



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)}, \text{ девятый член равен } x+3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1.

Обозначения: p_i - i -ый член геом. прогрессии $q = \frac{p_{i+1}}{p_i}$
при $p_2 = 0$

$$p_2 = \sqrt{25x-9} \cdot \sqrt{x-6}$$

$$p_3 = x+3$$

$$p_5 = \frac{\sqrt{25x-9}}{\sqrt{(x-6)^3}}$$

$$\frac{p_5}{p_2} = \frac{1}{(x-6)^2} = q^8$$

$$q = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-6)^2}}$$

$$p_2 \cdot q^2 = p_3$$

$$\sqrt{25x-9} = x+3$$

$$\begin{cases} 25x-9 = (x+3)^2 \\ 25x-9 > 0 \\ x-6 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 19x + 18 = 0 \\ x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ x > 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{19 \pm \sqrt{361-72}}{2} \\ x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ x > 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{19 \pm 17}{2} \\ x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ x > 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 18 \\ x = 1 \\ x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ x > 6 \end{cases}$$

$$x = 18$$

Ответ: $x = 18$.

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ x = 6 \end{cases}$$

$$p_2 > 0$$

значит не существует x , при котором все члены прогрессии равны нулю, это значит, что $p_2 \neq 0$ $p_3 \neq 0$ $p_5 \neq 0$

$$\begin{aligned} 25x-9 &> 0 & x-6 &> 0 \\ x &> \frac{9}{25} & x &> 6 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2+z} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$

$$\sqrt{81-z^2} \in [0; 9]$$

при $y-5 \geq 0$:

$$5y-16 = \sqrt{81-z^2}$$

$$5y-16 \in [0; 9]$$

$$5y \in [16; 25]$$

$$y \in [3\frac{1}{5}; 5]$$

учитывая $y-5 \geq 0$
 $y=5$

при $y-5 < 0$ и $y+4 \geq 0$:

$$-3y+24 = \sqrt{81-z^2}$$

$$-3y+24 \in [0; 9]$$

$$-3y \in [-24; -15]$$

$$y \in [5; 8]$$

учитывая $y-5 < 0$ и $y+4 \geq 0$
 $y \in \emptyset$

при $y+4 < 0$:

$$-5y+16 = \sqrt{81-z^2}$$

$$-5y+16 \in [0; 9]$$

$$-5y \in [-16; -7]$$

$$y \in [1\frac{2}{5}; 3\frac{1}{5}]$$

учитывая $y+4 < 0$
 $y \in \emptyset$

значит y может быть равен только 5 и в таком случае:

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2+z} \\ 9+0 = \sqrt{81-z^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2} \\ z=0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2} - 4$$

$$x+5 - 2\sqrt{5-4x-x^2} + 1-x = 4(5-4x-x^2) - 16\sqrt{5-4x-x^2} + 16$$

$$4(5-4x-x^2) - 16\sqrt{5-4x-x^2} + 10 = 0$$

$$\sqrt{5-4x-x^2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4}$$

$$\sqrt{5-4x-x^2} = 1$$

$$\sqrt{5-4x-x^2} = 2.5$$

$$\begin{cases} 5-4x-x^2=1 \\ 5-4x-x^2=6.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+4x-4=0 \\ x^2+4x+1.25=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \pm \sqrt{4+4} \\ x = -2 \pm \sqrt{4-1.25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \pm 2\sqrt{2} \\ x = -2 \pm \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

~~и т.д. $\sqrt{5-4x-x^2} = 0$~~

Ответ: $y=5; z=0; x=-2 \pm 2\sqrt{2}, x=-2 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3.

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$4p \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 4 = 0$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$(\cos x - 1)^3 + (p-1) \cos^3 x = 0$$

$$(\cos x - 1)^3 = -(p-1) \cos^3 x$$

$$\cos x - 1 = -\sqrt[3]{p-1} \cos x$$

$$(\sqrt[3]{p-1} + 1) \cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$$

$$\cos x \in [-1; 1]$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \in [-1; 1]$$

$$\sqrt[3]{p-1} + 1 \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

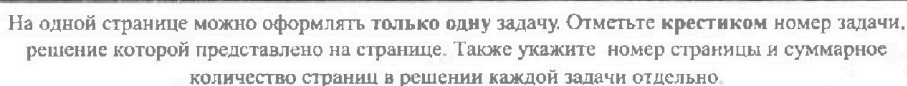
$$\sqrt[3]{p-1} \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$$

$$p-1 \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$$

$$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

$$x = \pm \arccos \left(\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty); x = \pm \arccos \left(\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



СТРАНИЦА
5 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим за (x, y) клетку находящуюся в x -ом столбце и y -ой строке, где столбцы считаются слева направо от 1 до 400, а строки считаются сверху вниз от 1 до 100.

для каждой клетки (x, y) :

1. клетка симметрична относительно центра — это (x_0, y_0)
2. клетка симметрична относительно вертикальной средней линии — это (x_0, y)
3. клетка симметрична относительно горизонтальной средней линии — это (x, y_0)

Заметим, что, если ~~какая-то~~ ^{какая-то} ~~имеет~~ ^{имеет} ~~нечетное~~ ^{нечетное} ~~раз~~ ^{раз} ~~закрашенное~~ ^{закрашенное} ~~множество~~ ^{множество} ~~обладает~~ ^{обладает} ~~свойством~~ ^{свойством} ~~симметрии~~ ^{симметрии} ~~относительно~~ ^{относительно} ~~центра~~ ^{центра} ~~и верш.~~ ^{и верш.} ~~пр. линии~~ ^{пр. линии} ~~для любых~~ ^{для любых} ~~(x, y) закрашена~~ ^{(x, y) закрашена} ~~$(101-x, 101-y)$~~ ^{$(101-x, 101-y)$} ~~для которой~~ ^{для которой} ~~закрашена~~ ^{закрашена} ~~$(x, 101-y)$~~ ^{$(x, 101-y)$}

относ. центра и horiz. ср. линии: для любой (x, y) закрашена $(401-x; 101-y)$, для которой закрашена $(401-x; y)$

отное. верт. ср. линии и гориз. ср. линии: для любой (x, y) закрашена (x, y) , для которой
Закрашена (x, y)
243 8 разл. кл. в прим. 102x400.

количество множеств симметричных относительно вертикальной ср. линии

равно количеству множеств из 4 различных клеток в прямоугол. 100×200 ,
т.е. вторая половина прямоугольника 100×400 однозначно определяется пер-
вой и в обоих из них равное количество закрашенных клеток.

аналогично количеству множеств из 8 разл. кл. в прам. 100х400, симметричных относительно горизонт. ср. линии равно количеству множеств из 4 различных

клеток в прямоугол. 50×400 т.к. при симметрии относ. гориз. ср. линии вторая половина прямоугольника 100×400 однозначно определяется первой и в обоих из них равное количество закрашенных клеток

и количество множеств из 8 разл. кл. в прам. 100×400 , симметричных относительно центра прямоугольника равно количеству множеств из 4 различ. клеток в прам. 50×200 , т.к. при симметрии относ. центра прямоугольника вторая половина прямоугольника 100×400 однозначно определяется первой и в обобщ. из них равное количество закрашенных клеток.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

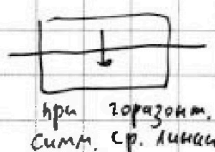
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
6 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5 (продолжение)

количество множеств из 3 разл. клеток, в прямоугол. 100×400 , симметричных отнosit. вертик. сред. линии, горизонт. сред. линии и центра прямоугольника равно количеству множеств из 3 разл. клеток в прямоугол. 50×200 , т.к. при наличии симметрии отнosit. вертик. сред. линии, горизонт. сред. линии и центра прямоугольника весь прямоугольник 100×400 однозначно определяется его четвертью и в каждой четверти прямоугольника 100×400 равно количество закрасенных клеток



Если мы сложим кол-во множеств из 3 разл. кл., в прям 100×400 , с симм. отнosit. вертик. сред. линии с количеством аналог. множеств с симм. отнosit. горизонт. сред. линии с количеством аналог. множеств с симм. отнosit. центра, то

получим количество искомых в задане множеств, но с учетом лишними учетом количества множеств со всеми тремя симметриями.

$$C_{20000}^4 + C_{20000}^4 + C_{20000}^4 - 2C_{10000}^2 = 3C_{20000}^4 - 2C_{10000}^2 = 3 \cdot \frac{20000!}{4! \cdot 19996!} - 2 \cdot \frac{10000!}{2! \cdot 9998!}$$

Ответ: ~~$3 \cdot \frac{20000!}{4! \cdot 19996!} - 2 \cdot \frac{10000!}{2! \cdot 9998!}$~~ $3 \cdot \frac{20000!}{4! \cdot 19996!} - 2 \cdot \frac{10000!}{2! \cdot 9998!}$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6.

Обозначения: p - простое число квадрату которого равно $(a-c)(b-c)$

при $p \neq 3$:

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

по основной теореме алгебры

~~$\{ \begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases}$~~

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \\ a-c=-p \\ b-c=-p \\ a-c=1 \\ b-c=p^2 \\ a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \\ a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \\ a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$$

так как $a < b$, то

~~$\{ \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$~~

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \\ a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b-a = p^2 - 1$$

при $p \equiv 1 \pmod{3}$:

$b-a \equiv 0 \pmod{3}$ - противоречит одному из условий

при $p \equiv 2 \pmod{3}$:

$b-a \equiv 0 \pmod{3}$ - противоречит одному из условий

значит $p=3$

при $p=3$:

$$b-a = p^2 - 1$$

$$b-a = 8$$

$$\begin{cases} b=a+8 \\ a^2+b=710 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=a+8 \\ a^2+a-702=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=a+8 \\ a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2808}}{2} = \frac{-1 \pm 53}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=a+8 \\ \begin{cases} a=-27 \\ a=26 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-27 \\ b=-19 \\ a-c=1 \\ a=26 \\ b=34 \\ a-c=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-27 \\ b=-19 \\ c=-28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=26 \\ b=34 \\ c=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-27 \\ b=-19 \\ c=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=26 \\ b=34 \\ c=35 \end{cases}$$

Ответ: $(-27; -19; -28); (26; 34; 25); (-27; -19; 18); (26; 34; 35)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1

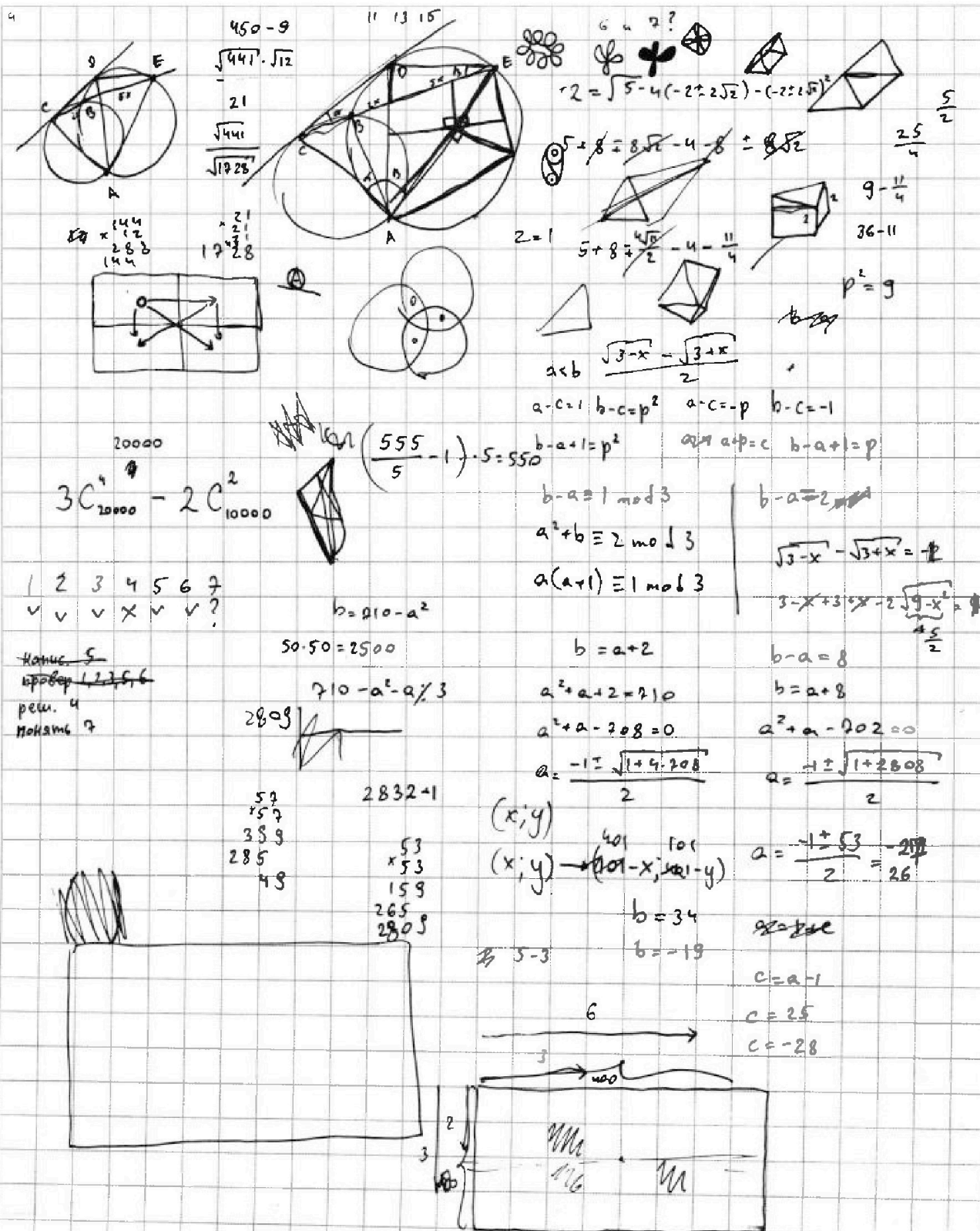
$$p_7 = \sqrt{(25x-8)(x-6)}$$
$$p_8 = x+3$$
$$p_{16} = \sqrt{\frac{25x-8}{(x-6)^3}}$$

2

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{-4x-x^2+2} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^2 - ab + b^2 = 0$$
$$x^2 + 4x - 2 = 0$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$
$$2.25 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$
$$y = 5, z = 0$$
$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{-x^2-4x+5}$$
$$\sqrt{x+5} = U$$
$$\sqrt{1-x} = V$$
$$U - V + 4 = 2UV$$
$$U + 4 = 2UV$$
$$\frac{U+4}{2U+1} = V$$
$$x = \frac{U+4}{2U+1} = 1-x$$
$$6 - 2\sqrt{-x^2-4x+5} = 4(-x^2-4x+5) - 16\sqrt{-x^2-4x+5} + 16$$
$$2t^2 - 7t + 12 = 0$$
$$t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 96}}{4} = \frac{7 \pm 5i}{4}$$
$$t = \frac{7-3}{4} = 1$$
$$t = \frac{7+3}{4} = 2.5$$
$$\begin{cases} -x^2-4x+5=1 \\ -x^2-4x+5=6.25 \end{cases}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{1} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{1} = -2 \pm 2\sqrt{2}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+1.5625}}{1}$$
$$a < b$$
$$b - a \equiv 3$$
$$(a-c)(b-c) = p^2$$
$$a^2 + b = 10$$
$$a - c = p = b - c$$
$$a - c = 1, b - c = p \Rightarrow a - c \equiv p \pmod{3}$$
$$a - 1 \equiv c, b - a + 1 \equiv p, a - b \equiv 1 \pmod{3}$$
$$b - a \equiv 1 \pmod{3}$$
$$p = b - a + 1$$
$$x_3, x_6, x_9, x_{12}, x_{15}, x_{18}, x_{21}, x_{24}, x_{27}$$
$$a^2 + b \equiv 2 \pmod{3}$$
$$a^2 + a \equiv 1 \pmod{3}$$
$$a(a+1) \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{3}$$
$$b = a + 2$$
$$a^2 + a - 2 \pmod{3} = 0$$
$$a = -1 \pmod{3} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{3}$$

3

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$
$$x \text{!} \text{perm.}$$
$$\cos(2x-x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$$
$$\cos^2 x - \sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x \cos x$$
$$\cos^2 x - 3\cos x(1-\cos^2 x)$$
$$4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$
$$\cos x = t$$
$$4pt^3 - 12t^2 + 12t - 4 = 0$$
$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$
$$(t-1)^3 + (p-1)t^2 = 0$$
$$t = 1 + \sqrt[p-1]{p-1} t$$
$$t = \frac{1}{\sqrt[p-1]{p-1}}$$
$$(t-1+At)(t^2-2t+1-At^2+At+A^2t^2) = 0$$
$$(A+1)t = 1$$
$$t = \frac{1}{A+1}$$
$$(A^2+A+1)t^2 + (A-2)t + 1 = 0$$
$$t = \frac{-A+2 \pm \sqrt{A^2-2A+4-4A^2+4A-A^2}}{2A^2-2A+2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

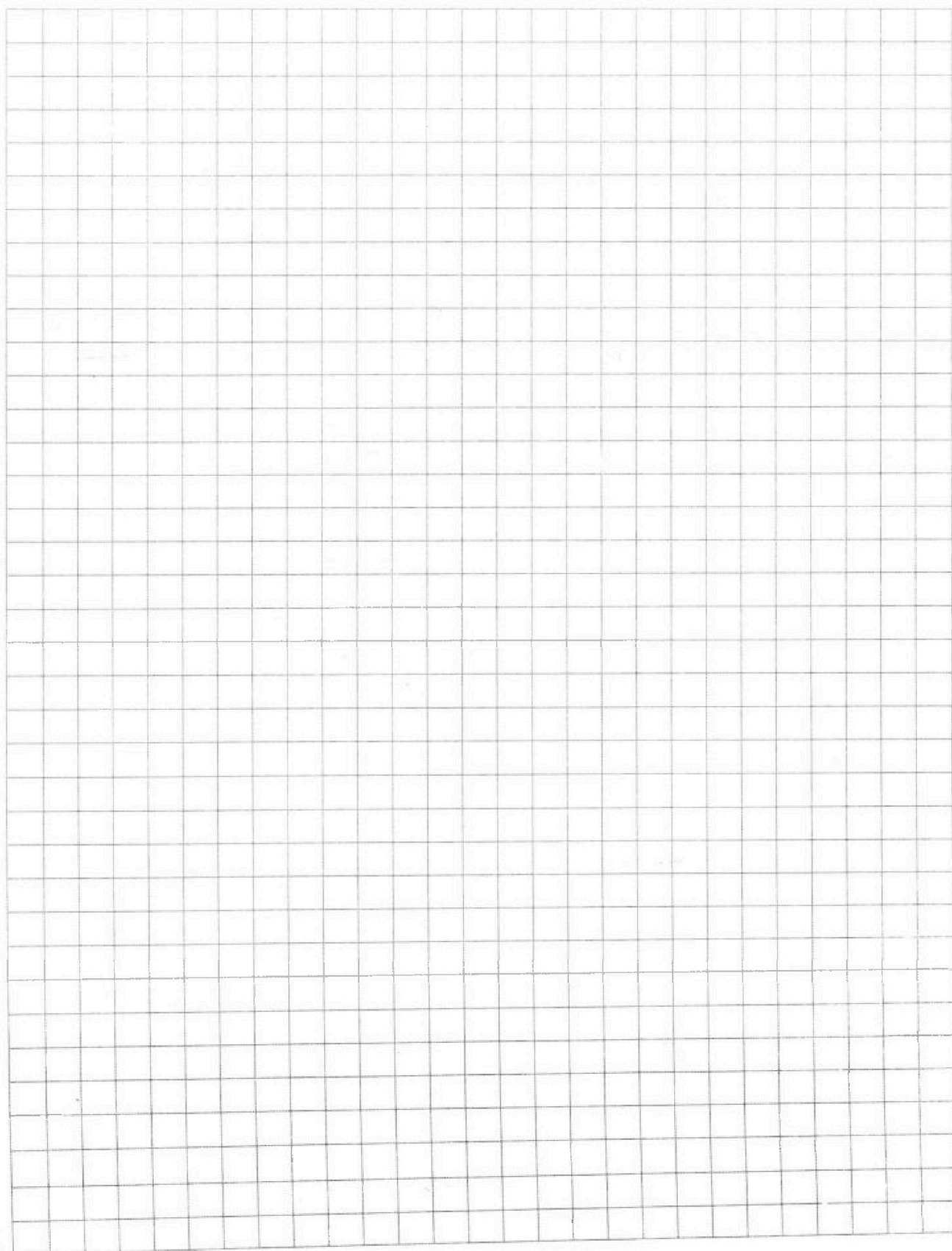
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

