \boxed{p > 0} \\ 2 - \sqrt[3]{1-p} \leq 0 & \boxed{p \leq -7} \\ \sqrt[3]{1-p} - 1 > 0 & \boxed{p < 0} \end{cases} \right.$$

$$2) \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \geq -1$$

$$\frac{1 + \sqrt[3]{1-p}}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \geq 0$$

$$\frac{\sqrt[3]{1-p}}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \geq 0$$

$$\left[ \begin{cases} \sqrt[3]{1-p} \geq 0 & p \leq 1 \\ \sqrt[3]{1-p} - 1 > 0 & \boxed{p < 0} \\ \sqrt[3]{1-p} \leq 0 & \boxed{p \geq 1} \\ \sqrt[3]{1-p} - 1 \leq 0 & p > 0 \end{cases} \right.$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3.  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

Для любых  $p$   $\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$

$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

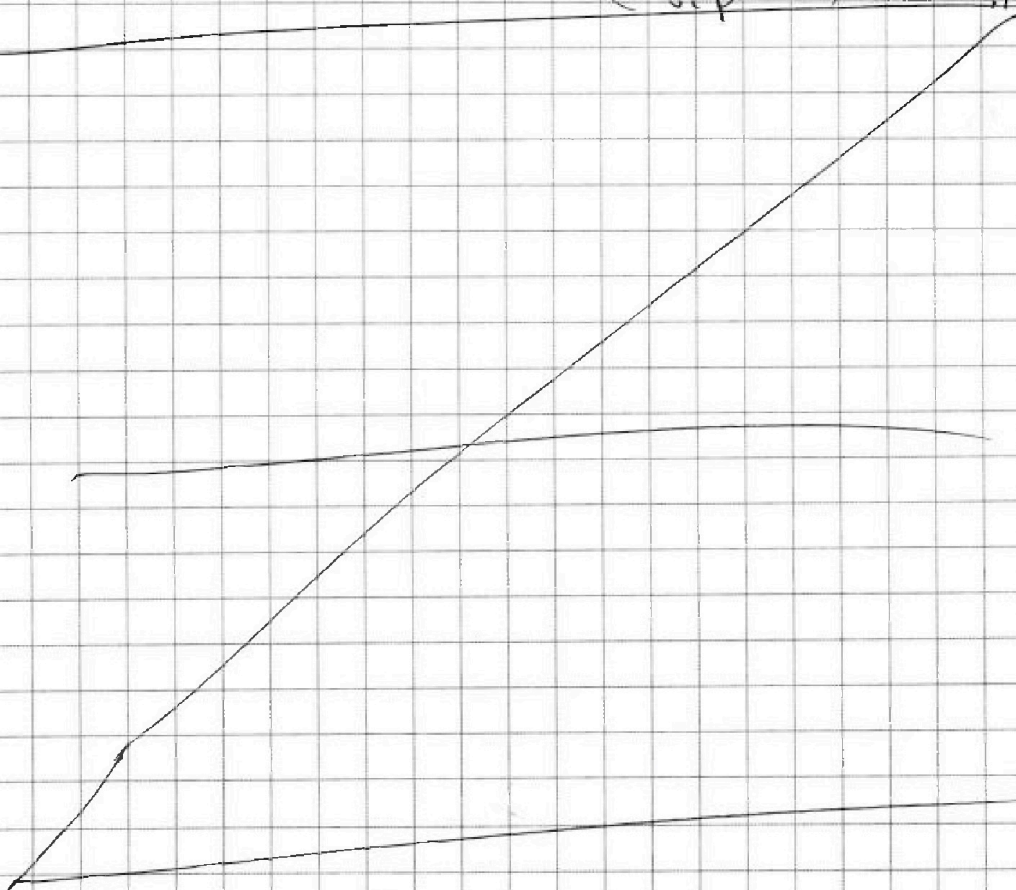
Отм: Для  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

$\exists$  some  $\cos$  argument, then

there for any  $p$   $\sqrt[3]{1-p}$

for  $x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



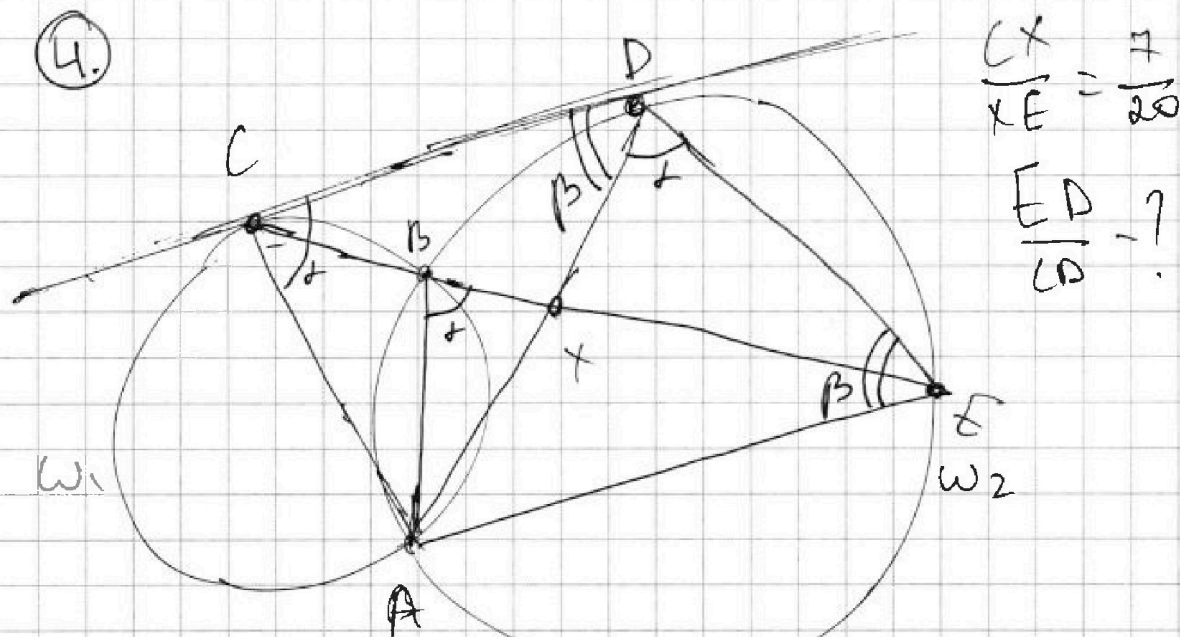


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- 1)  $\angle ADE = \alpha = \angle ABE = 180^\circ - \angle CBA =$   
(вн. кр. дуг)
- = внешний угол в  $W_1$  опирающийся на кр. дугу  $AC$  (так как не содержит точку  $B$ )  
=  $\angle ACD = \alpha$   
(углы между кас. и хордой)
- 2)  $\angle AED = \beta = \angle CDA$  (углы между кас. и хордой)
- 3)  $\begin{cases} \angle ACD = \angle ADE \\ \angle ADC = \angle AED \end{cases} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ADE \Rightarrow$
- $\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD}$  4)  $\triangle ADE: \frac{AE}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$
- ~~Второй способ~~
- Продолжение  $\rightarrow$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

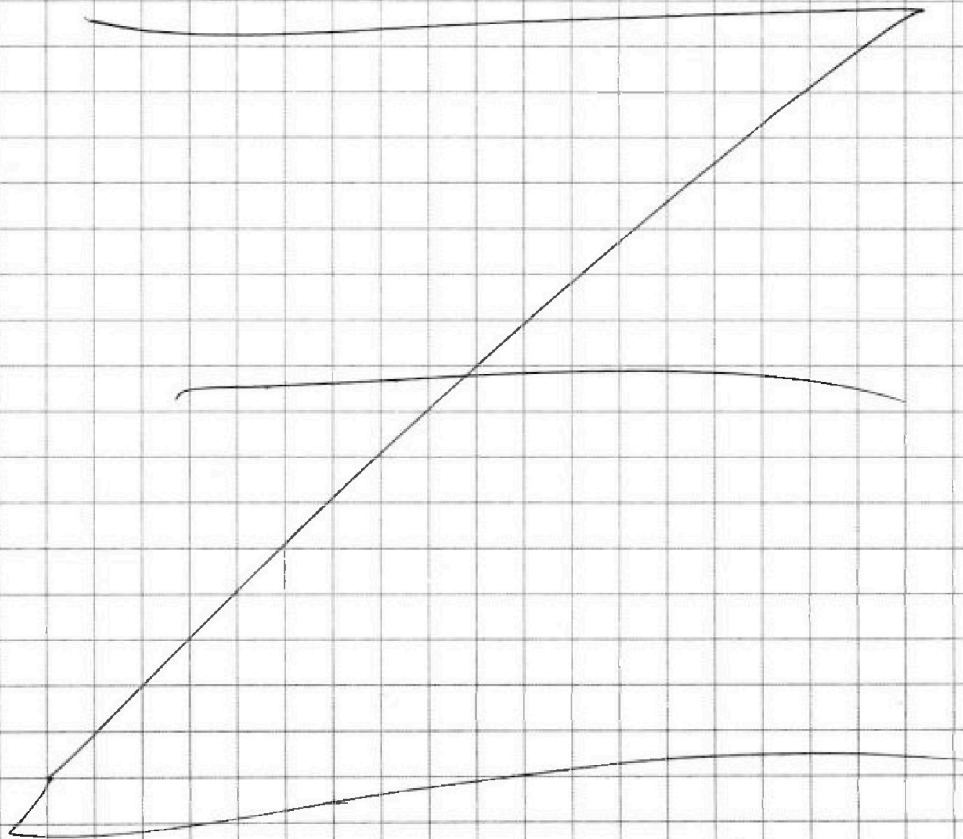
4. Продолжение!!!

$$5) \triangle CDE: \frac{7}{20} = \frac{CX}{XE} = \frac{S_{CDX}}{S_{XDE}} = \frac{CD \cdot \sin \angle CDX}{ED \cdot \sin \angle XDE}$$

$$\frac{CD \cdot \sin \beta}{ED \sin \alpha} = \frac{7}{20} \quad \frac{ED}{CD} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{20}{7}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD} \Rightarrow \left( \frac{ED}{CD} \right)^2 = \frac{20}{7} \quad \left[ \frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}} \right]$$

$$\text{Итак, } \frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. Пусть  $AB$  - есть и симметрия  $A$  и симметрия  $B$  относительно центра симметрии  $O$ , то есть

была центральная симметрия - это  $X$ , то есть была симметрия относительно одной прямой линии -  $Y$  и группы -  $Z$ .

1) По формуле "включения исключений":

$$\# X \cup Y \cup Z = \# X + \# Y + \# Z - \# X \cap Y - \# X \cap Z - \# Y \cap Z + \# X \cap Y \cap Z$$

2). Т.к. симметрия симметрично относительно одной из групп  $X$  и  $Y$  и  $Z$  и  $X$  и  $Y$  и  $Z$  симметрично относительно групп  $X$  и  $Y$  и  $Z$ .

Пример  $X$  - это и есть центральная симметрия относительно точки пересечения  $\Rightarrow X \cap Y \cap Z = Y \cap Z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \# X \cup Y \cup Z = \# X + \# Y + \# Z - X \cap Y - X \cap Z$$

По смыслу  $\# X$ :

Каждый пример будет сконструирован следующим образом: рассмотрим, ~~два~~ любые и другие





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего любых средних линий, и  
концами с нулевыми 4 экстремаль-  
ной симметрией. Инвертируем,  
что так мы переберем все рас-  
становки с центральной симметрией,  
поскольку мы брали только  
центрально-симметричные рас-  
становки, а все центрально-симмет-  
ричные расположения мы ~~уже~~  
расставили т.к. ~~каждое~~ на каждой  
расстановке можно восстановить  
первое зеркало иетки. И тогда

$$\#X = \binom{4}{\frac{500 \cdot 120}{2}} \quad \text{аналогично} \quad \#Y = \#Z = \binom{4}{500 \cdot 60}$$

Теперь посчитаем  $\#X \cap Y$  и  $\#X \cap Z$ ,  
оказывается, что  $\#X \cap Y = \#X \cap Z$  ~~также~~.

т.к. для любой средней линии  
рассуждение аналогично



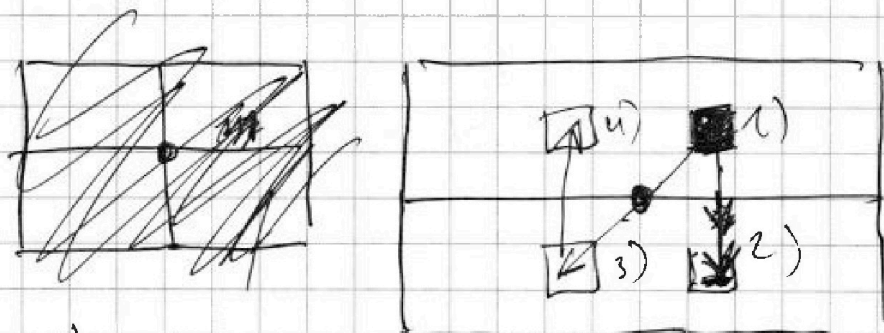
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. Без усиления общности  
покажем  $\#X \cap Y$ , где  $Y$  —  
эвронтемпоральное сечение мн.  
Информация, что выбран одна  
клетка, еще 3 выбираем  
это не мешает. Распутать и  
не маленький доске!



К 1) попутно 2), 3) и 4)

для тем 4) — минимизировать 1) относительно

уже фруи срезной мн., потому  
то и ее попутно срезом фруи срезной  
центральной относительно точки пересек.

Значит будем показывать  
пример так: 1) выбираем







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) ~~2~~  $\binom{500}{2}$  и того получится:

$$\# \times U \times V \times Z = 3 \binom{500}{4} - 2 \binom{500}{2}$$

Ответ:  ~~$3 \binom{500}{4}$~~   $3 \binom{500}{4} - 2 \binom{500}{2}$





1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.  $(a; b; c):$   $\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{Z} \\ a < b \\ b - a \not\equiv 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a^2 + b = 1000 \end{cases}$

Если  $a \equiv 0 \Rightarrow a^2 \equiv 0$   
 $a \equiv 1 \Rightarrow a^2 \equiv 1$   
 $a \equiv 2 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall a \quad \begin{cases} a^2 \equiv 1 \\ b^2 \equiv 0 \end{cases} \quad a^2 + b = 1000 \Rightarrow a^2 + b \equiv 1$   
 1)  $a^2 \equiv 1 \Rightarrow b \equiv 0 \Rightarrow b \not\equiv 3 \Rightarrow$   
 2)  $a^2 \equiv 0 \Rightarrow b \equiv 1 \Rightarrow a \not\equiv b$

$\Rightarrow$  Если  $a^2 + b = 1000$ , то  $b - a \not\equiv 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  просто пропустить условие  $b - a \not\equiv 3$

$(a-c)(b-c) = p^2$

$\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ p \\ -p \\ -p^2 \\ p^2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} p^2 \\ -p^2 \\ p \\ -p \\ -1 \\ 1 \end{matrix}$

} - все возможные варианты

$\begin{cases} a+c < b-c \Rightarrow \\ |p| > 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$  рассмотреть  $(1; p^2), (-p^2; -1)$

1)  $\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = c+1 \\ b = c+p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (c+1)^2 + c + p^2 = 1000 \\ c^2 + 3c + p^2 + 1 = 1000 \Rightarrow 20 \end{cases}$

$c^2 + 3c + p^2 + 1 = 1000 \Rightarrow 20 \quad c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(p^2 - 999)}}{2}$

~~$9 - 4(p^2 - 999) \geq 0 \quad p^2 \leq 999 \quad p \in \mathbb{Z}$~~

~~$p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$~~

$9 - 4(p^2 - 999) = x^2, \text{ где } x \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☒7  
☐СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + (2p)^2 \equiv 3 + 999 \cdot 4 \pmod{3}$$

$$x^2 + (2p)^2 \equiv 3 \pmod{3} \quad \text{т.к. } \begin{cases} x^2 \equiv 0 \\ x^2 \equiv 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 + 0 &\equiv 0 \\ 0 + 1 &\equiv 1 \\ 1 + 0 &\equiv 1 \\ 1 + 1 &\equiv 2 \end{aligned} \right\} \pmod{3}$$

$$= x^2 \equiv 0$$

$$(2p)^2 \equiv 0 \Rightarrow 2p \equiv 0 \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(9 - 999)}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 990}}{2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{1 + 440}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 3 \cdot 21}{2} = 30; -33$$

|              |           |
|--------------|-----------|
| 1) $c = 30$  | $a = 31$  |
|              | $b = 30$  |
| 2) $c = -33$ | $a = -32$ |
|              | $b = -24$ |

$$2) \begin{cases} a - c = -p^2 & a = c - p^2 \\ b - c = -1 & b = c - 1 \end{cases}$$

$$(c - p^2)^2 + (c - 1) = 1000$$

$$c^2 - 2cp^2 + p^4 + c - 1001 = 0$$

$$c^2 - c(2p^2 - 1) + p^4 - 1001 = 0$$

$$c = \frac{(2p^2 - 1) \pm \sqrt{(2p^2 - 1)^2 - 4p^4 + 4004}}{2}$$

$$(2p^2 - 1)^2 - 4p^4 + 4004 = 4p^4 - 4p^2 - 4p^4 + 4005 = 4005 - 4p^2$$

$$-4p^2 = x^2, \text{ где } x \in \mathbb{Z} \quad x^2 + (2p)^2 \equiv 4005 \pmod{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. Аналогично  $p=3$ ,  $\text{max } 2$

$$c = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 1005}}{2}$$

$$= \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4020}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{4005 - 36}}{2}$$

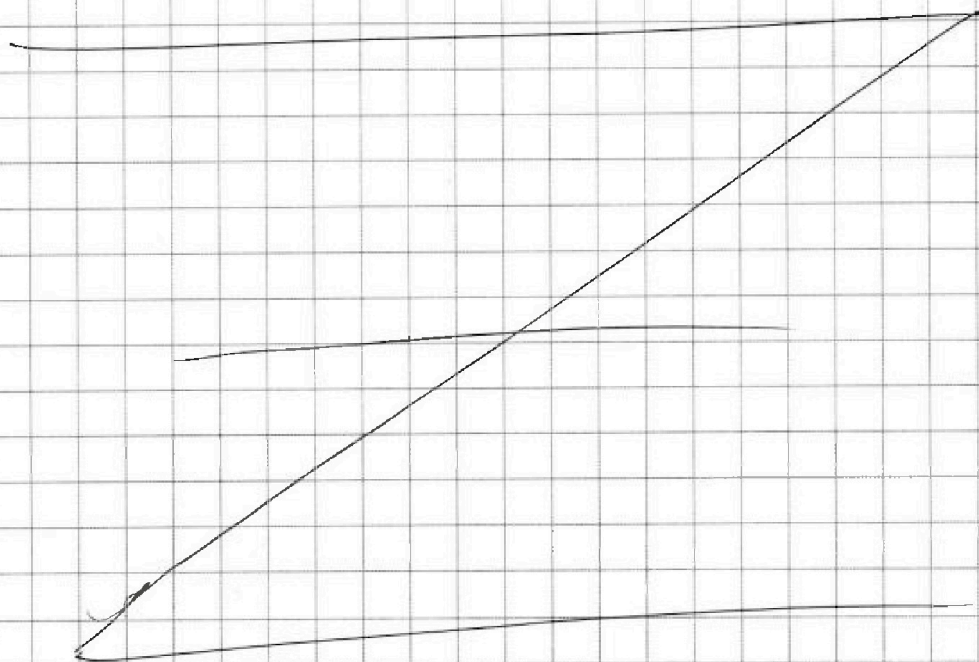
$$= \frac{17 \pm 3\sqrt{441}}{2}$$

$$= \frac{17 \pm 63}{2} = 40; -23$$

$$1) \begin{cases} c = 40 \\ a = 31 \\ b = 30 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} c = -23 \\ a = -32 \\ b = -24 \end{cases}$$

ответ:  $(31; 30; 40); (-32; -24; -23); (31; 30; 40);$   
 $(-32; -24; -23)$



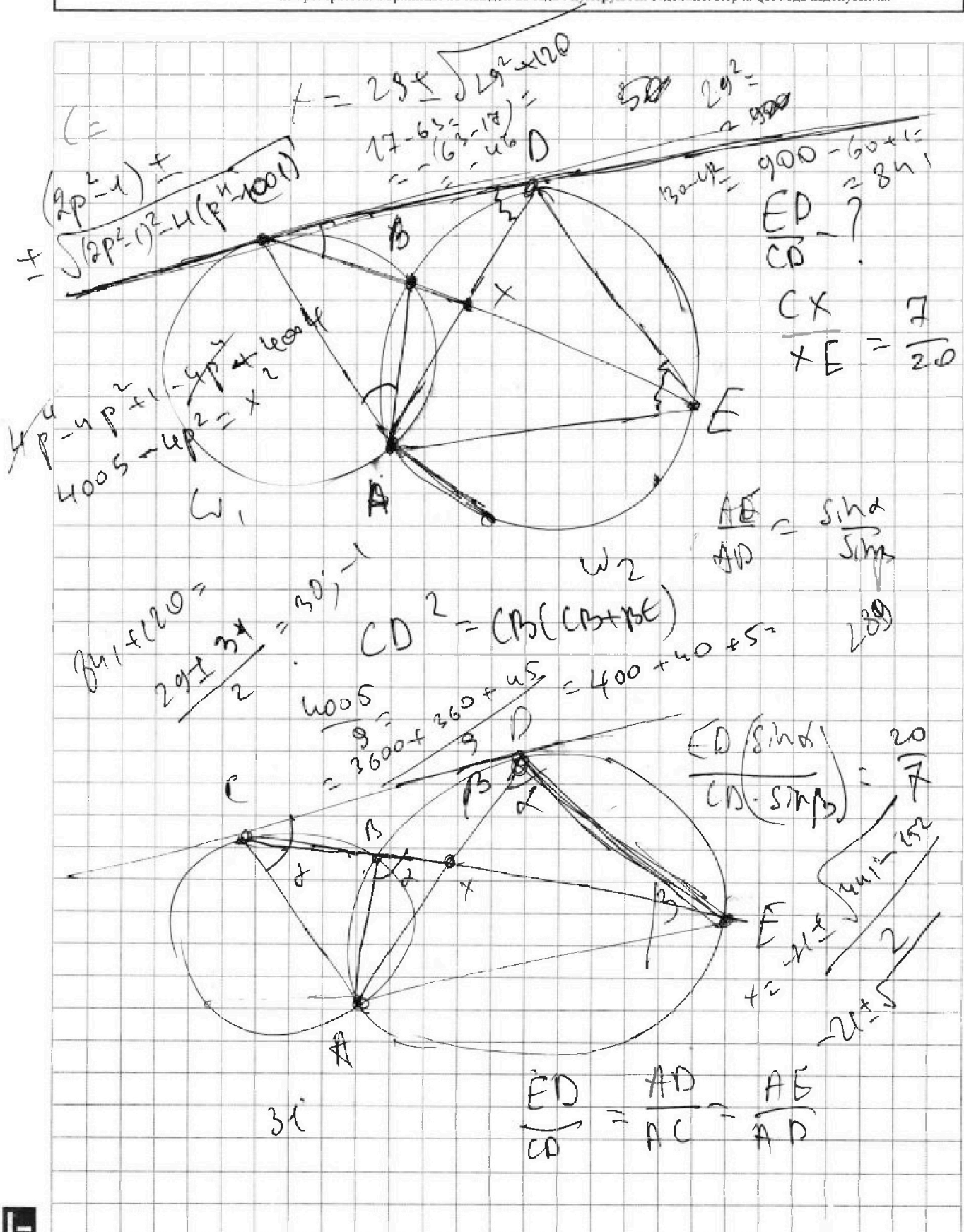


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Р:  
 ③  $p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$   
 2,1 корня.

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \\ &= \cos x (2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2(1 - \cos^2 x)) = \\ &= \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2 + 2\cos^2 x) = \\ &= \cos x (4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12\cos^2 x - 6 + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12\cos^2 x + \cos x (3p + 12 - 3p) + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 4 = 0$$

$$t = \cos x$$

$$p t^3 + 3t^2 + 3t + 4 = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t+1)^3 + 4 = 0$$

$$(p-1)x^3 + (x+1)^3 = 0$$

$$(p-1)x^3 = - (x+1)^3$$

$$(\sqrt[3]{p-1} x)^3 =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

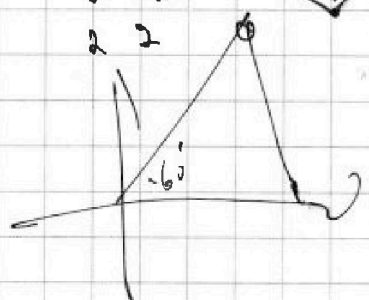
1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b \quad (b-a) \neq 3 \quad (c;b;c)$$
$$(a-c)(b-c) = p^3$$
$$a^2 + b^2 = 1000 \quad p \neq 3$$

|   |   |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0 | 2 |
| 1 | 0 |
| 1 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |
| 2 | 1 |
| 2 | 2 |



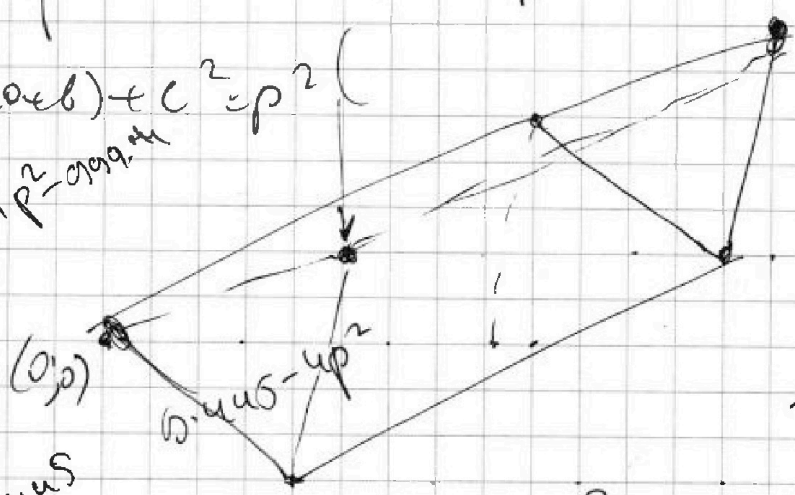
$$x^2 + (p)^2 = 9 \cdot \sin^2 60^\circ$$

$$(a-c) = p$$
$$(b-c) = p$$

$$\frac{4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 4$$

$$a^2 - c(a+b) + c^2 = p^2$$

$$9 = x^2 + p^2 - 9 \cdot \sin^2 60^\circ$$



$$\frac{x^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 4$$

$$x^2 = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{4}{\sqrt[3]{3}}$$

$$x^2 + p^2 = 9 \cdot \sin^2 60^\circ$$

$$9 - 4 (p^2 = 9 \cdot \sin^2 60^\circ) = x^2$$
$$-4 (p^2 - 9 \cdot \sin^2 60^\circ) = (x-3)(x+3)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b$$

$$a^2 + b^2 = 1000$$

$$32$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad p^2 \\ - p^2 \\ \hline \end{array}$$

$$a-c < b-c$$

$$\begin{array}{r} p^2 \quad 1 \\ - p^2 \quad -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + p^2 \\ c = c - p^2 \\ d = c - 1 \end{cases}$$

$$p^2 - 1 \neq 3$$

$$b - 4(p^2 - 999) \geq 0$$

$$(c+1)^2 + c + p^2 = 1000$$

$$p^2 - 999 \leq \frac{9}{4}$$

$$p^2 \leq 999 + \frac{9}{4}$$

$$p \leq 31$$

$$(c-p^2)^2 + c - 1 = 1000$$

$$(c+1)^2 + c$$

$$c^2 + 3c + p^2 - 1001 = 0$$

$$c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(p^2 - 999)}}{2}$$

$$(c-p^2)^2 + (c-1) = 1000$$

$$c^2 - c(2p^2 - 1) + p^4 - 1001 = 0$$

$$c^2 - 2cp^2 + p^4 + c - 1001 = 0$$

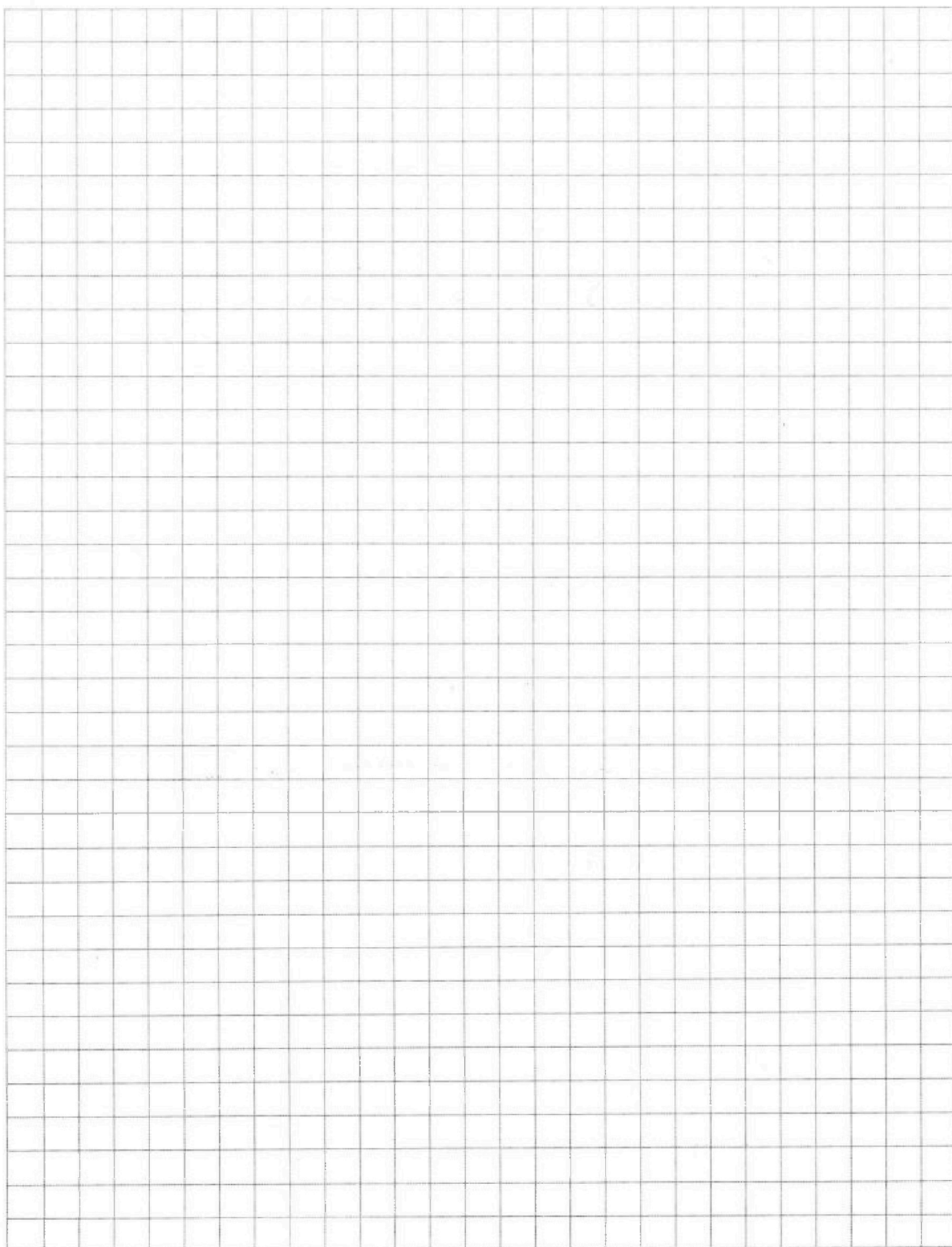


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑥  $(a; b; c) \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$

1)  $a < b$

2)  $b - a \not\equiv 3$

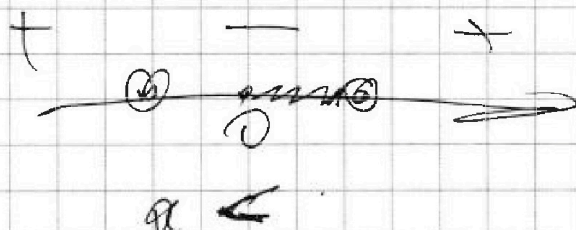
3)  $(a - c)(b - c) = p^2$

4)  $a^2 + b = 1000$

$$a < 1000 - a^2$$
$$a^2 + a - 1000 < 0$$

$$(b - a)^2 = 922 + 120$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4000}}{2}$$



$$a \not\equiv b$$

$$a \leq 31$$

$$a^2 + b \equiv 1$$

$$a \quad 4$$

$$1 \quad 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

①  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\exists b_n : b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$b_{12} = 2 - x$$

$$b_{18} = \sqrt{\frac{(25x+34)}{(3x+2)^3}}$$

$$g = \frac{1}{4\sqrt{3x+2}}$$

$$x \leq 2$$

$$x \leq -\frac{2}{3}$$

$$b \cdot g^9$$

$$b \cdot g^{12}$$

$$g^8 =$$

$$b \cdot g^9 \geq 0$$

$$b \cdot g^{14} \geq 0$$

$$b \cdot g^{17} \geq 0$$

$$g^8 > 0$$



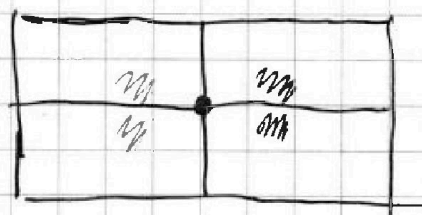


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$1/2$   
 $1/4$

1), 2), 3)

$$1) + 2) + 3) - 1) \cap 2) - 1) \cap 3) - 2) \cap 3) + 1) \cap 2) \cap 3)$$

