



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение $a_{13} = 94 \cdot \frac{1}{2}^6 = \frac{5}{4} \cdot 8 = 10$ $\Rightarrow$ прогрессия с.х.
 $a_{15} = a_{13} \cdot \frac{1}{2}^2 = 10 \cdot 2 = 20$

Ответ: 3; -5.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

Пусть $\{a_n\}$ - данная прогрессия, q - её знаменатель.

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \quad a_{13} = 5-x, \quad a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

$$(x+1)^3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1.$$

$$a_{15} = a_7 \cdot q^8.$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = q^8 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$(x+1)^2 \sqrt{13x-35} = q^8 \sqrt{13x-35}.$$

1) $13x-35=0 \Leftrightarrow a_7 = a_{15} = 0 \Rightarrow$ прогрессия состоит только

из 0.

$$13x-35=0$$

$$x = \frac{35}{13} \Rightarrow a_{13} = 5-x = \frac{30}{13} \neq 0 \Rightarrow \text{такой прогрессии нет} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13x-35 \neq 0.$$

$$2) 13x-35 \neq 0$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

$$a_{15} = a_{13} \cdot q^2$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = (5-x) \sqrt{|x+1|}$$

$$\bullet x+1 \geq 0 \Rightarrow |x+1| = x+1.$$

$$\sqrt{x+1} (\sqrt{13x-35} - 5+x) = 0.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \neq -1 \Rightarrow \sqrt{13x-35} - 5 + x = 0.$$

$$\sqrt{13x-35} = 5-x \Rightarrow x \leq 5.$$

$$13x-35 = x^2 - 10x + 25.$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0.$$

$$\begin{cases} x = 20 > 5 \Rightarrow \text{не подходит.} \\ x = 3. \end{cases}$$

$$\text{При } x=3, a_4 = \frac{1}{4}, a_{13} = 2, a_{15} = 4, q = \pm \sqrt{2}$$

$$a_{13} = q^9 \cdot a_4 = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2.$$

$$a_{15} = a_{13} \cdot q^2 = 2 \cdot 2 = 4. \Rightarrow \text{прогрессия есть.}$$

$$x+1 < 0 \Rightarrow |x+1| = -x-1, x < -1.$$

$$\sqrt{(35-13x)(x+1)} = (5-x)\sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{x-1}(\sqrt{35-13x} - 5 + x) = 0$$

$$x \neq -1 \Rightarrow 5-x = \sqrt{35-13x} \Rightarrow x \leq 5.$$

$$x^2 - 10x + 25 = 35 - 13x.$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0.$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ x = 2 > -1 \Rightarrow \text{не подходит.} \end{cases}$$

$$\text{При } x=-5, a_4 = \frac{5}{4}, a_{13} = 10, a_{15} = 20, q = \pm \sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим ур-е (2):

1) $y < -1$.

$$|y+1| + 3|y-12| = -y-1 + -3y+36 = 35-4y$$

$$35-4y > 35+4 = 39 \text{ при } y < -1, \text{ т.к. } 35-$$

$$-4y \downarrow \Rightarrow |y+1| + 3|y-12| > 39 \text{ при } y < -1.$$

2) $-1 \leq y \leq 12$.

$$|y+1| + 3|y-12| = y+1 - 3y+36 = 37-2y$$

$$37-2y > 37-2 \cdot 12 = 13 \text{ при } -1 \leq y < 12,$$

$$\text{т.к. } 37-2y \downarrow \Rightarrow |y+1| + 3|y-12| > 13 \text{ при } -1 \leq y < 12.$$

3) $y \geq 12$

$$|y+1| + 3|y-12| = y+1 + 3y-36 = 4y-35 \geq 13$$

при $y \geq 12$, равенство при $y=12$, т.к. $4y-35$

Таким образом $|y+1| + 3|y-12| \geq 13$.

$$\sqrt{169-z^2} \leq \sqrt{169} = 13, \text{ т.к. } z^2 \geq 0, \text{ равенство при } z=0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[13]{y+1} + 3\sqrt[13]{y-12} = \sqrt[13]{69-2^3} \quad \Rightarrow \sqrt[13]{69-2^3} = 13, \quad \sqrt[13]{y+1} + 3\sqrt[13]{y-12} = 13$$

$$\Rightarrow y=12, z=0.$$

Подставим в (1).

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{x+12-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}, \quad -3 \leq x \leq 4.$$

$$\sqrt{x+3} (2\sqrt{4-x} - 1) = 5 - \sqrt{4-x}$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{5 - \sqrt{4-x}}{2\sqrt{4-x} - 1}$$

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x})^2 = (2\sqrt{(4-x)(x+3)} - 5)^2$$

$$x+3 + 4-x - 2\sqrt{(4-x)(x+3)} = 4(4-x)(x+3) + 25 - 20\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

$$18\sqrt{(4-x)(x+3)} = 4(4-x)(x+3) + 18.$$

$$t = (4-x)(x+3), \quad t \geq 0, \text{ т.к. под корнем.}$$

$$18\sqrt{t} = 4t + 18.$$

$$9\sqrt{t} = 2t + 9.$$

$$81t = 4t^2 + 81 + 36t.$$

$$4t^2 - 45t + 81 = 0.$$

$$(t-9)(4t-9) = 0$$

$$\begin{cases} t=9 \\ t=\frac{9}{4} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☒☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(4-x)(x+3)=9$$

$$(4-x)(x+3)=\frac{9}{4}$$

$$-x^2+x+12=9$$

$$-x^2+x+12=\frac{9}{4}$$

$$x^2-x-3=0, \quad \frac{D}{4}=13$$

$$4x^2-4x-39=0, \quad \frac{D}{4}=60$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} - \text{подходит}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} - \text{не подходит (можно убедиться подстановкой)}$$

$$x = \frac{2 + 4\sqrt{10}}{4} = \frac{1 + 2\sqrt{10}}{2} - \text{не подходит (можно убедиться подстановкой)}$$

$$x = \frac{2 - 4\sqrt{10}}{4} = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2} - \text{подходит}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; 12; 0 \right), \quad \left(\frac{1 - 2\sqrt{10}}{2}; 12; 0 \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3.

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p.$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = p$$

$$3t = \cos x, t \in [-1; 1].$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p.$$

$$\left(\sqrt[3]{4} \cdot t + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 - \frac{7}{2} = p, \text{ т.к. } \left(\sqrt[3]{4} \cdot t + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 =$$

$$= 4t^3 + 3 \cdot \sqrt[3]{16} \cdot t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{2} = 4t^3 + 6t^2 + 3t + \frac{1}{2}.$$

$$\left(\sqrt[3]{4} \cdot t + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 = p + \frac{7}{2}.$$

$$\sqrt[3]{4} \cdot t + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{p + \frac{7}{2}}$$

$$t = \frac{\sqrt[3]{p + \frac{7}{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \geq -1 \\ \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p+7 \geq -1 \\ 2p+7 \leq 27 \end{cases} \Leftrightarrow p \in [-4; 10].$$

$$\begin{cases} x = \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \right) + 2\pi n \\ x = -\arccos \left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \right) + 2\pi n \end{cases}$$

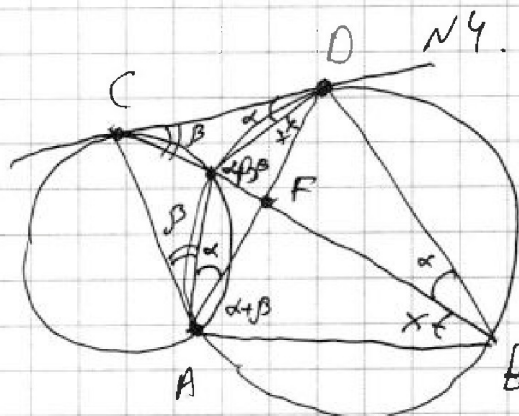
Ответ: При $p \in [-4; 10]$; $x = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть ~~CFE~~ $AD \cap CE = F$.

Пусть $\angle CED = \alpha$, $\angle CAB = \beta$, $\angle CEA = x$.

1) $\angle BCD = \angle CAB = \beta$, $\angle CDB = \angle BED = \alpha$ из-за касания $\Rightarrow \angle DBE = \alpha + \beta$, как внешний в $\triangle CDB \Rightarrow \angle DAE = \angle DBE = \alpha + \beta$ из вписанности.

$\angle BAD = \angle BED = \alpha$ из вписанности $\Rightarrow$

$\angle CAD = \alpha + \beta = \angle DAE \Rightarrow AF$ - биссектриса в $\triangle ACE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$$

Пусть $AC = 3b$, $AE = 10b$.

2) из $\triangle DAE$ ~~$\angle ADE = 180^\circ - (\alpha + \beta) = (2 + x)$~~ $\angle ADE = 180^\circ - (\alpha + \beta) = (2 + x)$

~~$\angle BDA = \angle BEA = x$~~ из вписанности $\Rightarrow$

$\angle CDA = \angle DEA = \alpha + x \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AED$ по

2-м углам ($\angle DAE = \angle DAC = \alpha + \beta$, $\angle DEA = \alpha + x = \angle CDA$)

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD^2 = AE \cdot AC = 10b \cdot 3b = 30b^2$$

$$\Rightarrow AD = b\sqrt{30} \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{3b}{b\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{10} \text{ Гблет: } \sqrt{10} : \sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

стороны от l_1 , все 4 клетки с другой. Прямой
4 клетки с одной стороны однозначно задает
всё мн-во X . l_1 разбивает ~~прямоугольник~~ на 2 ~~прямоугольника~~
площадью 25000 кв. $\Rightarrow |A| = C_{25000}^4$ (число
способов выбрать 4 клетки из 25000).

Из аналогичных соображений (в рассуждениях
~~место~~^{хот} поменять только l_1 на l_2) $|B| = |C| = C_{25000}^4$.

5) из ф-л включений и исключаемых:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 3 C_{25000}^4 - 2 C_{12500}^2$$

Ответ $3 C_{25000}^4 - 2 C_{12500}^2$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

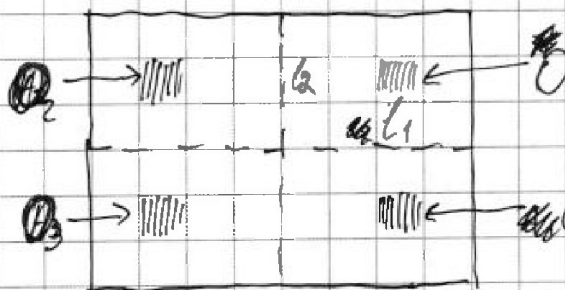
Пусть A — множество всех множеств из условия, симметричных относительно центра, B — множество симметричных относительно одной средней линии (пусть той, у которой длина 200), C — мн-во симметр. отн. другой ср. линии.

1) Покажем, что $A \cap B = B \cap C = A \cap C = A \cap B \cap C$.

Т.к. фигура имеет четные стороны, ср. линии проходят по линиям сетки, а центр — узел сетки.

Рассмотрим мн-во X , симметричное относительно

2-х ср. линий, покажем, что оно симметрично отн. центра



Пусть $O \in X$; ~~тогда~~

l_1, l_2 — ср. линии; O_1, O_2 — симметрии

O отн. l_1 и l_2 , O_3 — симметрия

O_2 отн. центра.

Тогда $O_2, O_1 \in X$, т.к. X симметрично отн. l_1 и l_2 .

O_3 — симметрия O_1 отн. l_2 , O_2, O_3 — симметрия

O_2 отн. центра. $\Rightarrow O_3 \in X \Rightarrow X$ симметрично отн. центра,

т.к. для произв. ~~любого~~ ^{любого} $O \in X$ доказано, что $O \in X$.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

симметрична отн. центру тогда $\Leftrightarrow B \cap C = A \cap B \cap C$.

Пусть теперь X - множество симметричное отн. центру и l_1 . $O \in X$. O_1, O_3, O_2 - симметрии O отн. l_1 , центра и $l_2 \Rightarrow O_1, O_3 \in X$. O_2 - симметрия O_1 отн. центра и симметрия O_3 отн. $l_1 \Rightarrow O_2 \in X \Rightarrow X$ симметрично отн. l_2 . Аналогично при X симметр. отн. центру и $l_2 \Rightarrow A \cap C = B \cap C = A \cap B = A \cap B \cap C$.

2) Посчитаем количество множеств в $A \cap B \cap C$.

l_1 и l_2 делят прямоугольник на 4 ~~квадрата~~ прямоугольника. 100×125 . Для любого $X \in A \cap B \cap C$ в каждом из этих 4 прямоугольников есть по 2 клетки. Парой 2 клетки в одном квадрате однозначно задают свои симметрии ост. мн-во $\Rightarrow |A \cap B \cap C| = C_{125 \cdot 100}^2 = C_{12500}^2$ (число способов выбрать 2 клетки в одном прямоугольнике ~~12500~~ $125 \cdot 100$).

3) Посчитаем $|A|$, $|B|$, $|C|$.

Рассмотрим $X \in A$. В нём есть 4 клетки соседней



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$a+b^2=560.$$

~~квадраты целых чисел~~

$$(a-c)(b-c) = p^2, \quad p - \text{простое} \Rightarrow \text{или } a-c = b-c = p,$$

$$\text{или } a-c = b-c = -p, \quad \text{или } a-c = 1, b-c = p^2, \quad \text{или } a-c = p^2, b-c = 1$$

~~Рассмотрим~~ 3-й случай невозможен, т.к. ~~а-с > b-с~~ $a-c > b-c$, но $p^2 > 1$ (по усл. $a > b$).

В 1-м и 2-м случаях $a=b$, что противоречит условию $\Rightarrow a-c = p^2, b-c = 1 \Rightarrow a-b = p^2 - 1$.

Если $p \neq 3$, то $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, т.е. при $p \neq 3$ $(p^2) \not\equiv 3$,

т.е. $a-b \not\equiv 3$, что невозможно $\Rightarrow p \equiv 3 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a-c = 9, b-c = 1.$$

$$\begin{cases} a-c=9 \\ b-c=1 \\ a+b^2=560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c+9 & (1) \\ b=c+1 & (2) \\ c+c+1+c^2+2c+1=560 & (3) \end{cases}$$

(3):

$$c^2 + 3c - 550 = 0.$$

$$\begin{cases} c = 22 \\ c = -25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 31 \\ b = 23 \\ c = 22 \\ a = -16 \\ b = -24 \\ c = -25 \end{cases}$$

Легко догадаться, что оба варианта подходят

Ответ: $(31; 23; 22), (-16; -24; -25)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
8 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } S_{AA_1C} = S_{BB_1C} = 4, \quad S_{AA_1B_1B} = 3. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{так как } p(C_1; AA_1C) = p(C_1; BB_1C) = \frac{1}{2} \text{ т.к.}$$

$$S_{AA_1C} = p(C_1; AA_1C) \cdot AB = p(C_1; AC) = \frac{1}{2} \cdot 4 = S_{BB_1C} =$$

$$= \frac{1}{2} p(C_1; BC). \Rightarrow C_1 \text{ равноудалена от } AC$$

и $BC \Rightarrow$ проекция C_1 на (ABC) равноудалена от (AC) и (BC) , т.е. C_1 лежит на оси симметрии $\triangle ABC$, проходящей через C .

$$AB \parallel A_1B_1 \parallel A_1'B_1', \quad BC \parallel B_1C_1 \parallel B_1'C_1', \quad AC \parallel A_1C_1 \parallel$$

$$\parallel A_1'C_1' \Rightarrow \triangle A_1'B_1'C_1' = \triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC, \text{ т.к.}$$

$$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1) \Rightarrow \text{по лемме } S_{A_1B_1C_1} +$$

$$+ S_{AA_1C_1} = S_{AA_1B_1B}.$$

$$\text{В силу симметрии } \angle((ABC); (AA_1C)) = \angle((ABC); (AB, BC)) = \alpha,$$

$$\text{пусть } \angle((ABC); (AB, B_1)) = \beta,$$

$$\text{тогда } S_{A_1B_1C_1} = 4 \cdot \cos \alpha = S_{AA_1C_1}, \quad S_{A_1B_1A_1A} =$$

$$= 3 \cos \beta \Rightarrow 8 \cos \alpha = 3 \cos \beta.$$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{p(A_1; AC)}{p(A_1; AB)} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} 8 \cos \alpha = 3 \cos \beta \\ 4 \cos \alpha = 3 \cos \beta \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

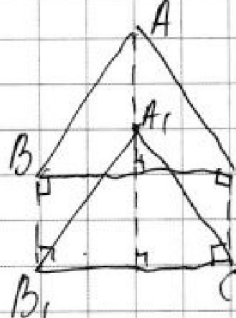
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

Лемма:

Рассмотрим на плоскости 2 рис. ~~в~~ треугольника, $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C_1$, причем AA_1 - ~~линия~~ их общая ось симметрии. и они совмещаются параллельным переносом на $\vec{AA_1}$. Тогда $S_{AB_1A_1} + S_{ACC_1A_1} = S_{B_1C_1C}$.



Доказ.

$$\angle AA_1 = \angle BB_1 = \angle CC_1 = h, AB = BC = AC =$$

$$2 \angle A_1C_1 = \angle B_1C_1 = \angle A_1B_1 = a.$$

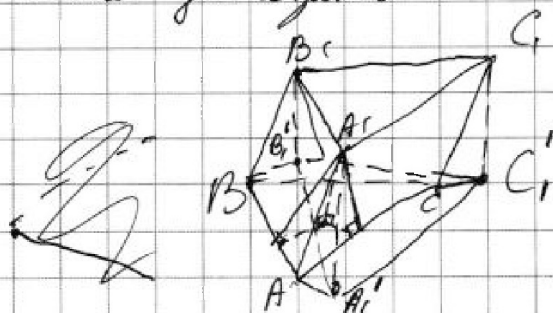
$$S_{B_1C_1C} = a \cdot h.$$

$$S_{AB_1A_1} = AB \cdot AA_1 \cdot \sin \angle BAA_1 = ah \sin 30^\circ = \frac{1}{2} ah. \quad \Rightarrow$$

$$S_{ACC_1A_1} = AA_1 \cdot AC \cdot \sin \angle CAA_1 = \frac{1}{2} ah$$

$$\Rightarrow S_{ACC_1A_1} + S_{AB_1A_1} = \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} ah = ah = S_{B_1C_1C}.$$

Лемма доказана



$ABCA_1B_1C_1$ - данная призма.

A_1', B_1', C_1' - проекции A_1, B_1, C_1 на (ABC) .

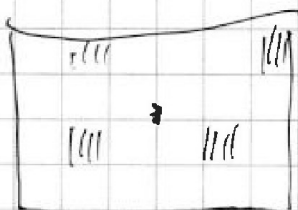
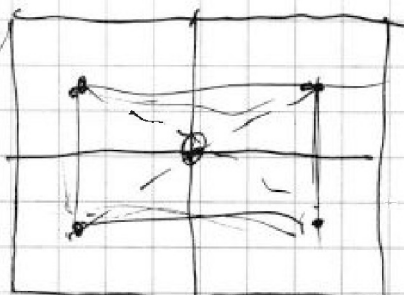
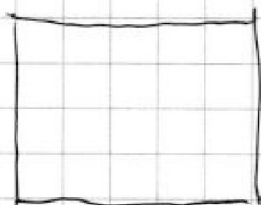


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

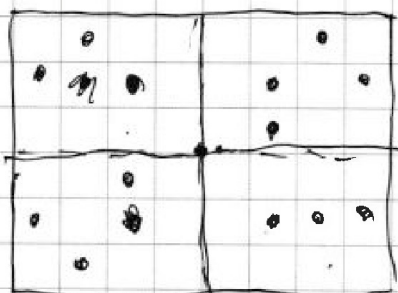
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$4x^3 + 6x^2 + 3x - 3 = 0$$
$$12x^2 + 12x + 3 = 0$$

$$(4x+1)^2 = 0 \quad x = -\frac{1}{4}$$

$$25000 - 200 = 50000$$



$$25000 \cdot 25000 = 625000000$$

$$3 \cdot 25000 = 75000$$

$$\frac{1}{2}$$

$$6053x + 1605x - 607x - 3$$

$$4x^3 + 6x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$x^3 + 3(x^2 + x - 1)$$

$$\sqrt[3]{4}x$$

$$6 = 3 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot x^2 \cdot y$$

$$x = \sqrt[3]{2} \cdot y$$

$$\frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

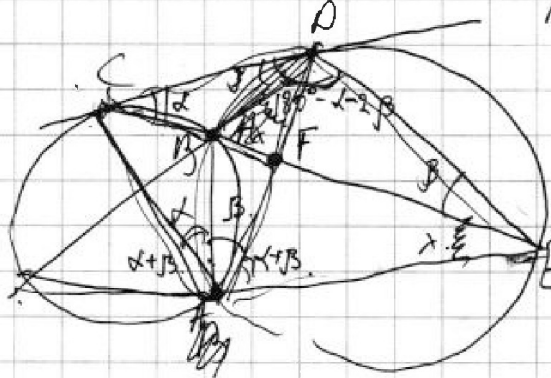


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p. \quad a - b = 3.$$



$$\frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$$

$$CD \parallel BE \sim CED.$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{CB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

$$(a-c)(b-c) = p^2.$$

$$(a-b) = 3$$

$$180^\circ - 2 - 2\beta - \gamma.$$

118.

$$a + b^2 = 560.$$

$$\frac{-3 + 19}{2} = 22.$$

$$560 \equiv 2.$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AD}.$$

$$AD^2 = 30b^2.$$

$$AD = \sqrt{30}b.$$

$$b = 3 \quad a =$$

$$b = 8$$

$$b = 6$$

$$b = 12$$

$$b = 15$$

$$b = 18$$

$$a = 2!$$

$$a + b^2 = 2.$$

$$b^2 = 0. \quad a = 2$$

$$b^2 = 1$$

$$b = -2!$$

$$3 + 4.550 = -2209.$$

$$b^2 = a^2 + 1 - 2a \cos \alpha.$$

$$a - c \neq p$$

$$b - c = p.$$

$$a = b.$$

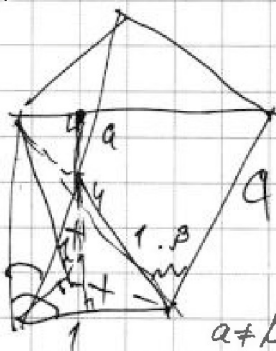
$$a - c = p^2$$

$$b - c = 1.$$

$$a = p^2 + c$$

$$c + 1 = b.$$

$$p^2 + c + c^2 + 2c + 1 = 560$$



$$a \sin \alpha = 4.$$

$$a \sin \beta = 3.$$

$$c^2 = a^2 + 1 - 2a \cos \alpha.$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \alpha = 4x$$

$$\sin \beta = 3x.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4x}{3}$$

$$329$$

$$\frac{168}{2209}$$



$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \alpha.$$

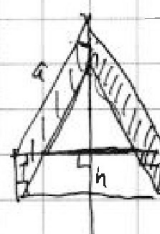
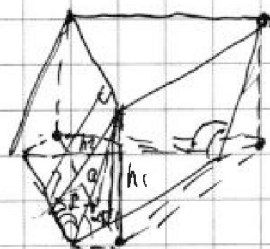


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$ah \sin 30^\circ$
 ~~ah~~

$$8 \cdot \cos \alpha = 3 \cos \beta$$

$$h_2 = a \sin \beta$$
$$h_1 = a \sin \alpha$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{h_1}{h_2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a_{11}}{q^4} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = a_{11} \cdot q^4$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$\frac{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}{2} = \frac{q^4 \cdot \sqrt{5}}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \cdot \frac{4-2\sqrt{10}}{1-\sqrt{5}}$$

$$\frac{-100}{-64} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\sqrt{5} - 1 = 2$$

$$\sqrt{4-12\sqrt{10}} = 2 \cdot \frac{-100}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2} = 2$$

$$20$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x+3} + 2$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-2^2}$$

$$y < -1$$

$$\frac{7}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13}$$

$$2=0$$

$$\frac{7}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = 12$$

$$-y - 12 - 3y + 36$$

$$\frac{13+1}{4} = \frac{7}{2}$$

$$35 = 4y$$

$$y \geq -1$$

$$7 + \sqrt{13}$$

$$y = 12 - \min$$

$$y+1 - 3y + 36 = 37 - 2y$$

$$13$$

$$9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}} - \sqrt{4-\frac{1+\sqrt{13}}{2}} = 1$$

$$3 + \frac{1-\sqrt{13}}{2} = \frac{7-\sqrt{13}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2$$