



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Расстояние между двумя пунктами $\sqrt{225 - 2^2} \leq 15$

$$|y - 20| + 2|y - 35| = \sqrt{225 - 2^2}$$

если $y < 20$ или $y > 35$,
то $\emptyset$. если $y \in [20; 35]$ то сумма расстояний ≥ 15 .

а равна 15 при $y = 35$. $\Rightarrow y = 35$. $|35 - 20| = 15 = \sqrt{225 - 2^2}$

$\Rightarrow z = 0; y = 35$. (1): $\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 =$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3 $\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$; $4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x - 6 \cos^3 x + 3 = p$.

Пусть $\cos x = t$, $t \in [-1; 1]$. $\Rightarrow p(t) = 4t^3 - 6t^2 + 8t + 3$. $p(t)$ — куб. ф-я.

$p'(t) = 12t^2 - 12t + 8 = 3(4t^2 - 4t + 1) = 3(2t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ — точка экстр.

$p(t)$ при всех t принимает каждое свое значение раз и имеет вид

$p(-1) = -4 - 6 - 8 + 3 = -10$.

$p(1) = 4 - 6 + 8 + 3 = 9$.

$\Rightarrow p \in [-10; 9]$. Преобразуем наше уравнение

$4t^3 - 6t^2 + 8t + 3 = p \Rightarrow \frac{(2t-1)^3}{2} + \frac{7}{2} = p \Rightarrow (2t-1)^3 = 2p-7$;

$t = \frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2} = \cos x \Rightarrow x = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: при $p = -10$: $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

при $p \in (-10; 3)$: $x = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

при $p = 3$: $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

при $p \in (3; 9)$: $x = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

при $p = 9$: $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 5 Всего у нас 30000 клеток. Попробуем исходить при подсчете на чравках по 7500 к. каждый.

1) 4 клетки в I зоне, тогда у нас есть 3 варианта закрасить оставшиеся 4, для каждой из симметрий (в II, III или IV. Тогда всего их: $3 \cdot C_{7500}^4 = 3 \cdot 7500$!

2) 3 клетки в I и 1 в II, 3 клетки в одной зоне и 1 в другой.

(Дополнение: если мы закрасим 4 клетки, поставившиеся однозначно задаются (с учетом нулевой симметрии) с помощью симметрии). Есть 2 варианта расположения: $\dots | \dots$ и $\dots | \dots$

Для каждого из них можно выделить 2 вида симметрии. $\dots | \dots$ и $\dots | \dots$
 $(\dots | \dots \cup \dots | \dots)$ Тогда всего их: $2 \cdot 2 \cdot C_{7500}^3 \cdot 7500 =$
 $= 30000 \cdot C_{7500}^3$

3) 2 клетки в I и 2 в другой. По 2 клетки в каждой зоне.

Будет, когда нет симметрии отн. сред. линии: $C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 \cdot 2$
 (Выбираем 2 к. в I зоне, тогда 2 уже симметрично однозначно задаются, тогда 2 к. в одной из оставшихся зон, $\Rightarrow$ опять однозначно задаются 2 оставшиеся, $\cdot 2$, т.к. 2 линии средних линий). При этом, можно заметить, что, если есть симметрия отн. 2 средних линий, то есть и центральная симметрия. Следовательно, учета центральной симметрии уже не требуется.

Тогда все: $3 \cdot C_{7500}^4 + 30000 \cdot C_{7500}^3 + 2 \cdot C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2$

Ответ:

Ответ: $3 \cdot C_{7500}^4 + 30000 C_{7500}^3 + 2 \cdot C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2$.



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 $a, b, c \in \mathbb{Z}$. $a > b$; $(a-b)/3$; $(a-c)(b-c) = k^2$, где k - простое; $a+b^2=820$

★ П.к. $(a-b)/3$, то a и b имеют разные остатки при делении на 3. П.к. k^2 - простое, то k^2 можно представить как:

$k \cdot k, k^2 \cdot 1, 1 \cdot k^2, -k^2 \cdot (-1), -1 \cdot (-k^2)$. (лучше $k \cdot k$ невозможен, т.к. $a-c=k$ и $b-c=-k \Rightarrow a=b$, но $a > b$.)

$$1) k^2 \cdot 1 = (a-c)(b-c) \Rightarrow b-c=1; a-c=k^2, c=b-1, a-b+1=k^2.$$

$$\text{и } a=820-b^2 \Rightarrow 821-b^2-b=k^2. \text{ Пусть } a=3n; b=3m+1, \text{ где } n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow a-b+1=3n-3m=3(n-m)=k^2 \Rightarrow k=3. \Rightarrow b^2+b-821=0, \quad n-m=3.$$

$$2) k^2 \cdot 1 = (a-c)(b-c), \text{ но } a=3n, b=3m+2$$

$$a-c=a-b+1=3n-3m-1=3(n-m)-1.$$

$\Rightarrow k^2$ имеет остаток 2 при делении на 3, но такого быть не может.

(Пусть $k=3x+1, \Rightarrow k^2=9x^2+6x+1=3(3x^2+2x)+1$ - остаток 1. Пусть $k=3x+2,$

$$k^2=9x^2+12x+4=3(3x^2+4x+1)+1 \text{ - остаток 1.}$$

$$3) k^2 \cdot 1 = (a-c)(b-c), \text{ но } a=3n+1, b=3m+2$$

$$a-c=a-b+1=3n+1+1-3m-2=3(n-m)=k^2 \Rightarrow k^2=9 \Rightarrow k=3$$

$\Rightarrow$ лучше, когда остатки a и b при делении на 3 отличаются на 2 не подходят (но при этом $a \div 3$). $n+m=3.$

$$\Rightarrow b^2+b-812=0 \Rightarrow b=-29; 28; a=-21; 36; c=-30; 27.$$

$$4) a=3n+2, b=3m. (a-c)(b-c)=k^2 \cdot 1. a-c=a-b+1=3n+2-3m+1=$$

$$=3(n-m+1)=k^2 \Rightarrow k=3. \quad n=m-1. \quad b^2+b-812=0. \quad b=-29; 28$$

$\Rightarrow \emptyset.$

$$5) a-c=1; b-c=k^2 \quad b-a+1=k^2, \text{ т.к. } b-a < 0, \text{ но } b-a+1 \leq 0$$

$\Rightarrow \emptyset$ таких случаев нет.

$$6) (a-c)=-1; b-c=-k^2 \quad c=a+1 \quad b-a-1=-k^2 \Rightarrow k^2=a-b+1$$

$$821-b^2-b=k^2 \text{ - аналогично предыдущему. } k^2=821-b^2-b.$$

$\rightarrow$ аналогично предыдущему $b=-29; 28, a=-21; 36; \text{ но } c=-20; 27.$

$$7) (a-c)=-k^2; b-c=-1; c=b+1. a-b-1=-k^2, k^2=b-a+1 \leq 0$$

Ответ: $(-29; -21; -30); (-29; -21; -20); (28; 36; 27); (28; 36; 27)$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7 1) Предположим, что A' проектируется внутрь $\triangle ABC$. при этом
 возаем $S_{AA_1B_1C_1} = S_{AA_1B_1C_1} = 5$. (треугольных равносторонней, поэтому
 вершины равносильны). Тогда:

$$S_{AA_1B_1C_1} = S_{AA_1B_1C_1} = AC \cdot AB \cdot h_1 = AB \cdot h_2$$

$$\Rightarrow h_1 = h_2 = 5/2, \text{ где } h_1 \text{ и } h_2 - \text{высоты } \triangle AA_1B_1C_1 \text{ параллельные } AA_1, B_1C_1$$

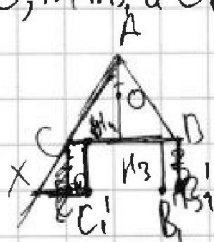
AA_1, C_1C_1 . Проведем OH_1 и $OH_2 \perp AB$ и AC соответственно. $\Rightarrow$ по т. о
 перпендикулярных где A_1H_1 и $A_1H_2 = h_1$ и h_2 соответственно
 т.к. A_1O - общая сторона, то $\triangle A_1OH_2 = \triangle A_1OH_1$ (по 2 катетам)

$\Rightarrow H_2O = H_1O \Rightarrow AO$ - биссектриса и высота. AH_3 - высота $\triangle ABC$.

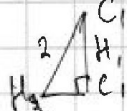
В $\triangle A_1OH_1$: $5/2$ Пусть $A_1O = H$ тогда $H_1O = \sqrt{25/4 - H^2}$. $AO = 2OH_1$, т.к.

$$\angle OAK_1 = 30^\circ \Rightarrow AO = \sqrt{25 - 4H^2}$$

тоже высоты призма. т.к. $A_1O \parallel B_1B'_1 \parallel H_3 \parallel B_1C'_1$ и $AA_1 \parallel BB_1$
 $\parallel CC_1$, то $\angle A_1AO = \angle B_1B'_1B = \angle C_1CC_1$ (т.к. прилежащие к $\triangle ABC$
 $A_1AO, B_1B'_1B$ и C_1CC_1 равны) то $AO = CC_1 = BB_1$. Тогда:



$AC \cap C_1B_1 = X$. C_1H_4 - высота $\triangle CC_1B_1B$.



$$AH_3 = \sqrt{3}. C_1H_4 = 2. C_1H_4 = \sqrt{4 - H^2}$$

$$C_1H_4 = AO \cdot \sqrt{4 - H^2} = \sqrt{25 - 4H^2}; 25 - 4H^2 = 4 - H^2;$$

$$21 = 3H^2; H = \sqrt{7}$$

Ответ: $\sqrt{7}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b, q \quad b, q^3 = \sqrt{15x+6}, \quad b, q^3 = x+4; \quad b, q^3 = \sqrt{15x+6} (x-3)^2. \quad \frac{b, q^3}{b, q^3} = q^8 = \sqrt{x-3}^4$$

$$q = \sqrt{x-3}$$

$$\frac{b, q^3}{b, q^3} = q^6 = \frac{(x+4) \sqrt{15x+6}}{\sqrt{15x+6}} = (x-3)^4 = \sqrt{x-3}^4$$

$$1) x > 3 \quad \frac{(x+4) \sqrt{15x+6}}{\sqrt{15x+6}} = \sqrt{x-3}^4$$

$$x+4 = \sqrt{15x+6} \quad x^2 + 8x + 16 = 15x + 6 \quad x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-5)(x-2)$$

$$2) x < 3 \quad \frac{(x+4) \sqrt{15x+6}}{\sqrt{15x+6}} = \sqrt{x-3}^4$$

$$x+4 = \sqrt{15x+6} \quad x^2 + 8x + 16 = 15x + 6 \quad x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x^2 - 12x + 22 = 0 \quad (x-1)(x-22)$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-32} + 6 = 2\sqrt{4-2x-x^2+2}$$

$$14-201+214-351 = \sqrt{225-2x^2}$$

$$14-201$$

$$\sqrt{3} \cos 3x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = p \quad 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) = p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p. \quad \cos x = 1. \quad p(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3, \quad t \in [-1; 1]$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = 0 \quad x = 2 \quad 6t^2 - 3t + 3 = 0$$

$$- \frac{3}{2} \cdot \frac{3 \sqrt{3}}{2} - \frac{6}{4} \cdot \frac{3 \sqrt{3}}{2} + \frac{3 \sqrt{3}}{2} + 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \sqrt{3}}{2} - \frac{4}{2} \cdot \frac{3 \sqrt{3}}{2} + \frac{3 \sqrt{3}}{2} + 3$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p.$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = 0 \quad D_1 = 36 - 3 \cdot 12 = 0$$

$$(2t-1)^3 = 8t^3$$

$$p(t) = \frac{(2t-1)^3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{8t^3 - 12t^2 + 6t - 1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{8t^3 - 12t^2 + 6t + 6}{2}$$

$$= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x (2 \cos^2 x - 1) - 2 \sin^2 x \cos x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x)$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \quad 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x - 6 \cos^2 x$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = 0 \quad 12t^2 - 12t + 3 = 0 \quad t = \frac{1}{2}$$

$$p(-1): \quad \frac{(-3)^3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{-27}{2} + \frac{7}{2} = -10 \quad p(1) = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$$

$$\left(\frac{2t-1}{2}\right)^3 = p - \frac{7}{2} \quad (2t-1)^3 = 2p - 7 \quad 2t-1 = \sqrt[3]{2p-7} \quad t = \frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2}$$

$$(2t+1)^3 + 7 = 2x$$

$$p=4. \quad \arccos 1 = 0 \quad \sqrt[3]{2p-7} = 1 \quad \sqrt[3]{2p-7} = 1 \quad p=4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 $a, b, c \in \mathbb{Z}$. $a > b$. $a - b \mid 3(a - c)(b - c) = k^2$ $a + b^2 = 820$.

1) $a = 3n$; $b = 3m + 1$. $3n > 3m + 1$ $n > m + \frac{1}{3} \Rightarrow n \geq m + 1$.

$a - c = k$; $b - c = k$. $\emptyset$

$a - c = k^2$, $b - c = 1$. $-c = 1 - b$. $a - c = (a - b + 1) = k^2$

~~$3n - 3m + 1 = k^2$~~ $3(n - m) = k^2$ $a = 820 - b^2$

$(820 - b^2 - b) = k^2$ $b^2 + b - 821 = 0$ $D = 1 + 4 \cdot 821$

$b^2 + b + k^2 - 821 = 0$ $D = 1 - 4k^2 + 4 \cdot 821 = 3285 - 4k^2 = 0$

$3(n - m) = k^2 \Rightarrow k = 3$. $n - m = 3$. $n = m + 3$.

$a = 3m + 9$; $b = 3m + 1$; $c = 3m$.

st $b^2 + b + 9 - 821 = 0$ $b^2 + b - 812 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 812 = 3249 = 57^2$ $b_{1,2} = \frac{-1 \pm 57}{2}$

$= \frac{-58}{2}$ и $\frac{56}{2}$. $\boxed{29 \text{ и } 28}$. $\boxed{a = -21; 36; c = -30; 27}$.

2) ...

№5 200 $8 \text{ кл. } 1)$



30000 кл.

15000 кл.

$C_{15000}^4 = \frac{15000!}{4! \cdot 14996!}$

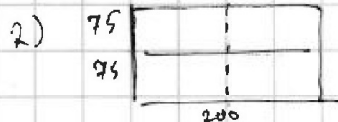
C_{7500}^4

$k = (3x + 1)$

$9x^2 + 16x + 1$

$3m + 2, 3m$

$3n + 2 + 1 - 3m$



$-29, 28$

$a = 3n$ $b = 3m + 1$

$(-21 + 20)(-29 + 20) = -1 \cdot (-9) = 9 = 3^2$ $(n - m) = 3$ $n = m + 3$

$(28 - 37)(36 - 37) = -1 \cdot (-9) = 9$ $m = -10$ $m = 9$

$(-29 + 30)(-21 + 30)$ $n = -87$ $n = 12$

$C = a + 1$ $\boxed{-20, 37}$

$1; 3; 6$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

