



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

Пусть $b_n = b_1 \cdot d^{n-1}$ - n -ый член геометрической прогрессии. Тогда

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = b_n = b_1 \cdot d^3$$

$$x+4 = b_{10} = b_1 \cdot d^9$$

$$\sqrt{(15x+6)(x-3)} = \cancel{b_4} = b_{12} = b_1 \cdot d^{11}$$

Одз:

$$(x-3)(15x+6) > 0, \quad x+4 \neq 0 \quad (b_n \neq 0), \quad \text{т.е.}$$

$$\begin{cases} x \neq -4 \\ x > 3 \\ x < -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -\frac{2}{5} \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$\frac{b_{12}}{b_4} = d^8 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} \stackrel{\text{ОДЗ}}{=} (x-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^4 = |x-3| - \text{имеет решения} \checkmark \text{ при } x \in \mathbb{R}$$

$$b_{10} \cdot b_{12} = b_1^2 \cdot d^{20} \Leftrightarrow b_1^2 \cdot (d^5)^4 = (x+4) \cdot \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow b_1^2 \cdot |x-3|^5 = (x+4) \sqrt{(15x+6)(x-3)} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow b_1^2 = \frac{(x+4) \sqrt{(15x+6)(x-3)}}{|x-3|^5} - \text{имеет решения для } b_1$$

$$\text{при } \frac{(x+4) \sqrt{(15x+6)(x-3)}}{|x-3|^5} \stackrel{\text{ОДЗ}}{> 0} \Leftrightarrow x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.О. Имеем:

$$\begin{cases} \begin{cases} x > 3 \\ x < -\frac{2}{5} \\ x \neq 4 \end{cases} < \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -4 < x < -\frac{2}{5} \end{cases} \\ x \neq 4 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-4; -\frac{2}{5}) \cup (\frac{2}{5}; 3; +\infty)$.

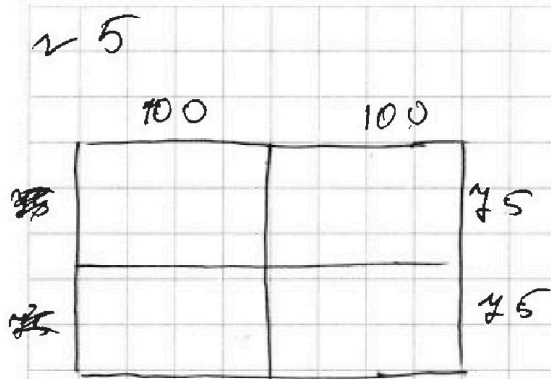


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что для того, чтобы однозначно определить фигуру с симметрией достаточно ~~разнозначные~~ $\frac{8}{2} = 4$ метки в одной половине закрасить ~~прямоугольника~~ и отразить (относительно центра горизонтально или вертикально).

Т.о. для каждого из 3 ~~вариантов~~ ^{вариантов симметрии} по-60 способов будет $C_{\frac{200 \cdot 150}{2}}^4 = C_{15000}^4$ (где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - количество сочетаний из n по k).

Также заметим, что если фигурой является симметричной для каких-то двух вариантов симметрии (относительно центра, горизонтально или вертикально), то он будет третьим вариантом симметрии точки будет выполняться.

Т.е. чтобы найти количество фигур пересечения трёх симметрий достаточно закр

Для того, чтобы однозначно определить пересечение достаточно ~~взять~~ $\frac{8}{4} = 2$ метки в четверти ~~закрасить~~ ^{закрасить} и отразить



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

их по горизонтальным, вертикальным и относительно центра.

$$\begin{aligned} \text{Т.о.} \quad \text{по-во} \quad \text{случаев пересечения} &= \frac{C_{150,000}^2}{4} \\ &= C_{7500}^2, \end{aligned}$$

Итак
значит всего ~~случаев~~ случаев с помятой
одна из данных симметрий $3 \cdot C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6

Пусть n - простое число, тогда что

$$(a-c)(b-c) = n^2, \text{ тогда}$$

Т.к. $a-c > b-c$, $(a-c) \in \mathbb{Z}$, $(b-c) \in \mathbb{Z}$ и n - простое число, то $(a-c) = n^2$, $(b-c) = 1$, т.е.

$$c = b-1,$$

$$a-c = n^2 \Leftrightarrow a-b+1 = n^2 \Leftrightarrow a-b = n^2-1$$

По уму $(a-b) \nmid 3$, т.е. $n^2 \nmid 3$.

Заметим, что n может иметь следующие остатки при делении на 3: 0 и 1. ($n \equiv 0, 1, 2 \Leftrightarrow n^2 \equiv 0, 1$)

Т.е. $n^2-1 \nmid 3$ тогда и только тогда, когда $n^2 \equiv 3$, т.е. $n=3$.

Имеем:

$$\begin{cases} c = b-1 \\ a-b = 3^2-1 \\ a+b^2 = 820 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b-1 \\ a = 8+b \\ b^2+b-812=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b-1 \\ a = 8+b \\ \begin{cases} b = -29 \\ b = 28 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -21, b = -29, c = -30 \\ a = 36, b = 28, c = 27 \end{cases}$$

Ответ: $\{(-21; -29; -30); (36; 28; 27)\}$.

прям. $\triangle BLM \cong \triangle BMK$ по гипотену (HL=MK и $\angle M$ общий)
(HL-общая). Отсюда:



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

И сумма:

~~$LB = \frac{1}{2} AB \cdot \sin 30^\circ$~~
 ~~$MB = h \cdot \sin \beta$~~
 $M \in MB$ (оно-се $\angle ABC$)

$$MB = \frac{h}{\sin \beta}$$

$$LB = MB \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}h}{2 \sin \beta}$$

$$MM_1 = \frac{h}{\sin \beta}$$

$$AC \perp MB \text{ и } AC \perp MM_1, \text{ т.е. } AC \perp MB, \text{ т.е. } AC \perp MM_1$$

$$AC \perp MM_1, \text{ т.е.}$$

$$S_{AA,CC} = MM_1 \cdot AC = \frac{h}{\sin \beta} \cdot AC = \frac{2h}{\sin \beta}$$

Умножим:

$$S_{AA,CC} = u = \frac{2h}{\sin \beta}, \quad S_{AA,B,B} = \frac{2h}{\sin \beta} = 5, \frac{\sin \beta}{\sin \beta} = 5$$

$$B, B = \frac{h}{\sin \beta}$$

$$B, L = \frac{h}{\sin \beta} = \frac{5h}{4 \sin \beta} > B, B, \text{ т.е. гипотенуза больше катета, т.е. не MB.}$$

$$LB = \frac{\sqrt{3}h}{2 \sin \beta}$$

$$B, B^2 = B, L^2 + BL^2$$

$$\frac{h^2}{\sin^2 \beta} = \frac{25h^2}{16 \sin^2 \beta} + \frac{3h^2}{4 \sin^2 \beta}, \quad \frac{1}{\sin^2 \beta} = \frac{25}{16 \sin^2 \beta} + \frac{3}{4 \sin^2 \beta}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{25}{16 \sin^2 \beta} + \frac{3}{4 \sin^2 \beta}$$

т.е. не существует призм, с р/с треугольником в основании и высотой 5, 5 и 4.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{9}{16 \sin^2 \beta} - \frac{3}{4 \sin^2 \beta} = -\frac{3}{4}$$

$$+ \frac{3}{16 \sin^2 \beta} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \beta} = 4$$

$$\frac{1}{\sin \beta} = 2$$

$$S_{AA_1C_1C} = \frac{2h}{\sin \beta} = 4, \quad 2h \cdot 2 = 4, \quad h = 1$$

Ответ: ~~4~~ 1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

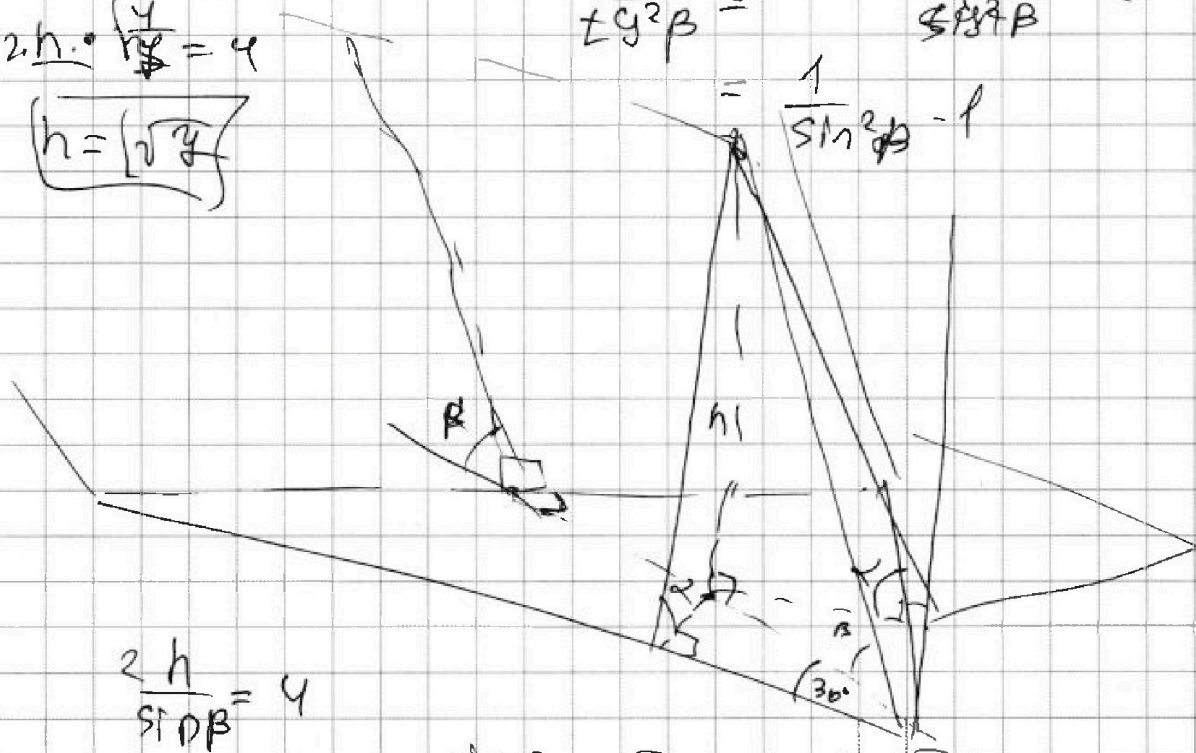
$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{3}{4 \tan^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta}$$

$$2h \cdot \frac{4}{h} = 4$$

$$h = \sqrt{4}$$

$$\frac{1}{\tan^2 \beta} = \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \beta} - 1$$



$$\frac{2h}{\sin \beta} = 4$$

$$\frac{2h}{\sin \alpha} = 5$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{5}{4}, \quad \sin \beta = \frac{5}{4} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \sin \beta$$

$$h / \sin \alpha = \frac{5h}{4 \sin \beta}$$

$$\frac{h}{\sin \beta} = \frac{4h}{5 \sin \alpha}$$

$$\left(\frac{h}{\sin \alpha} \right)^2 + \left(\frac{h}{\tan \alpha} \cdot \cos 30^\circ \right)^2 + \left(\frac{5h}{4 \sin \beta} \right)^2 = \left(\frac{h}{\sin \beta} \right)^2$$

$$\frac{3}{4 \tan^2 \beta} + \frac{25}{16 \sin^2 \beta} = \frac{1}{\sin^2 \beta}$$

$$1 \frac{3}{4} t^2 - \frac{3}{4} + \frac{25}{16} t^2 = t^2$$

$$\frac{3}{4} t^2 + \frac{25}{16} t^2 = \frac{3}{4}$$

$$t^2 + \frac{25}{4} t^2 = 1$$

$$\frac{29}{4} t^2 = 1$$

$$t = \sqrt{\frac{4}{29}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{2h}{\sin \alpha} = 5$
 $\frac{2h}{\sin \beta} = 4$

$p = p \cos^2 x + p \sin^2 x$
 $3 \cos 2x = 4 \cos^2 x - 3 \sin^2 x$
 $\cos 3x + 6 \cos x$
 $4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 4 \cos^3 x + 3 \cos x$
 $4 \cos^3 x - 3 \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$
 $3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x + p$

$\sqrt{\frac{h^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{3}{4 \tan^2 \alpha}} = 2h \cdot \frac{1}{\tan \alpha}$
 $\frac{1}{\tan^2 \alpha} = \sin^2 \alpha - 1$
 $\frac{3}{4} =$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a > b$, $a - b \neq 3$, $(a-c)(b-c) = n^2, n \in \mathbb{N}$.

пробное

$$a + b^2 = 820$$

$$a - b + 1 = n^2$$

$$b - c = 1, (a - b + 1) = n^2, n \in \mathbb{N}$$

$$c = b - 1$$

$$n^2 = 3k + 1$$

$$820 = 2 \cdot 410 = 2^2 \cdot 5 \cdot 41$$

$$(a - b + 1)^2 = a^2 + b^2 + 1 - 2ab + 2a - 2b = n^4$$

$$a - b + 1 = n^2$$

$$a = 8 + b$$

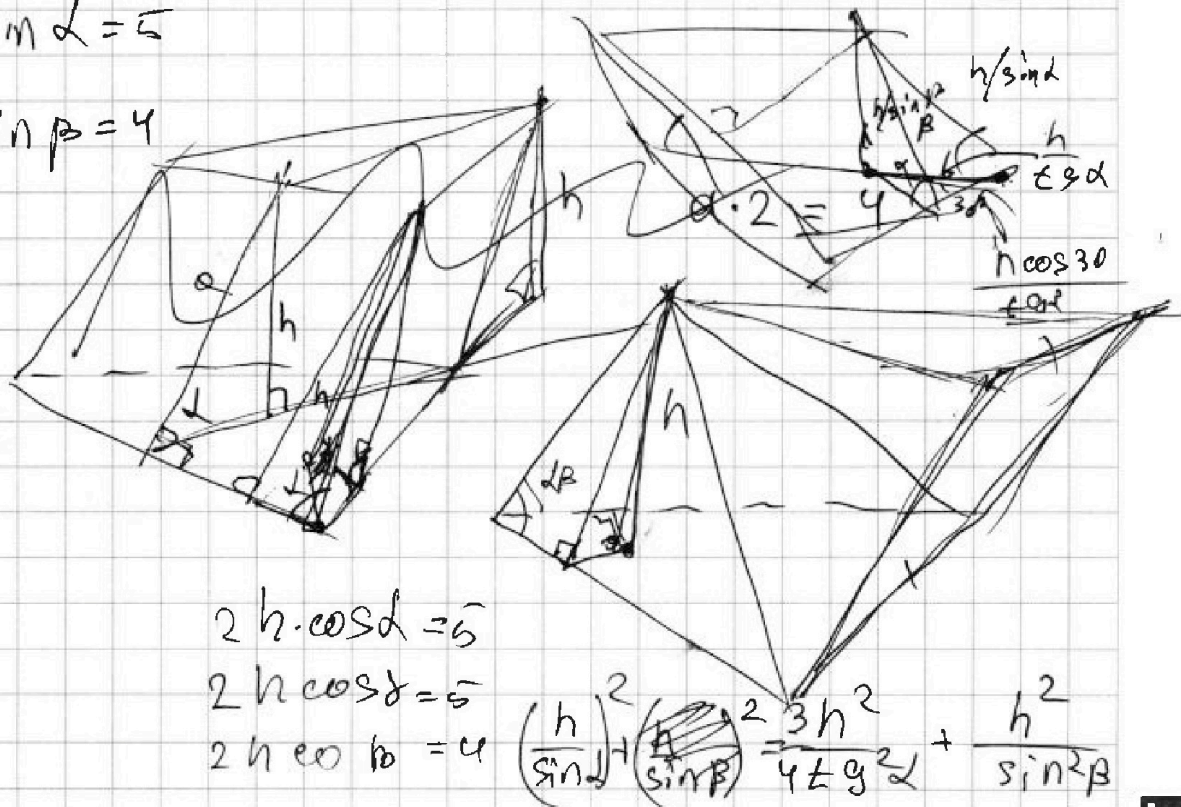
$$8 + b + b^2 = 820 \Rightarrow b^2 + b - 812 = 0$$

$$b = 28, a = 36, c = 27$$

$$b = -29, a = -21, c = -30$$

$$2h/\sin \alpha = 5$$

$$2h/\sin \beta = 4$$



$$2h \cdot \cos \alpha = 5$$

$$2h \cos \beta = 4$$

$$2h \cos \gamma = 4$$

$$\left(\frac{h}{\sin \alpha}\right)^2 + \left(\frac{h}{\sin \beta}\right)^2 = \frac{3h^2}{4 \sin^2 \alpha} + \frac{h^2}{\sin^2 \beta}$$

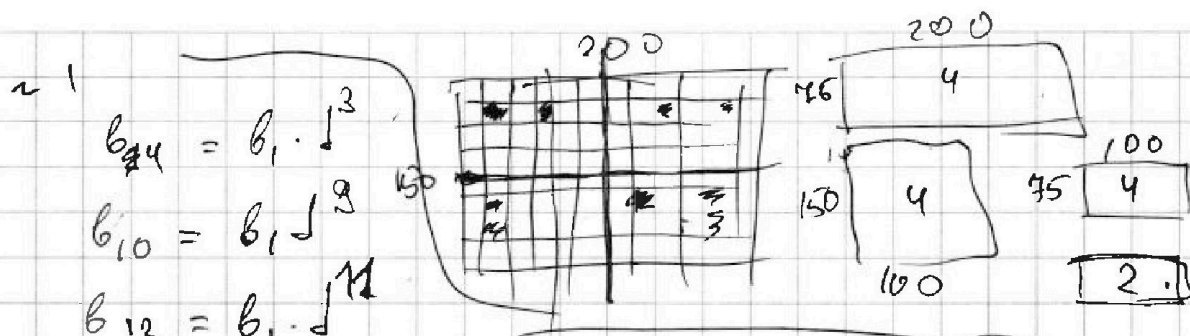


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{b_{12}}{b_4} = \frac{b_1 \sqrt[3]{12}}{b_1 \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\frac{(15x+6)(x-3)}{(15x+6)(x-3)^3}} =$$

$$= (x-3)^2$$

$$15x+6 \neq 0$$

$$x+4 \neq 0$$

$$x-3 \neq 0$$

$$\sqrt[3]{4} = \frac{4}{x-3}$$

$$x \neq -\frac{2}{5}$$

$$x \neq -4$$

$$x \neq 3$$

$$200 \cdot 45 = 9000$$

$$\frac{15000!}{4! \cdot (15000-4)!}$$

$$\frac{15000!}{4! \cdot (15000-4)!}$$

$$\frac{2 \cdot 15000!}{4! \cdot (15000-4)!} - 2 \cdot \frac{15000!}{4! \cdot (15000-4)!}$$

$$b_1^2 = \frac{(x+4) \cdot \sqrt[3]{(15x+6)(x-3)}}{|x-3|^5} \Rightarrow x+4 > 0 \quad x > -4$$

$$x \in (-4; \frac{2}{5}) \cup (-\frac{2}{5}; 3) \cup (3; +\infty)$$

~ 2

$$x+4 \geq 0, \quad 5-x-3z \geq 0, \quad y-2x-x^2+z \geq 0$$

$$225-z^2 \geq 0, \quad \Rightarrow x \geq -4, \quad y+z \geq -2x+x^2$$

$$3z \leq 5-x, \quad -15 \leq z \leq +15$$

$$t = x+1$$

$$\sqrt{t+5} - \sqrt{6-t-3z} + 6 = \sqrt{y-t^2+1+z}$$