



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a - первый член геом. прогрессии, q - множитель $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a_4 = \sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = aq^3; \quad a_{10} = x+4 = aq^9; \quad a_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = aq^{11}$$

$$\frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (15x+6)(x-3) \geq 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \quad \frac{a_{12}}{a_4} = \frac{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}}{\sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = \frac{1}{q^8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-3)^4}} = \frac{1}{(x-3)^2} = q^8 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{q^4} + 3\right) \quad (\text{Могут появиться лишние корни, от них избавимся подстановкой})$$

$$q^2 = \sqrt{\frac{1}{|x-3|}} \quad a_{10} = a_4 \cdot q^6 =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = x+4 \quad x \geq -4$$

$$a_{12} = a_{10} q^2 = \frac{x+4}{\sqrt{|x-3|}} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$1) \quad x > 3: \quad x+4 = \sqrt{(15x+6)(x-3)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-3)^4}} = \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{q^8} \quad q^2 = \sqrt{|x-3|}$$

$$a_{12} = a_{10} q^2 = (x+4) \sqrt{|x-3|} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$1) \quad x > 3: \quad x+4 = \sqrt{15x+6} \quad x^2 + 8x + 16 = 15x + 6$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad D = 49 - 40 = 9 \quad x = \frac{7 \pm 3}{2} = 5; 2 \quad \text{подстановкой}$$

получаем что $x = 2$ невозможно

$$2) \quad x < 3: \quad x+4 = \sqrt{-15x-6} \quad x^2 + 8x + 16 = -15x - 6 \quad x^2 + 23x + 22 = 0$$

$$D = 23^2 - 88 = 21^2 \quad x = \frac{-23 \pm 21}{2} = -1; -22 \quad \text{т.к. } x+4 \geq 0 \quad x = -22 \text{ не подх}$$

Ответ: 5; -1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = \sqrt{x+7}$ $b = \sqrt{5-x}$

$$\begin{cases} a-b+6 = 2ab \Rightarrow 2a-2b+12 = 4ab \Rightarrow \\ a^2+b^2 = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2-4ab = 12-2a+2b-12$$

$$a^2 + a(2-4b) + b^2 - 2b = 0$$

$$D = 16b^2 - 16b + 4 - 4b^2 + 8b = 12b^2 - 8b + 4 = 4b^2 + (2b-2)^2$$

$$b^2 - b(4a+2) + a^2 + 2a = 0$$

$$D = 16a^2 + 16a + 4 - 4a^2 - 8a =$$

$$\begin{cases} a^2+b^2-2ab = 4(ab)^2 - 24ab + 36 \\ a^2+b^2 = 12 \end{cases}$$

$$t = ab$$

ТОЛЬКО с минимумом
так как $5-x \geq 0$

$$2t = 12 - 4t^2 + 24t - 36$$

$$t = 6 - 2t^2 + 12t - 18$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 121 - 96 = 25$$

$$t = \frac{11 \pm 5}{4} = 4; \frac{3}{2}$$

$$D = 36 + 4 \cdot 14 = 112$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{112}}{2}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2 \rightarrow x+7 = 4 + 4\sqrt{5-x} + 5-x$$

$$2x-2 = 4\sqrt{5-x}$$

$$x-1 = 2\sqrt{5-x}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 20 - 4x$$

$$x^2 - 6x - 19 = 0$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = -3 \quad \sqrt{x+7} + 3 = \sqrt{5-x} \rightarrow \text{нет корней}$$

Ответ: $x = \frac{6-\sqrt{112}}{2}; y = 35; z = 0$

$x = \frac{6+\sqrt{112}}{2}; y = 35; z = 0$

Ответ:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим график $f(y) = |y-20| + 2|y-35|$

1) $y \leq 20$: $f(y) = -y + 20 - 2y + 70 = -3y + 90$

На данном отрезке $f(y)$ убывает $\Rightarrow$ min знач = $f(20) = 30$

2) $y \in (20; 35]$ $f(y) = y - 20 - 2y + 70 = 50 - y$

На данном отр $f(y)$ убыв $\Rightarrow$ min $f(35) = 15$

3) $y > 35$ $f(y) = y - 20 + 2y - 70 = 3y - 90$ - возраст

Мин знач $f(y) \stackrel{\text{ищется}}{=} 15 \Rightarrow$ чтобы они равны $\Rightarrow$
 $\sqrt{225 - 2^2} \leq 15$
 $f(y) = 15$

$\Rightarrow \begin{cases} f(y) = 15 \Rightarrow y = 35 \\ \sqrt{225 - 2^2} = 15 \Rightarrow z = 6 \end{cases}$

$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x} = 2\sqrt{-(x+7)(x-5)} = 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$

$\sqrt{x+7} + 6 = 2\sqrt{5-x} (\sqrt{x+7} + 1)$

$2\sqrt{35+1-(x^2+2x+1)} = 2\sqrt{36-(x+1)^2} \leq 12$

$g(x) = \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6$ $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+7}} - \frac{1}{\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}\sqrt{5-x}} = 0$

$\sqrt{5-x} = \sqrt{x+7}$ подбором найден единств $x = -1$, он
 убыв возраст подходит т.к. $-1+7 \geq 0$ $5+1 \geq 0$

повед $g(x)$ $\Rightarrow$ знаки $g'(x)$ $\Rightarrow x = -1 - \min$
 Ответ: $x = -1$
 $g(-1) = 6 \Rightarrow g(x) \geq 6$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$3\cos 2x = 6\cos^2 x - 3$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x = 6\cos^2 x - 3 + p \quad \text{Пусть } t = \cos x \quad t \in [-1; 1]$$

$$4t^3 - 3t + 6t = 6t^2 - 3 + p$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t = -3 + p$$

$$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 0$$

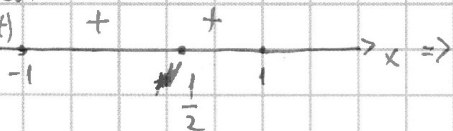
$$4t^2 - 4t + 1 = 0 \quad D = 16 + 16 = 2 \cdot 16$$

$$(2t - 1)^2 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{2 \cdot 16}}{12} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (2t - 1)^2 = 0$$

поведение $f(t)$

знаки $f'(t)$



функция убывает $\Rightarrow f_{\min} = f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$

$$f_{\max} = f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4 \Rightarrow \text{т.к. } f - \text{я непрерывна чтобы был корень } p \in [-10; 4]$$

$$\left(\sqrt[3]{4t} - \sqrt[3]{\frac{4}{8}}\right)^3 = 4t^3 - 3\sqrt[3]{4^2}t \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{8}} + 3\sqrt[3]{4t} \cdot \sqrt[3]{\frac{4^2}{8}} =$$

$$\left(\sqrt[3]{4t} - \sqrt[3]{\frac{4}{2}}\right)^3 = 4t^3 - 3 \cdot 2t + 3t \cdot \frac{4}{8} = p - 3 \cdot \frac{4}{8} = p - \frac{3}{2}$$

$$t \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{p - \frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \quad t = \sqrt[3]{\frac{p - \frac{3}{2}}{4}} + \frac{1}{2}$$

$$t = \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{p - \frac{3}{2}}{4}} + \frac{1}{2}\right)$$

Ответ: при $p \in [-1.5; 6.5]$:

$$t \in \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{p - \frac{3}{2}}{4}} + \frac{1}{2}\right)$$

при $p \in (-\infty; -1.5) \cup (6.5; +\infty)$:
 $x \in \emptyset$

Ответ:

$$2) \text{ при } p \in [-10; 4] \quad x = \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{2p - 7}{8}} + \frac{1}{2}\right)$$

при $p \in (-\infty; -10) \cup (4; +\infty)$ $x \in \emptyset$

1) при $p \in [-10; 4]$ уравнение имеет хотя бы один корень



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Так как $a > b$ и $(a-c)(a+b)$: на квадрат простого числа
 То $b-c=1$; $(a-c)$ - квадрат простого числа (пусть p - прост $\Rightarrow$
 $\Rightarrow (a-c)=p^2 \Rightarrow a-b=(p^2-c)-(1+c)=p^2-1=(p+1)(p-1)$
 если p не кратно трем то у него может быть остаток
 при делении на 3 только 1 и 2, но если ост.=1 то
 $(p-1):3$, а если ост.=2 то $(p+1):3$. Если $p:3$, то
 $a-b=((p+1)(p-1)):3$ число не должно быть $\Rightarrow p:3 \Rightarrow p=3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c=9 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=8 \\ a+b^2=820 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2+b=812 \\ b^2+b-812=0 \end{cases} \Rightarrow D=1+4 \cdot 812=3249=57^2$$

$$b_1 = \frac{-1+57}{2} = 28; \quad b_2 = \frac{-1-57}{2} = -29$$

$$\begin{cases} a_1 = 36; \\ c_1 = 27 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = 8-29 = -21 \\ c_2 = -30 \end{cases}$$

Также может быть что $a-c=-1$; $b-c=-p^2$ (т.к. $a>b$)

$$a-b=(-1+c)-(-p^2+c)=p^2-1 \Rightarrow p=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=8 \\ a+b^2=820 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3=28 \\ b_4=-29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3=36 \\ a_4=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3=37 \\ c_4=-20 \end{cases}$$

Ответ: $(-21; -29; -30); (36; 28; 27); (36; 28; 37);$

$(-21; -29; -20)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

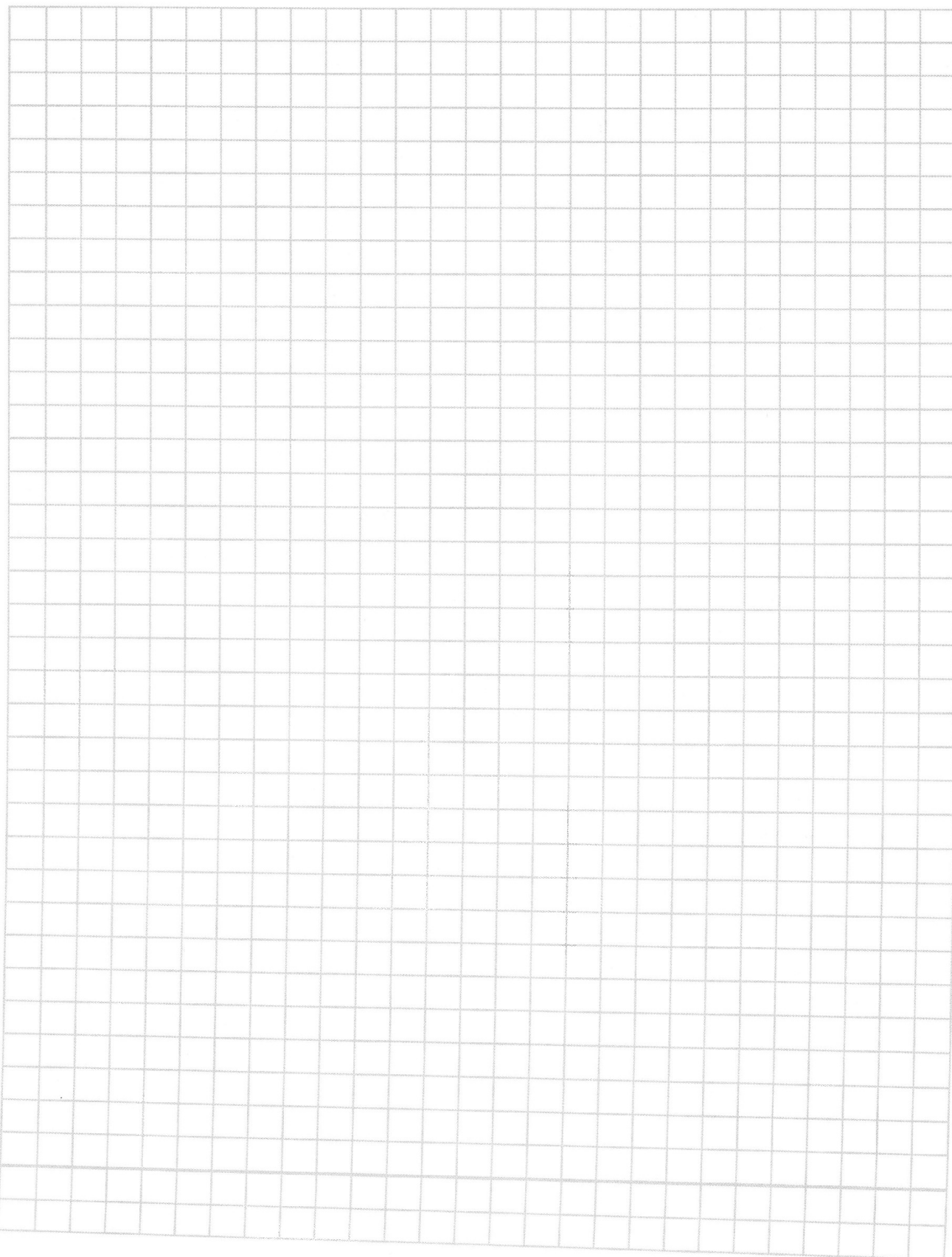
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 8 \ 1 \ 2 \\ 32 \ 4 \ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 8 \\ 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 29 \\ 2 \\ 58 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{81}{2^3}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

$$9 \cdot 9^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{array}{r} 18\sqrt{2} \\ 9^2 = 2\sqrt{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ -29 \\ 29 \\ 28 \\ 58 \\ +851 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 29 \\ 29 \\ 221 \\ 59 \\ 861 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 29 \\ 29 \\ 221 \\ 58 \\ 891 \end{array}$$

$$\left(\sqrt[3]{4}t - \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \right)^3 = 4t -$$

$$\left(\sqrt[3]{4}t - \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \right)^3 = 4t - 3 \cdot 32 + 3 \cdot 16 - 4$$

$$a - b + 6 = 2ab$$

$$t - \sqrt{12-t^2}$$

$$t - \sqrt{12-t^2} + 6 = 2t\sqrt{12-t^2}$$

$$t - \sqrt{12-t^2} = 2t\sqrt{12-t^2} - 6$$

$$t^2 - 2t\sqrt{12-t^2} = 4t^2(12-t^2) - 24t\sqrt{12-t^2} + 36$$

$$-9 \cdot -1 \quad 12\sqrt{x+7} + x + 7 + 36 = 5 - x + 4(x+7)(5-x) + 4\sqrt{x+7}(5-x)$$

$$p = -10$$

$$\sqrt[3]{\frac{-20-5}{2}} + \frac{\sqrt[3]{4}}{2} = -8 \quad 8-5 \ 3$$

$$8 - \sqrt[3]{\frac{2p-7}{8}} + \frac{1}{2} = -1 - \frac{3}{2} - \frac{2}{2}$$

$$-20 - 7 = -13$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_9 = \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

$$a_{10} = 9$$

$$a_{12} = 9 \cdot \sqrt{2}$$

$$q^2 = \sqrt{2}$$

$$q^6 = 2\sqrt{2}$$

$$a_9 = \sqrt{\frac{-9}{-43}} = \frac{3}{8}$$

$$a_{10} = 3$$

$$a_{12} = \sqrt{9 \cdot 4} = 6$$

$$a + b =$$

$$a - b + b = 2ab \cdot 2 \quad 2 \cdot$$

$$a^2 + b^2 = 12$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ 17 \\ 119 \\ 17 \\ 283 \end{array}$$

$$\sqrt{10} - \sqrt{2} = 2$$
$$u = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 19 \\ 4 \\ 76 \\ 36 \\ 112 \end{array}$$