



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

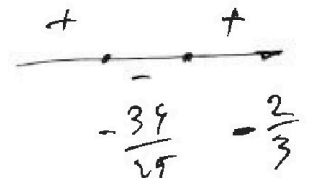


1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2-x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$



3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

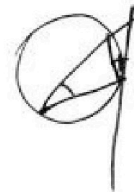
имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.



7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} b_1 &= b \\ b_{10} &= b \cdot q^9 \\ b_{12} &= b \cdot q^{11} \\ b_{18} &= b \cdot q^{17} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (25x+34)(3x+2) \geq 0 \\ \frac{25x+34}{(3x+2)^3} \geq 0 \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\updownarrow \\ x &\in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup \\ &\cup [-\frac{2}{3}; +\infty) \\ x &\in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup \\ &\cup (-\frac{2}{3}; +\infty) \\ x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\updownarrow \\ x &\in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup \\ &\cup (-\frac{2}{3}; +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{1 ступень } b_{10} \neq 0 \\ &\Rightarrow \frac{b_{18}}{b_{10}} = q^8 = \sqrt[4]{\frac{(25x+34)(3x+2)}{(3x+2)^3 \cdot (25x+34)}} = \\ &= \frac{1}{|3x+2|} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow q^2 = \sqrt[4]{|3x+2|} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}}$$

$$\cancel{b_{10} \cdot q^2 = b_{12}}$$

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{|3x+2|}} = 2-x$$

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = (2-x) \cdot \sqrt[4]{|3x+2|}$$

$$b_{14} = b_{10} \cdot q^4 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}}$$

$$= \cancel{b_{10} \cdot q^2 = b_{12}}$$

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{|3x+2|}} = 2-x$$

$$(25x+34)^2 (3x+2)^2 = (2-x)^4 \cdot |3x+2|$$

$$(25x+34)^2 |3x+2| = (x-2)^4$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{b_{10} \cdot b_{18}} = b_{14}$$

см б

$$\frac{|25x+34|}{|3x+2|} = b_{14}$$

$$\frac{25x+34}{3x+2} \geq 0 \text{ с } \alpha \neq 3$$

$$\left| \frac{25x+34}{3x+2} \right| = b_{14}$$

$$\begin{cases} \frac{25x+34}{3x+2} = b \cdot 9^{13} \\ 2-x = b \cdot 9^9 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☒☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

22



0831

$$x+6 \geq 0$$

$$\cancel{3-x-2z} \geq 0$$

$$y-3x-x^2+2 \geq 0 \quad (2)$$

$$400-z^2 \geq 0$$

$$x \geq -6$$

$$-2z \geq x-3$$

$$y-3x-x^2+2 \geq 0$$

$$20z \geq -20$$

$$0 \leq |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$



~~98~~

$$(y+2)^2 + 4(y-18)^2 + 4|y+2||y-18| = 400-z^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

то rough rough $t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p} > 1$

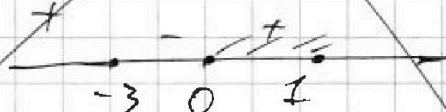
$(p > 0)$

$-1 \pm \sqrt{1-p} > p$

$\pm \sqrt{1-p} < p+1$

$1-p < p^2 + 2p + 1$

$\uparrow p^2 + 3p < 0$



$p > p > 0 \rightarrow$

при $p > 0$
непримен
н. Форм
не пересекае
0 +

тогда
минимум/макс
не до
сиг $(1; 1)$
 $\rightarrow$ не
 $f(t)$
монотон
на $[1; 1]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$f(t)$

у нас формула точки на МК/МК

$$f(t) \text{ и } t_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$$

~~и~~

$$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \leq 1 \quad (p > 0)$$

$$-1 + \sqrt{1-p} \leq p$$

$$1 > \sqrt{1-p} \leq p+1 > 1$$

$$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \leq -1$$

$$-1 + \sqrt{1-p} \leq -p$$

$$\sqrt{1-p} \leq 1-p$$

$$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} \leq 1$$

$$-1 - \sqrt{1-p} \leq p$$

$$-\sqrt{1-p} \leq p+1$$

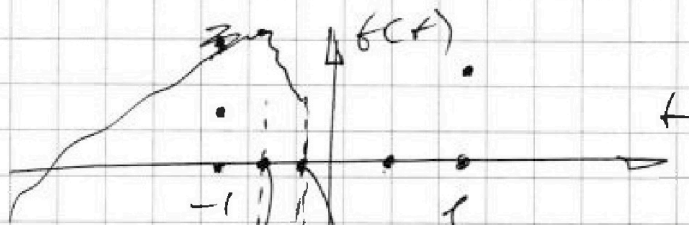
$$\sqrt{1-p} \leq 1-p$$

$$\frac{1 - \sqrt{1-p}}{p} \leq -1$$

~~и~~

$$1 - \sqrt{1-p} \leq -p$$

$$1 < 1+p \leq \sqrt{1-p}$$



возраст

возраст

$$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p}$$

$$f\left(\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p}\right) > 0$$

→ не решение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3 случай $p=0$

$$f(-1) = 4$$

$$f(1) = 28$$

$$f'(t) = 2t + 1$$

$$t = -\frac{1}{2}$$



тогда локал. мин/макс

$$f(-\frac{1}{2}) = 12 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot (-\frac{1}{2}) + 4 = 3 - 6 + 4 = 1 > 0$$

⇒ нет решений

4 случай $-7 < p < 0$

$$f(-1) > 0$$

$$f(1) > 0$$

$$f'(t) = 7t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 28}}{14}$$

$$\Rightarrow f'(t) > 0$$

⇒ f — непересекает

т.ч. не пересекает

5 случай

$$p < -7$$

$$f(-1) > 0$$

$$f(1) < 0$$

⇒ не $\Rightarrow$ есть
решение

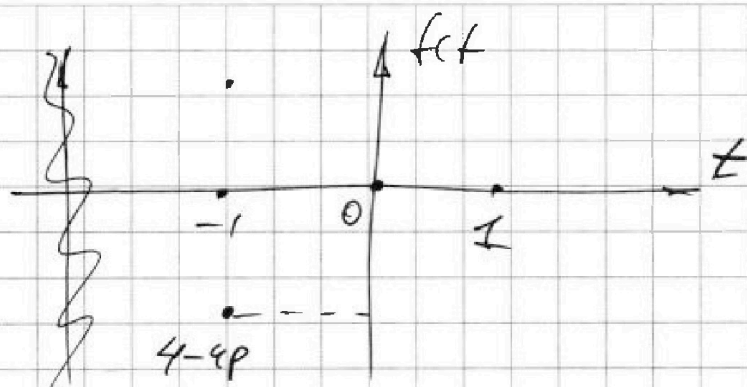


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) 1 ступ $p \geq 4$ $f(-1) < 0$ / $\Rightarrow$ решение
 $f(1) > 0$ т.ч. функция
непрерывна $f(t)$
на $[-1, 1]$

2) 2 ступ $1 < p < 4$ $f(-1) > 0$ / решение
 $f(1) > 0$

смотрим на то же $\max$ $\neq$
минимум $f(t)$
для этого нужно $f'(t) = 0$

$$pt^2 + 2t + 1 = 0$$

$$pt^2 + 2\sqrt{p}t + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + 1 = 0$$

$$(\sqrt{p}t + \frac{1}{\sqrt{p}})^2 - \frac{1}{p} + 1 = 0$$

$$t = \pm 2$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4p}}{2p} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - p}}{p}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 - p}}{p} \in [-1, 1]$$

$$\Rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{1 - p}}{p} \in [-1, 1]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \boxed{23} \quad \cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (-1 + 2\cos^2 x) \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} \cos t = x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

$$p(4t^3 - 3t) + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0$$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0$$

$$f(t) = 4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

~~$$4t^3(p+3) + 4(3t+1)$$~~

~~$$f'(t) = 12pt^2 + 24t + 12 = 0$$~~

~~$$pt^2 + 2t + 1 = 0$$~~

~~$$4t(pt^2 + 3) \quad f'(t) = 12pt^2 + 24t + 12$$~~

~~$$pt^2 + 2t + 1 = 0$$~~

$$f(-1) = -4p + 12 - 12 + 4 = 4 - 4p$$

$$f(1) = 4p + 28$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

PZ 4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Т. треугольник $\triangle CPE$

$$\frac{CP}{\sin \alpha} = \frac{EP}{\sin \beta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} &= \frac{EP}{CP} = \frac{EP}{CB} = \frac{R_2}{R_1} \\ &= \frac{R_2 \sin \alpha}{R_1 \sin \beta} \end{aligned}$$

5) $\triangle CBP \Rightarrow \angle PBE = \angle PCE = \angle ABE$

$\triangle ABE$ - бн. - к

$$\Rightarrow AP - \text{биссектриса } \angle CAE \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{7}{20}$$

$$\begin{aligned} AC &= 7 \\ AE &= 20 \end{aligned}$$

6) Т. треугольник $\triangle ABC$ и $\triangle ABE$

$$\frac{AC}{\sin \angle CPA} = 2R_1$$

$$\frac{AE}{\sin \angle ABE} = 2R_2$$

$$(\sin \angle CPA = \sin \angle ABE)$$

$\Downarrow$

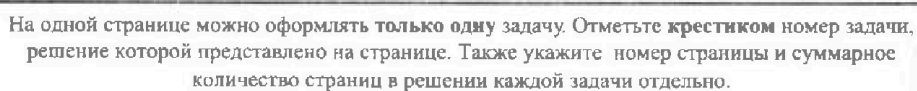
$$\frac{AC}{AE} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{20}$$

7) у н. 4 $\Rightarrow$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = \frac{20}{7}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{20}}$$

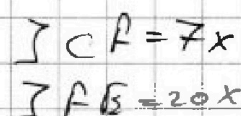
$$\begin{aligned} &\text{у н. 4} \\ &\frac{EP}{CP} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$



СТРАНИЦА
113

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ω_1 ω_2 $\frac{E}{\sigma} - ?$
 I-луч $\rho_{02}(x, \omega)$ - средняя точка $\sigma \varphi$
 хотя, сар ω



R_1 - радиус ш.
 R_2 - радиус ш.
(из постоянн. и переменн. сн)

$$AB - \text{p.f.p.} \circ c_0 \quad \omega, u \omega_2 \Rightarrow] \text{ then } AB \cap CF = M$$

$$P_{02}(M, \omega_1) = P_{02}(M, \omega_2) \Rightarrow MC^2 = M\varphi^2$$

2) $\angle CAM = \beta = \angle BCM$ (из равенств)

2) $\triangle CDE \sim \triangle BDE$ (по двум углам)

$$v) \frac{EF}{CB} = \frac{EF}{CB} = 2$$

7) 100. $\text{cm}^2 \text{cm}^2 \triangle ABC \triangle ABC$

$$\frac{CB}{\sin \alpha} = 2R, \quad \frac{BR}{\sin \alpha} = 2R_2 \quad | \Rightarrow \quad \frac{BR}{BC} = \frac{R_2 \sin \alpha}{R_1 \sin \alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

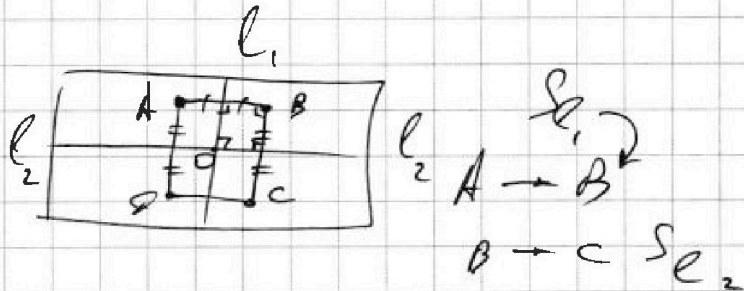
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. В симметрии отображают углы
вдоль симметрии симметрии
и углы

① ☐ $\angle C B \neq \angle B C$



по т. Уолла

$A \rightarrow D (S_1)$

$\Rightarrow$ A, C лежат на одной
прямой

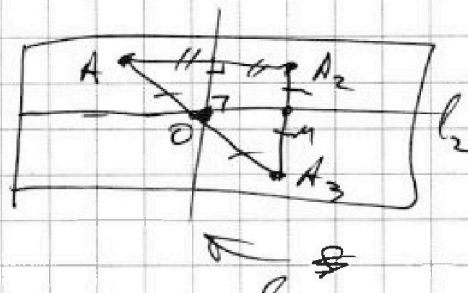
$\Rightarrow$ ABC — прямоугольник

($AD \parallel BC, AD = BC$
 $\Rightarrow$ параллелограмм + угол $\angle A = 90^\circ$)

$\Rightarrow$ картина отображает центральную

② $\angle B \neq$ центр

без отс. отс.



$A \rightarrow A_2 (S_1)$

$A \rightarrow A_3 (S_2)$

②

$A_2 A_3 \parallel l_1 \Rightarrow \angle A_2 A_3 = 90^\circ$

②

$AA_2 \parallel l_2$

$\Rightarrow$ l_2 — пер

образует
углы
симметрией

$A_2 A_3 \cap l_2 = M \in AA_2 \cap A_2 A_3$
 $\Rightarrow A_2 M = A_3 M$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① $120:2, 500:2 \rightarrow$ 8-углы в члн досок
сетки



посчитаем число способов размещения
флагов чтобы отобразить симметрию

отн. центра ~~и~~ $A_1 - ?$, (и возможно
гор. прямой (середине) $A_2 - ?$ $\downarrow$
верт. прямой (середине) $A_3 - ?$ $\downarrow$

отн. верт. прямой (середине) $A_3 - ?$ $\downarrow$

для того разделим прямоугольник

на 4 части пополам по соотв. средин

линии. и разместим там 4 флага

тогда $\sum_{i=1}^4 C_n^4$ для всех трех

случаев выразим их отн. центра

или соотв. средин. получим

следующие 4 случая итого

$$A_1 = C_n^4$$

$$A_2 = C_n^4$$

$$A_3 = C_n^4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) рассмотрим # размещений точек
которые образуют симметрию
отн. в двух срезах (возможны
отн. центра)
при этом возникнет некоторое
критическое значение

по рисунку

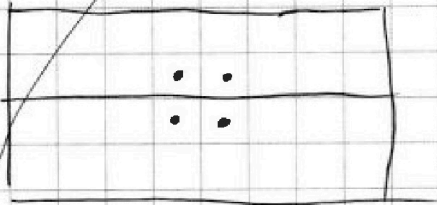
и выберем там где меньше

то $C_{\frac{n}{2}}^2$ способов останется

$$A_4 = C_{\frac{n}{2}}^2$$

однозначно определяется по ним

3) # # размещений образуют
одною из осевых симметрий и
центральной A_5 (и возможно отн
другой оси)



приведем соответств



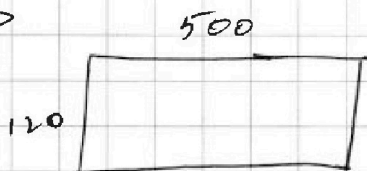
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

25



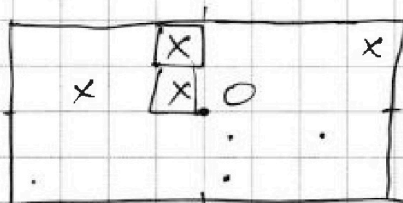
отн. центра

отн. середины

- поперечная

] - по ширине

①



$$n = 500 \cdot 120 \cdot \frac{1}{2}$$

h-?

получаем # способов

разместить фаллоу т.е. 2000 точек в симметричной отн. центра. 120; 2, 500; 2 > Центр в пересечении

линий. первую линию n способов

вторую (n-2) т.е. поперечная в той же и

в симметричную. третью (n-4) аналогично.

четвертую (n-6) а остальные 9 среднюю

и еще 4-х симметричных отн. центра

(однозначно) $A_1 = n(n-2)(n-4)(n-6) \cdot \frac{1}{8!}$

② получаем # способов разместить f

$$500 \cdot 60 =$$

$$\approx 30000$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~26~~ (a, b, c)

1) $a < b$

2) $b - a \neq 3$

3) $(a - c)(b - c) = p^2$ - против

3) $a^2 + b = 1000$

a	$a^2 \pmod{3}$
0	0
1	1
2	0
3	1

a	a^2
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	

a	a^2
26	
27	
28	
29	
30	
31	
32	

3) $a^2 + b = 0$
4

a	$a^2 \pmod{4}$
0	0
1	1
2	0
3	1

1) $a \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow b \equiv 0 \pmod{4}$

$a^2 + c^2 + c(a + b) = p^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

26 (a, b, c)

1) $a < b$

2) $b - a \neq 3$

3) $(a - c)(b - c) = a^2 + c^2 - c(a + b) = p^2$

4) $a^2 + b = 1000$

a	$(\text{mod } 4) a^2$
± 1	1
± 2	0
0	0

1) ~~$a^2 + b = 1000$~~

1) $\text{ср } a \equiv 4 \quad b \equiv 4$

2) $\text{ср } a \equiv 1 \quad b \equiv 3$

$a = 4k$

$b = 4d$

$16k^2 + 4d = 1000$

$4k^2 + d = 250$

$d \equiv 2 \Rightarrow d = 2l$

$4k^2 + 2l = 250$

$2k^2 + l = 125$

$l \equiv 1 \Rightarrow b = 8(2m+1) = 16m+8$

$2k^2 + 2m+1 = 125$

$k^2 + m = 62$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b = 1000 - a^2$$

$$1) a \in 1000 - a^2$$

$$2) 1000 - a^2 - a \div 3 \Leftrightarrow 1000 - a(a+1) \div 3$$

$$(a+c)(b+c) = p^2$$

$$(a-c)(1000 - a^2 - c) = p^2$$

$$1000a - 1000c - a^3 + a^2c - ac + c^2 = p^2$$

$$(0 \vee 1) + c(0 \vee 1) = 0$$

$$\boxed{2b} \quad (a-c)(b-c) = p^2$$

$$1) \begin{cases} (a-c) \neq \pm 1 \\ (b-c) \neq \pm 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c = p = b-c \\ \Downarrow a=b \text{ но } a < b \text{ и } a \neq 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (a-c) = +1 \\ (b-c) = +p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = c+1 \\ b = c+p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a-b < p^2+1 \\ a < b^2+p \end{cases}$$

$$a \geq c+1$$

$$b \geq p^2 + c$$

$$c+1 \leq c-p^2$$

$$1+p^2 \leq 0 \text{ и}$$

$$b-a \div 3$$

$$p^2-1 \div 3$$

$$p^2 \neq 1$$

$$\text{случай } p \neq 3 \quad \text{случай } p=3$$

$$a' \mid (a')^2 \pmod{3}$$

0	1	2
0	1	1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
9 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$c_{1,2} = \frac{-3 \pm 63}{2} \neq$$

$$c = \frac{-66}{2} = -33$$

$$c = 30$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -33 \end{array} \right. \quad (a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 31 \\ b = 29 \\ c = 30 \end{array} \right.$$

проверен
все "ок"

$$(5) \quad c^2 = 17c - 920 =$$

$$c = \frac{17 \pm 83}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = 40 \\ c = -23 \end{array} \right.$$

$$- \frac{63 - 17}{2} = - \frac{46}{2} = 23$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 31 \\ b = 29 \\ c = 40 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -23 \end{array} \right.$$

проверен
все "ок"



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5

$$a^2 + b = c^2$$

$$a^2 + b = c^2 + 9 - 6c + c - 1 = 289$$
$$= c^2 - 5c + 8 = 1000$$

$$20 \cdot 9 = 360 \quad c^2 - 5c - 992 = 0$$

$$+ 289$$
$$3969$$

$$c = 29 + 4 \cdot 992 = 11 \cdot 3$$

$$c \notin \mathbb{Z}$$

$$c^2 + 81 - 18c + c - 1 = 1000$$

$$c^2 - 17c + 920 = 0$$

$$\begin{array}{r} 3969 \mid 3 \\ 1323 \mid 3 \\ 441 \mid 7 \\ 63 \mid 7 \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 1210 \\ + 337 \end{array}$$

$$3969 \mid 11$$

$$\begin{array}{r} 992 \mid 2 \\ 496 \mid 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4000 \\ - 32 \\ \hline 3968 \\ + 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3983 \mid 11 \\ 363 \mid 11 \\ 33 \mid 11 \\ 3 \end{array}$$

6

2.1 $p=3$

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases}$$

$$29 \cdot 2 \cdot 11$$

$$(1000 - 10)4 = 4000 - 40 = 3960$$

$$a^2 + b = c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 1000$$

$$-3 \pm \sqrt{9 + 3960}$$

$$c^2 + 3c + 10 = 1000$$

$$c = \frac{-3 \pm \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 3}}{2}$$

$$c^2 + 3c = 990$$

$$c(c+3) = 990$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~2) $(a-c) = 1$
 $(b-c) = 1$~~
противоречие

$\times$ - противоречие

3) $(a-c) = -1$
 $(b-c) = p^2$ $\Rightarrow$ $a = c-1$
 $b = c+p^2$

$a < b$
 $c-1 < c+p^2$
 $p^2 < 1$ $\times$

4) $(a-c) = p^2$
 $(b-c) = 1$ $\Rightarrow$ $a = p^2 + c$
 $b = 1 + c$

$p^2 < 1$ ($a < b$)
 $\Rightarrow \times$

5) $(a-c) = -p^2$
 $(b-c) = -1$ $\Rightarrow$ $a = c-p^2$
 $b = c-1$

$a < b$ $\Rightarrow$

$b-a = -1+p^2 \neq 3$

из п. 2 $\Rightarrow p=3$

$\Rightarrow \begin{cases} a = c-9 \\ b = c-1 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Кривая задана на координатной
системе $\triangle ABC$ на координатной
вектор $\vec{AB}$ в данной задаче
 $\vec{AB}_1 \perp \vec{AC}$ (по свойству + р.д.б.)
 $\Rightarrow (\vec{AB}_1 = \vec{AA}_1 = \vec{CC}_1)$
 $\Rightarrow \vec{AA}_1 \perp \vec{AC}, \vec{CC}_1, \vec{AC}$

$\Rightarrow A, C, CA$ — прямоугольный

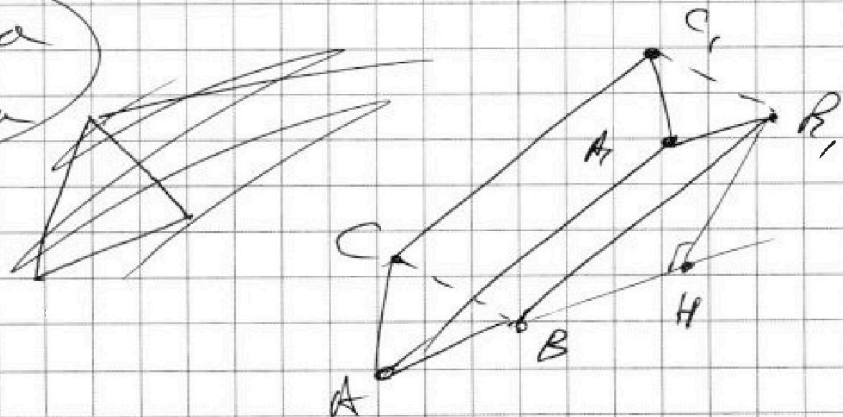
$$\sum \angle C, CA = 5 = a \cdot AA_1 \Rightarrow AA_1 = \frac{5}{a}$$

$$\sum \angle AA_1, A_1 = B_1 K \cdot AB = 6 \Rightarrow B_1 K = \frac{6}{a}$$

$$\text{Т. К. } \triangle B, B_1 K \Rightarrow KB^2 = \frac{25}{a^2} - \frac{36}{a^2} < 0$$

$\Rightarrow$ кривая пустая

3 вершины
неверны





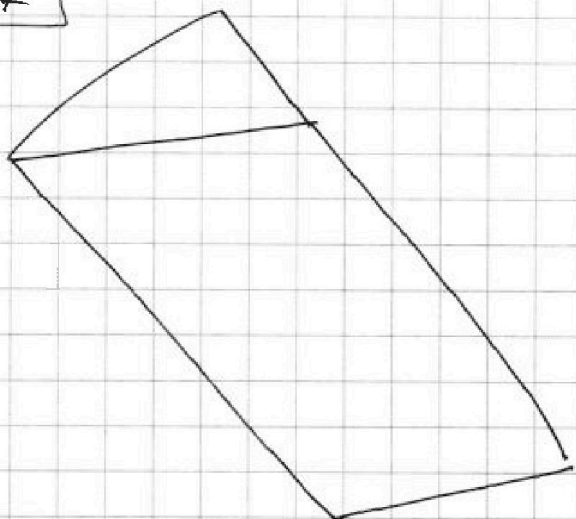
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
4 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

27



$$\angle AB = a$$

$$\Rightarrow S_{A, B, AB} = S_{C, B, BC} = b$$

$$\angle B, H \perp AB, H \in AD$$

$$B, L \perp AB, L \in CD$$

$$\Rightarrow B, H = B, L$$

$$BB_0 \perp ABC$$

$$\triangle B_0 B, L = \triangle B_0 B, H$$

$$\text{по т. о з х}$$

$$\Rightarrow B_0 L = B_0 H$$

$$\text{по т. о з х } \perp AC$$

$$(B_0 L \perp AC \Rightarrow B_0 H \perp AC)$$

$$B_0 B L = \triangle B_0 B H$$

$$\text{по кат и гип}$$

$$\Rightarrow B_0 B - \text{выс}$$

$$\angle ABC$$

$$B_0 B \perp AC (BC = AB)$$

$$B_0 B \perp AC \Rightarrow M$$

$$M - \text{середина } AC$$

$$\text{по т. о з х } \perp AC \quad B, M \perp AC$$

$$\text{по т. о проецирования биссектрисы}$$

$$(\angle B_0 BA = \angle B_0 BC) \Rightarrow$$

$$\angle ABA_1 = \angle CBA_1$$

$$AB_1 \perp AC \Rightarrow AB_1 \perp AC$$

$$S_{A, B, BA} = S_{C, B, BC}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

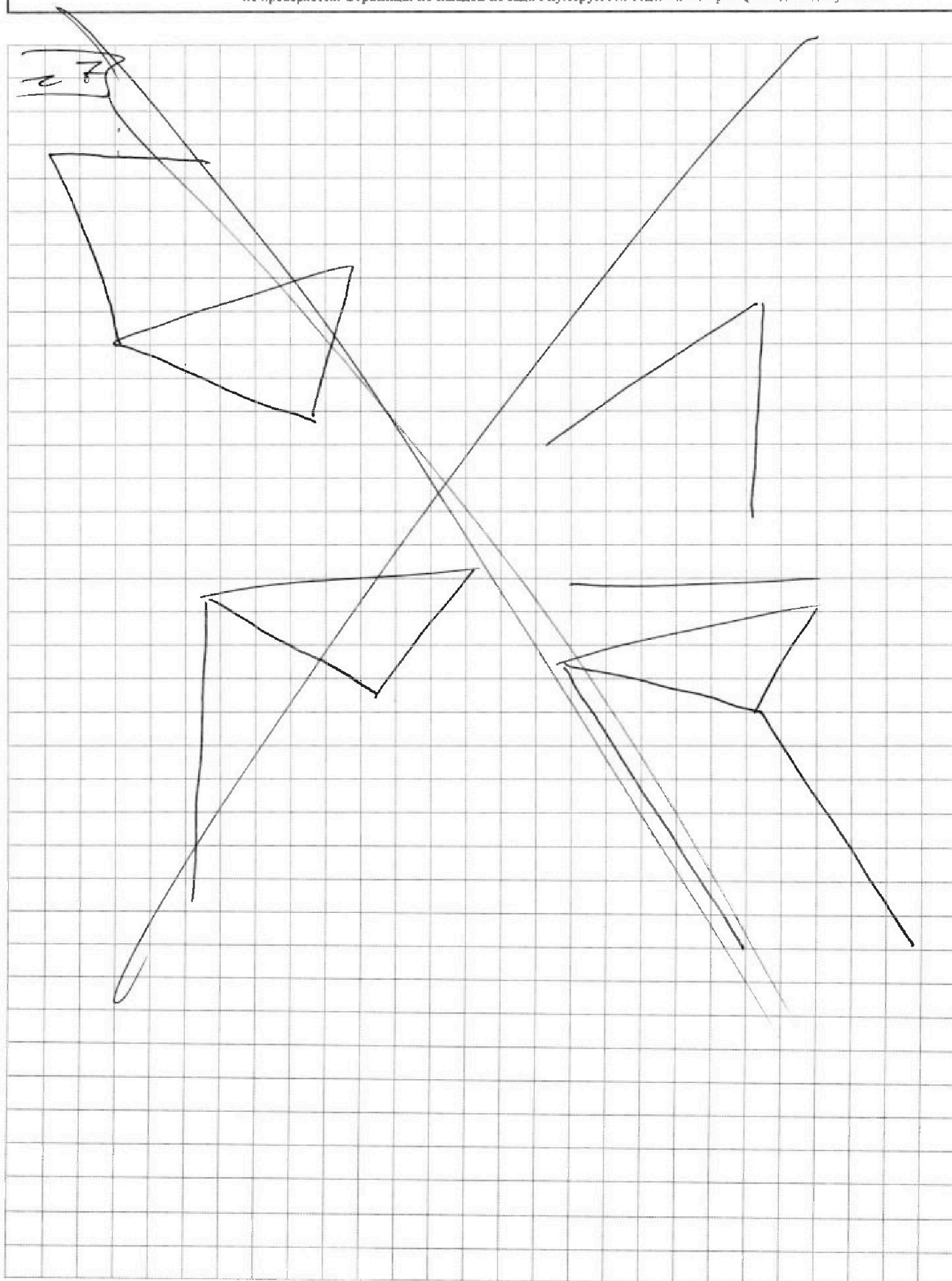
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





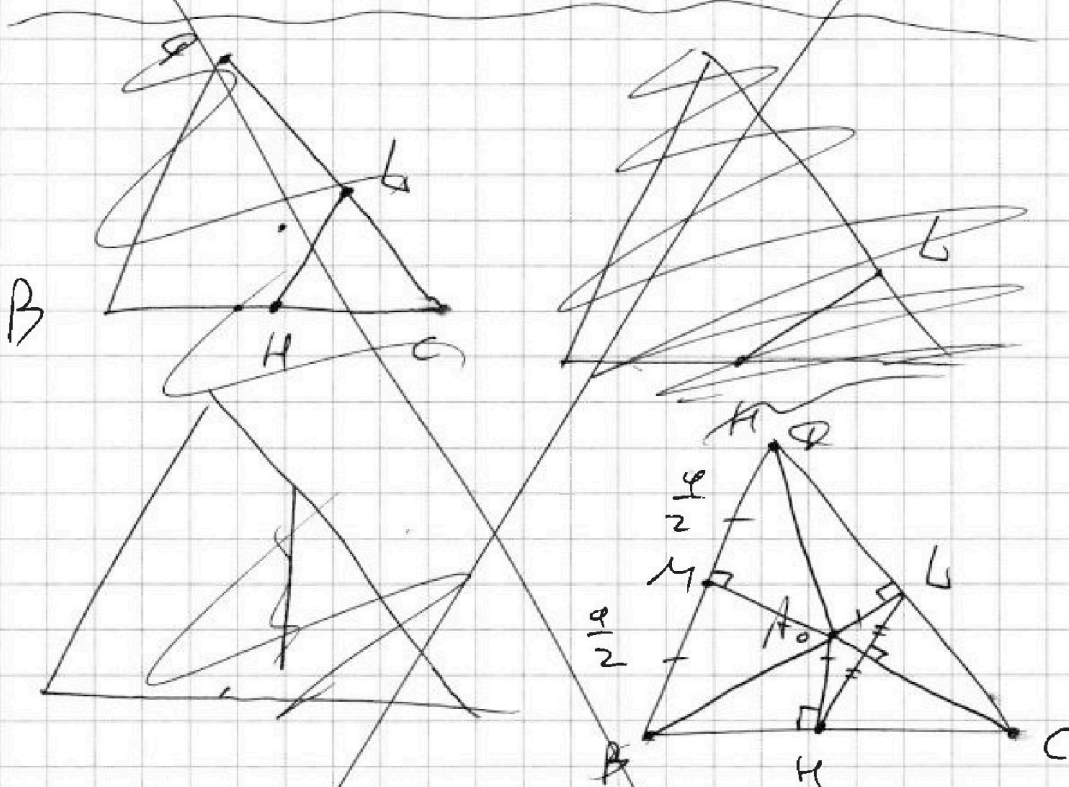
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ГОТОВИМ $\angle P A H$: $\angle P H A_0 = 90^\circ$ $\angle A_0 L C$
 $\angle A_0 M H \Rightarrow 0^\circ$



$$A_0 L = A_0 H \text{ (из 1.2)} \text{ и } A_0 C L = \Delta A_0 C H \text{ (кр. кат.)}$$

$$\Rightarrow A_0 C - \text{бисс. } \angle A C B \text{ и } A_0 C \cap B D = M$$

(т.к. $A_0 M \perp B D$) $A_0 C \perp H L$ (из симм. $\Delta A_0 L C$)

$$S_{B D A} = \frac{A M \cdot a}{2} = 5 \Rightarrow A M = \frac{10}{a} \mid \Rightarrow A A_0 = p$$

$$\text{по т. Пифагора в } \Delta A_0 M \Rightarrow A M^2 - A A_0^2 = M A_0^2$$

$$M A_0^2 = \frac{100}{a^2} - p^2$$



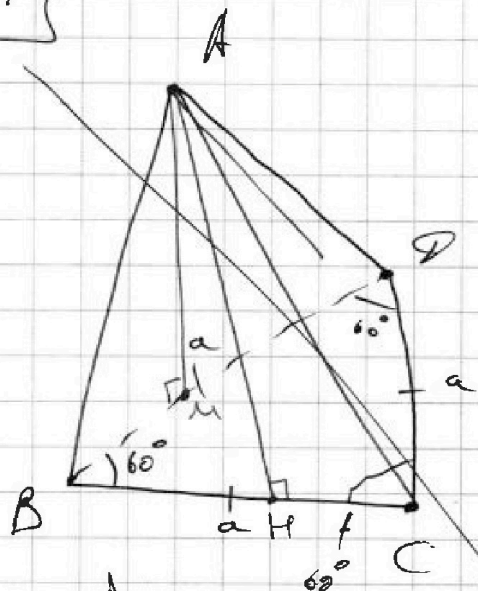
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

27



$$0) \angle B\varphi = \alpha$$

$$B\varphi = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 2\alpha$$

$$① S_{BC\varphi} = \frac{B\varphi \cdot \sqrt{3}}{4} = 4$$

$$\angle AH \perp BC, H \in BC$$

$$AM \perp B\varphi, M \in B\varphi$$

$$AL \perp \varphi C, L \in \varphi C$$

Σ*

без отрезков

$$S = S_{ABC} = S_{AC\varphi} \Rightarrow$$

$$\frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{AL \cdot AC}{2} = S$$

$$\Rightarrow AH = AL = \frac{12}{a}$$

$$\angle AQ \perp HL, Q \in HL$$

$$\angle AHL - \text{прямой}$$

$$QL = QH$$

② C - середина HL

$$\angle AA_0 \perp BC, A_0 \in (BC\varphi)$$

$$r \text{ и } s \text{ AA}_0 \text{ и } AA_0 \text{ и}$$

$$\text{равны по катетам} \Rightarrow A_0 L = A_0 H \Rightarrow A_0 \in \ell$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~27~~ $\triangle A_0 L \triangle A A_0 L \Rightarrow A_0 L^2 = AL^2 - AA_0^2$

$$A_0 L^2 = \frac{144}{a^2} - p^2 = A_0 H^2$$

$$S_{A_0 P A_0} = S_{A_0 C P} - 2S_{A_0 O C} =$$

$$= 4 - A_0 H \cdot a = \frac{M A_0 \cdot a}{2}$$

$$4 - A_0 H a = \frac{M A_0 \cdot a}{2}$$

$$4 - \left(\frac{144}{a^2} - p^2 \right) a^2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{100}{a^2} - p^2 \right) a^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} p^2 a^2 = t \\ 4 - \sqrt{144 - p^2 a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{100 - p^2 a^2} \end{array} \right\}$$

$$16 + 144 - t - \sqrt{144 - t} = \frac{1}{4} (100 - t)$$

$$160 - t - \sqrt{144 - t} = 25 - \frac{t}{4}$$

$$135 - \sqrt{144 - t} = \frac{3t}{4}$$

~~$135 \cdot 4 = 540 + 10t$~~
 ~~$135 - \frac{3t}{4} = \sqrt{144 - t}$~~

$$135 - \frac{3t}{4} = \sqrt{144 - t}$$

$$540 - 3t = 32 \sqrt{144 - t}$$

$$540^2 + 9t^2 - 6 \cdot 540t = 32^2 (144 - t)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) 3 счел $p \geq 0$

$$f(-1) = 4$$

$$f(1) = 28$$

$$f'(x) = 2x + 1$$

точка мин / макс
тогда $p = 2$

$$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} > 1$$

$$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} < p$$

$$0 < \sqrt{1-p} < p-1 < 0$$

$$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} < -1$$

$$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} < p$$

$$\frac{1 + \sqrt{1-p}}{p} \wedge p$$

$$\frac{\sqrt{1-p}}{1} < \frac{p+1}{1}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} > -1$$

$$0 < \sqrt{1-p} < 1-p < 0$$

$$1-p < 1+2p+p^2$$

$$0 < p^2 - p$$

$$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} < 1$$

$$\frac{\sqrt{1-p}}{1} < \frac{p+1}{1}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

