



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Обозначим 1-ый член прогрессии за a_0 , а разность за d , тогда из условия: (a, d - любые $\in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} 3\text{-ий член: } & \{ a_0 + 2d = 3x + 3 \} \cdot 4 \\ 5\text{-ый член: } & \{ a_0 + 4d = (x^2 + 2x)^2 \} \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 8d = 12x + 12 - 4a_0 \\ 8d = 2(x^2 + 2x)^2 - 2a_0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ 9\text{-ый член: } & \{ a_0 + 8d = 3x^2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - a_0 = 12x + 12 - 4a_0 \\ 3x^2 - a_0 = 2x^2(x+2)^2 - 2a_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + a_0 = 4x + 4 \\ 3x^2 + a_0 = 2x^2(x+2)^2 \end{cases} \Rightarrow \ominus$$

$$x^2 = 2x^2(x+2)^2 - 4x - 4 \quad (\text{приведем заметим, что по найденному } x \text{ мы всегда сможем определить } a \text{ и } d)$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0, \text{ заметим, что } x = -1 - \text{корень}$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) \stackrel{(*)}{=} 0, \text{ заметим, что у } (*) \text{ } x = -1 - \text{корень}$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: $-1; -1 \pm \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Исходная система $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -3 \leq x - 3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x - y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq 3y - x \leq 3 \\ -1 \leq y - 3x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 3 \leq x \leq 3y + 3 \\ 3x - 1 \leq y \leq 3x + 1 \end{cases}$$

тогда $x \geq 3y - 3 \geq 3 \cdot (3x - 1) - 3 = 9x - 6 \Leftrightarrow 6 \geq 8x$. При этом равенство достигается при $y = \frac{5}{4}$, $x = \frac{3}{4}$, аналогично

~~$y \leq 3x + 1 \leq 3y + 3 \Rightarrow y \leq 3x + 1 \leq 3y + 3 \Rightarrow$~~ тогда $\max(4y + 8x)$

достигается при $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{5}{4}$, а $\max = 6 + 5 = 11$.

Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Из условия:

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

Заметим, что если $m+n$ - чётное, то и A чётное, а

если $m+n$ - нечётное, то $m+n-9$ - чётное, а значит

$A:2$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, ~~аналогично $B:2$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$~~
 ~~$= mn(m+n-9)$ тогда либо $13p^2:2 \Leftrightarrow p:2 \Leftrightarrow p=2$, т.к. p - простое,~~

либо $75q^2:2 \Leftrightarrow q:2 \Leftrightarrow q=2$, т.к. q - простое, тогда

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 52 \\ (m+n)(m+n-9) = 300 \end{cases}; \begin{cases} (m+n)^2 - 9(m+n) - 52 = 0 & (1) \\ (m+n)^2 - 9(m+n) - 300 = 0 & (2) \end{cases}, \text{ из первого:}$$

$m+n = -4$ или $m+n = 13$, но $m, n \in \mathbb{N}$, значит $m+n = 13$, а

из второго: $D = 81 + 1200 = 1281 = 3 \cdot 7 \cdot 61$, $\neq k^2, k \in \mathbb{Z}$, значит $m+n = \frac{9 \pm \sqrt{1281}}{2}$

но $m+n \in \mathbb{N}$ - противоречие, значит число $A = 13p^2 = 52$, а

$m+n = 13$, тогда $B = 75q^2 = mn^2 + m^2n - 3mn = mn(m+n-3) = 10mn:2$,

а значит $75q^2:2 \Leftrightarrow q:2 \Leftrightarrow q=2$, т.к. q - простое, тогда

$$\begin{cases} m+n = 13 \\ 10mn = 300 \\ m, n \in \mathbb{N} \end{cases}; \begin{cases} m+n = 13 \\ mn = 30 \\ m, n \in \mathbb{N} \end{cases}, \text{ а значит по т. Виета: } m, n - \text{корни} \\ \text{ур-ния } t^2 - 13t + 30 = 0, t_1 = 3, t_2 = 10,$$

$$\text{тогда } \begin{cases} n = 3 \in \mathbb{N} \\ m = 10 \in \mathbb{N} \\ n = 10 \in \mathbb{N} \\ m = 3 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ответ: $(3; 10), (10; 3)$.

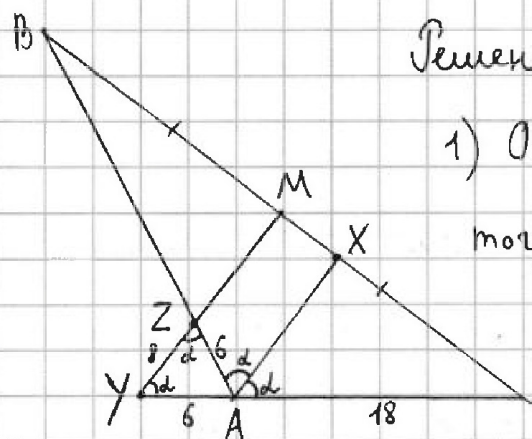


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

1) Обозначим $\angle BAX = \angle CAH = \frac{1}{2} \angle BAC = \alpha$,

тогда $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle MYA = \angle XAC = \alpha$ -

как соотв. при $MY \parallel AX$ и сек. AY и

$\angle = \angle YZA = \angle BAX$ - как накрест лежащ.

при $MY \parallel AX$ и сек. AB , тогда $\triangle AZY$ - р/б, тогда $AZ = AY = 6$

2) По т. косинусов в $\triangle YZA$: $\cos \alpha = \frac{YZ^2 + ZA^2 - YA^2}{2 \cdot YZ \cdot ZA} = \frac{64 + 36 - 36}{2 \cdot 8 \cdot 6} =$

$= \frac{64}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{2}{3}$, тогда $\cos \angle BAC = \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$

3) По т. Менелая в $\triangle ABC$: $\frac{CM}{BM} \cdot \frac{BZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{YC} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1} \cdot \frac{BZ}{6} \cdot \frac{6}{24} = 1$
м-серед. BC

отсюда $BZ = 24$, а $AB = BZ + AZ = 24 + 6 = 30$.

4) По т. косинусов в $\triangle ABC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC =$

$= 900 + 324 + 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \frac{1}{9} = 12 \cdot 75 + 12 \cdot 27 + 12 \cdot 10 = 12 \cdot 112$

$= 24 \cdot 56 = 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 = 21 \cdot 8^2$, тогда $BC = 8\sqrt{21}$

Ответ: $8\sqrt{21}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Рассмотрим второе ур-ние системы:

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2, \text{ где из 0.2.3. } x, y \geq 0.$$

$$x^4 - y^4 + 5(x^2 - y^2) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0; (x^2 + y^2)(x + y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 5(x + y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0;$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left(\underbrace{(x + y)}_{\geq 0} \underbrace{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}_{\geq 0} \underbrace{(x^2 + y^2 + 5)}_{\geq 0} + 1 \right) = 0, \text{ а значит } \sqrt{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = y \geq 0, \text{ тогда подставим в 1-е ур-ние системы:}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ заметим, что } 6+5x-x^2 = (x+1)(6-x) \text{ а } 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = \sqrt{(x+1)^2 + (6-x)^2 - (x+1 - \sqrt{6-x})^2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 7 - (\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 + (\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}) - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1 = 1 + 2\sqrt{6-x} + 6-x \\ x+1 = 4 - 2\sqrt{6-x} + 6-x \\ x \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x-3 = \sqrt{6-x} \\ 4\sqrt{6-x} = 9-2x \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 6-x \\ 96 - 16x = 81 - 36x + 4x^2 \\ x \geq 3 \\ 2x \leq 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 3 = 0 \quad (1) \\ 4x^2 - 20x - 15 = 0 \quad (2) \\ 3 \leq x \leq \frac{9}{2} \end{cases} \quad (1): D = 25 - 12 = 13$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}, \text{ заметим, что } \frac{5 - \sqrt{13}}{2} < \frac{5}{2} < 3, \text{ а } \frac{5 + \sqrt{13}}{2} > \frac{5+1}{2} = 3 \text{ и } \frac{5 + \sqrt{13}}{2} < \frac{5+4}{2} = \frac{9}{2} \checkmark.$$

$$(2) D/4 = 100 + 60 = 160, x = \frac{10 \pm 4\sqrt{10}}{4} = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2}, \text{ при этом } \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} < \frac{5}{2} < 3$$

$$\text{и } \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} > \frac{5+4}{2} = \frac{9}{2}, \text{ значит единственный подходящий корень:}$$

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2}. \text{ Ответ: } \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right).$$



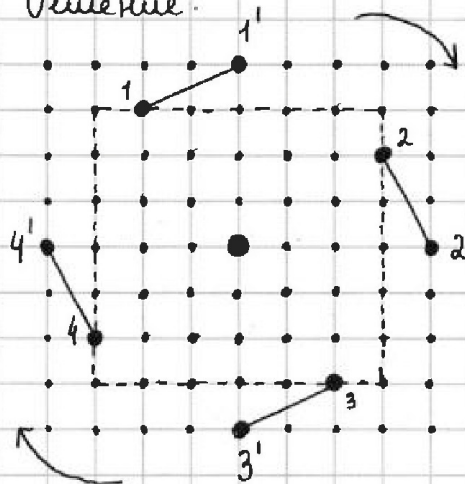
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение:



Заметим, что для каждой точки (узла) в квадрате (кроме центральной) существует ещё ровно 3 точки в квадрате, которые в неё переходят при повороте, т.к. квадрат симметричен по вертикали и горизонтали,

а значит и для любой пары точек (кроме центральной) существует ровно 3 другие пары, которые в неё переходят при повороте. В случае, когда в паре участвует центральная точка, пара определяется второй (не центральной) точкой, а, как мы выяснили, их всего 4 для каждой такой пары.

Тогда кол-во способов перекрасить 2 узла в белый цвет равно кол-ву способов выбрать 2 точки, ^{согласно условию} делённое на 4, или

$$\frac{C_{81}^2}{4} = \frac{81!}{79! \cdot 2! \cdot 4} = \frac{81 \cdot 80 \cdot 79!}{79! \cdot 2 \cdot 4} = 810.$$

(т.к. всего точек $9 \times 9 = 81$)

Ответ: 810.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \begin{cases} x \geq 3y \\ 3x \geq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq y \\ x \geq 3y \end{cases} \quad 3y \geq y \Leftrightarrow y \geq 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} \geq 1 \quad \sqrt{6-x} \leq \sqrt{6}$$

$$|8x-24y| \leq 24; \quad |8x+4y-28y| \leq 24 \quad \geq 6-\sqrt{6}$$

$$|4y+8x-20x| \leq 4 \quad 6+5x-x^2 \leq ?$$

$$\frac{x}{1/1/5/6/7/8/9/10/11/12}$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |9x-3y| \leq 3 \end{cases}$$

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 5$$

$$D/4 = 9 - 25 \leq 0$$

$$x^2 - 5x - 6 + ? \geq 0$$

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

$$(y-1)(y+1) = 1$$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$A = (m+n)(m+n-9) = 13q^2$$

$$B = mn(m+n-3) = 75p^2$$

$$q=2$$

$$p=2$$

$$3 \cdot 427 = 3 \cdot 7 \cdot 61$$

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 52 \\ mn(m+n-3) = 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (mn)(m+n-9) = 300 \\ (mn)(m+n-3) = 52 \end{cases}$$

$$(m+n)^2 - 9(m+n) - 52 = 0$$

$$m+n=13$$

$$mn \cdot 10 = 300$$

$$mn=30$$

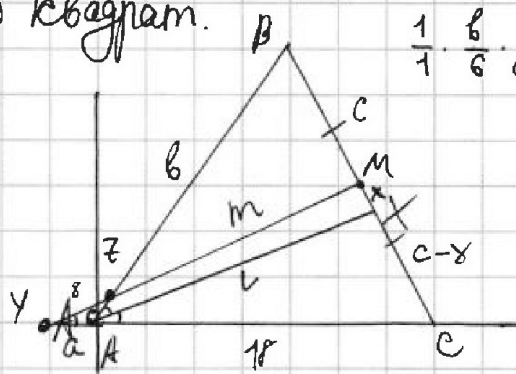
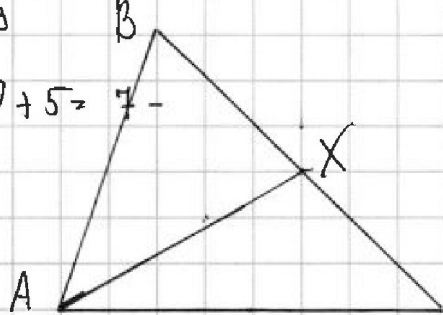
$$m=3 \quad n=10 \quad n=10 \quad m=3$$

$$(m+n)^2 - 9(m+n) - 300 = 0 \quad x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - 6 \quad \frac{18}{c-x} = \frac{b+6}{c+x}$$

$$D = 81 + 1200 = 1281 \rightarrow \text{не полный квадрат.}$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{b}{6} \cdot \frac{a}{a+18} = 1$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{7-a} + 5 = 7$$



$$(m+n)(m+n-9) = 52; \quad m+n=13$$

$$y-6 = \frac{25}{4}$$

$$y = \frac{25}{4} + \frac{24}{4} = \frac{49}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1 \quad 1-\text{вд}: a-2d, 2-\text{од}: a-d \quad 3-\text{ид}: a \quad 4-\text{ид}: a+d, 5-\text{ид}: a+2d$$

$$9-\text{ид}: \frac{a+6d}{3x^2}, \quad \begin{cases} 3x+3+2d = (x^2+2x)^2 \\ 3x+3+6d = 3x^2 \\ x+1+2d = x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x+3+2d = (3x+1+2d)^2 \\ x+1+2d = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+3+2d = 9x^2+1+4d^2+4d+6x+12xd \\ x^2 = x+1+2d \Rightarrow 2d = x+1-x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 9x+9+18d+1+4d^2+4d+6x \\ +12xd-3x^2-3-2d=0 \end{cases}$$

$$3x(3+2+4d-1)+7+4d^2+20d=0 \quad \begin{cases} a+2d = 3x+3 \cdot 4 \\ a+4d = x^4+4x^3+4x^2 \cdot 2 \\ a+8d = 3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8d = 12x+12-4a \\ 8d = 2x^4+8x^3+8x^2-2a \\ 8d = 3x^2-a \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x^2-a = 12x+12-4a \\ 3x^2-a = 2x^4+8x^3+8x^2-2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+a = 4x+4 \\ 3x^2+a = 2x^4+8x^3+8x^2 \end{cases}; \quad 2x^2 = 2x^4+8x^3+8x^2-4x-4$$

$$2x^4+4x^3+3x^2-2x-2=0$$

$$(x+1)(x^3+3x^2-2)=0$$

$$(x+1)^2(x^2+2x-2)=0$$

$$D=1+2=3$$

$$(x+1)^2(x-\frac{-1-\sqrt{3}}{1})(x-\frac{\sqrt{3}-1}{1})=0$$

$$[x=-1$$

$$[x=-1+\sqrt{3}$$

$$x \geq 3y$$

$$x-3y \leq 3; \quad x \leq 3+3y$$

$$4(x+2y)$$

$$2x^4+8x^3+8x^2 = 3x^2+3x+3$$

$$2x^4+8x^3+5x^2-3x-3=0$$

$$2. \quad \begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} |6y-2x| \leq 6 \\ |6x-2y| \leq 2 \end{cases}$$

$$4y+8x = ax - 3ay + 3bx - 8y$$

$$y(4+3a+b) = x(a+3b-8)$$

$$\begin{cases} 4+3a+b=0 \\ a+3b-8=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4+3 \cdot (8-3b)+b=0 \\ a=8-3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 28-8b=0 \\ a=8-3b \end{cases}; \quad \begin{cases} b=\frac{7}{2} \\ a=\frac{16}{2}-\frac{21}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} b=\frac{7}{2} \\ a=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$x^2-6xy+9y^2 \leq 9$$

$$9x^2-6xy+y^2 \leq 1; \quad \frac{10x^3+10y^3}{x^2+y^2} \leq 10$$

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \leq 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$$

$$C_{81}^2$$

$$\frac{81!}{79! \cdot 2! \cdot 4} \rightarrow \frac{81 \cdot 80 \cdot 79!}{79! \cdot 2 \cdot 4} = 810$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} ; \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases}$$

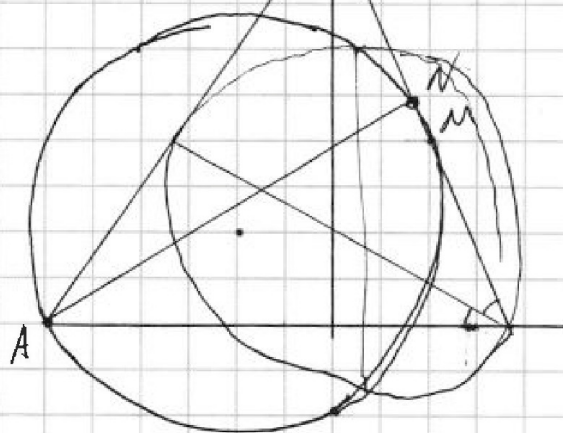
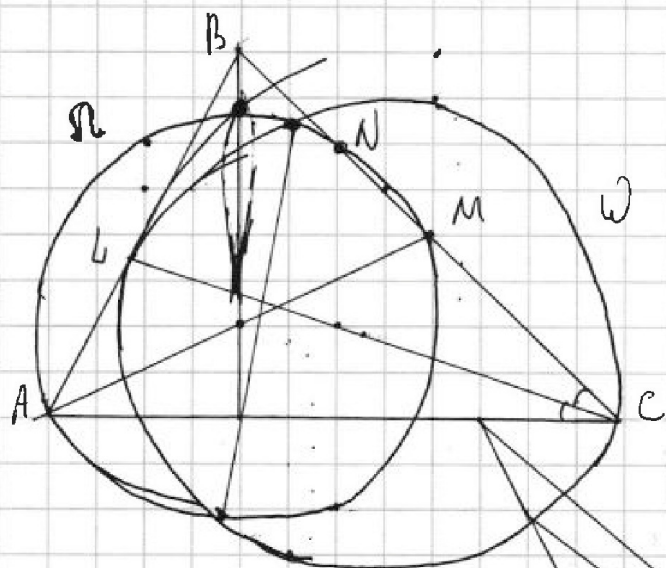
$$\begin{aligned} -1 \leq x-y \leq 1 \cdot 2 & \quad -2 \leq 2x-2y \leq 2 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \cdot 2 & \quad -2 \leq 6x-2y \leq 2 \\ 8x-4y \leq 4 \end{aligned}$$

$$3y-3 \leq x \leq 3y+3$$

$$3x-3 \leq y \leq 3x+3$$

$$3y-3 \leq 9x \leq 3y+3$$

$$\begin{aligned} x &\leq 3y+3 \\ y &\leq 9x+3 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

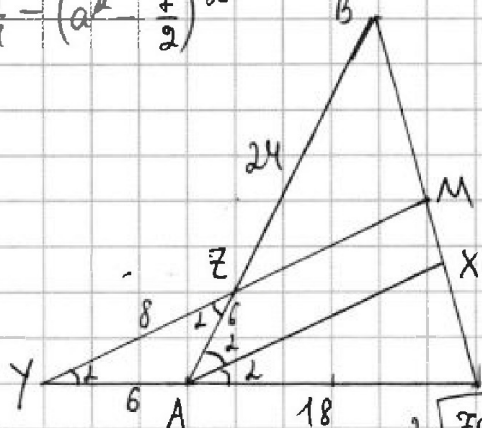


1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{49}{4} - (a^2 - \frac{7}{2})^2$$



$$\cos \alpha = \frac{6^2 + 36 - 36}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{6}{24} = 1$$

По м. косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$= 900 + 324 + 2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9} =$$

$$= 900 + 324 + 120 = 6 \cdot 224 =$$

$$= 12 \cdot 112 =$$

$$= 24 \cdot 56 =$$

$$= 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7$$

$$2\sqrt{7a - a^2} - 5$$

$$7a - a^2 \leq \frac{49}{4}$$

$$a^2 - 7a + \frac{49}{4} \geq 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$x^4 - y^4 + 5(x^2 - y^2) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x^2 + y^2)(x-y)(x+y) + 5(x-y)(x+y) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})((x^2 + y^2 + 5)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1) = 0$$

$$x = y \geq 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\frac{a}{6} \quad \frac{b}{6}$$

$$a - b + 5 = 2ab \quad ; \quad 5 = b - 2ab - a$$

$$\sqrt{x+1} + 5 = \sqrt{6-x} (2\sqrt{x+1} + 1)$$

$$x+1 + 5\sqrt{x+1} + 25 = (6-x)(4x+4 + 4\sqrt{x+1} + 1)$$

$$2 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 13 \cdot 3^2 + 27 + 9$$

$$4 \cdot 3^3 - 13 \cdot 3^2 - 3^2$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{7-a} + 5 = 2\sqrt{a(7-a)}$$

$$7 - 2\sqrt{a(7-a)} = 4a(7-a)$$

$$-10\sqrt{a(7-a)} + 15$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{7-a} + 5 =$$

$$= 2\sqrt{a(7-a)}$$

$$\sqrt{a+5} > \sqrt{7-a} (2\sqrt{a+1})$$

$$a+10\sqrt{a}+25 =$$

$$6 = 6-x = 6-a+1 = 7-a \quad (7-a)(4a+4\sqrt{a}+1)$$

$$(a+10\sqrt{a}+25) = (28a+28\sqrt{a}+7 - 4a^2 - 4a\sqrt{a} - a)$$

$$4a^2 + 4a\sqrt{a} - 26a - 18\sqrt{a} + 18 = 0$$

$$2a^2 + 2a\sqrt{a} - 13a - 9\sqrt{a} + 9 = 0$$