



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

a_n - арифм. прогресс, $a_n = 6 - 9x$, $a_6 = (x^2 - 2x)^2$, $a_{10} = 9x^2$

$$\frac{a_n - a_k}{n - k} = d \Rightarrow \frac{a_{10} - a_6}{4} = \frac{a_{10} - a_1}{6} = d$$

$$\frac{9x^2 - 6 + 9x}{6} = \frac{9x^2 - (x^2 - 2x)^2}{4} \quad | \cdot 4$$

$$6x^2 + 6x - 4 = 9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = x^4 - x^3 - 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 2x + 4x - 4 =$$

$$= (x^3 - 3x^2 - 2x + 4)(x - 1) = 0$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow (x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 4x + 4)(x - 1) = 0$$

$$(x^2 - 2x - 4)(x - 1)^2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$D = 4 + 16 = 20$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{Ответ: } x = 1; 1 \pm \sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



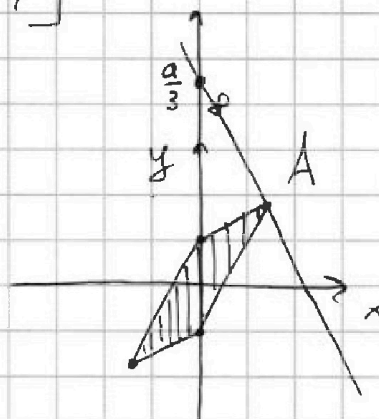
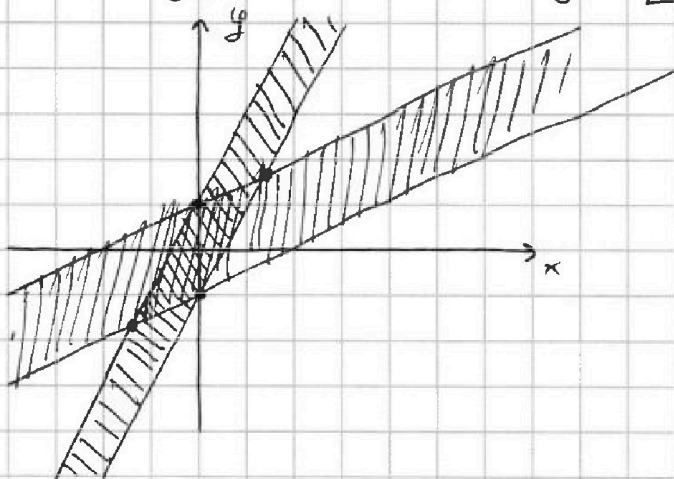
СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓2

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y \in [-2; 2] \\ 2x-y \in [-1; 1] \end{cases}$$



$$3y + 6x = a$$

Найдём $a_{\max}$:

Из графика $a_{\max}$ будет, если $3y + 6x = a$ будет проходить через точку $A(x_A, y_A)$

$$3y + 6x = a \Leftrightarrow y = \frac{a}{3} - 2x$$

Найдём x_A, y_A :

$$\begin{cases} x_A - 2y_A = -2 \\ 2x_A - y_A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y_A = 5 \\ 3x_A = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = \frac{5}{3} \\ x_A = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{a_{\max}}{3} - \frac{8}{3} \Rightarrow a_{\max} = 13 \Rightarrow (3y + 6x)_{\max} = 13$$

$$\text{Ответ: } (3y + 6x)_{\max} = 13$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√3

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

$$\begin{cases} A = 11p^2 \\ B = 75q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = 11p^2 \\ mn(m+2n+9) = 75q^2 \end{cases}$$

если $m+2n=11$:

$$p^2 = 4 \Rightarrow p = 2, \quad mn \cdot 20 = 75q^2 \Rightarrow 4mn = 15q^2$$

$$\Rightarrow m=5, n=3, q=2 \text{ или } m=3, n=5, q=2$$

$m=3, n=5$ не подходит т.к. $3+10 \neq 11$

$\Rightarrow$ первая пара (5, 3)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{5}$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

$$x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y$$

$$x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=y \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$7-x \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 7]$$

$$14+5x-x^2 \geq 0$$

$$D = 25 + 56 = 81$$

$$x = \frac{-5 \pm 9}{-2} = -2, 7 \Rightarrow$$

$$-(x+2)(x-7) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(x+2)(7-x)} \quad \text{~~т.к. } x \in [0, 7]~~$$

$$\sqrt{\frac{x+2}{7-x}} - 1 + \frac{7}{\sqrt{7-x}} = 2\sqrt{x+2}$$

$$\sqrt{x+2} - 2\sqrt{(x+2)(7-x)} - \sqrt{7-x} + 7 = 0$$

$$\sqrt{x+2} = a, \sqrt{7-x} = b$$

$$a - 2ab - b + 7 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

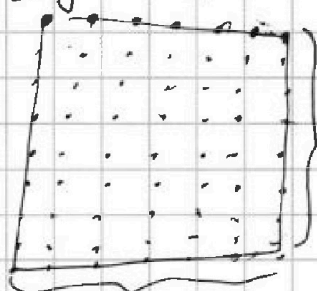
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16

Всего. Посчитаем всего количество раскрасок,

без учета поворотов: $N = \frac{12!}{2!} = 12! \cdot \frac{12!}{2} =$



11 унит

$= 7260$, учтем $\times$ вариации раскраски переходящие сами в себя при двойном повороте:

$$7260 - \frac{12!}{2!} = 7260 - 7260 = 0$$

При повороте. Всего квадратов

11 унит

можно повернуть 4 раза, до момента,

когда все виды раскраски не перейдут сами в себя

$$\Rightarrow \frac{7260 + 7260}{4} = 1815, 1815 + 30 = 1845$$

Ответ: ~~1815~~ 1845

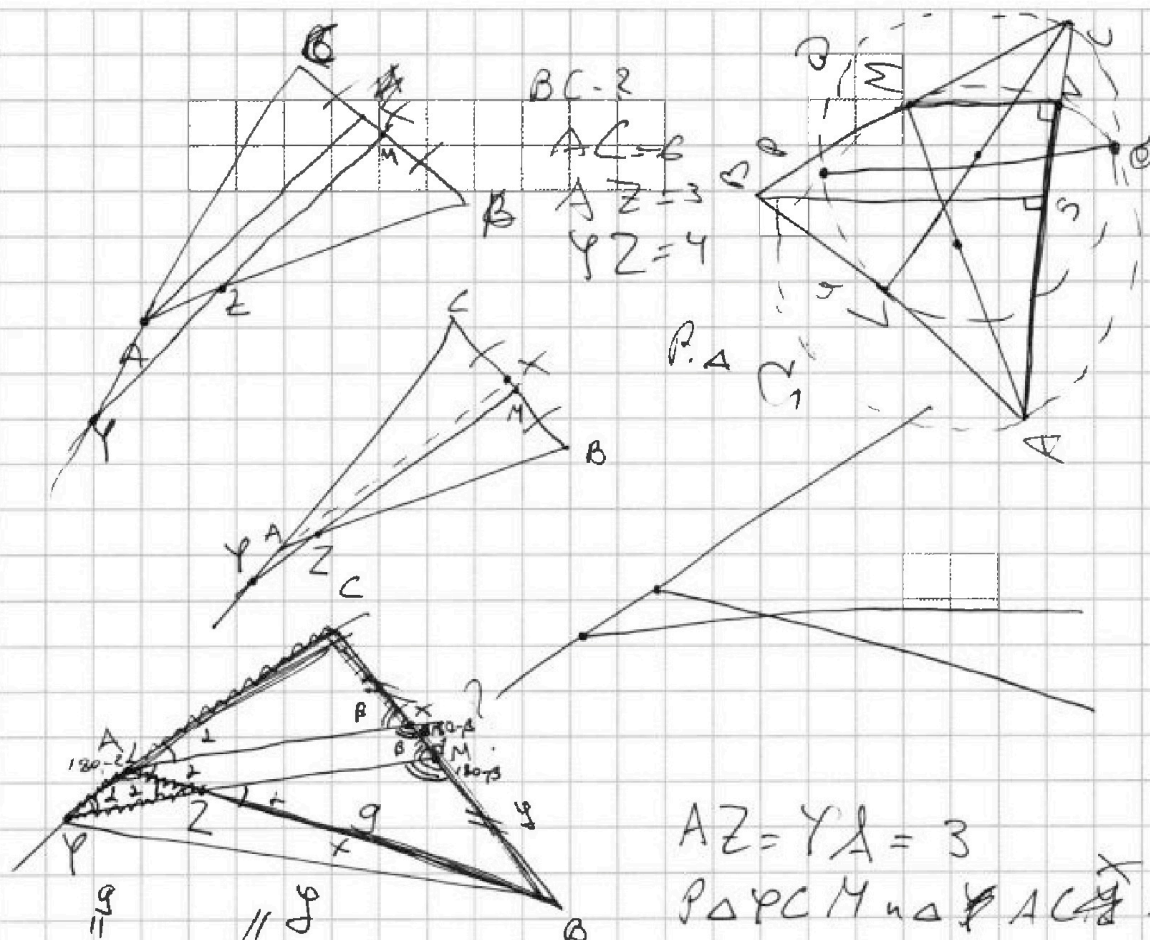


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{PC}{AC} = \frac{MC}{XC}$$

$\parallel$ $\parallel$
6 $y-d$

T.M. на $\triangle ACB$

$$3 = \frac{AP}{PC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{x}{AZ} = 1$$

$\parallel$ $\parallel$
 y 3

$x=3$

$$\frac{y-d}{y+d} = \frac{2}{5}$$

$\Rightarrow y-d = \frac{2}{5}x$

P. $\triangle AXB$ и $\triangle MB$

$$12 = \frac{AB}{AZ} = \frac{XB}{MB}$$

$\parallel$
 12 y

$$12y = 9y + 9d$$
$$3y - 9d = 6y$$
$$3y = 9d$$
$$y = 3d$$

$$y+d = \frac{4}{5}x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{5}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{1-y} + 7 = 2\sqrt{14+8x-y^2} \\ x^3+3x-\sqrt{2y} = y^3-\sqrt{2x+3y} \end{cases}$$

$$x^3+3x+\sqrt{2x} = y^3+3y+\sqrt{2y}$$

$$x=y \geq 0$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{1-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$1-x \geq 0 \Rightarrow x \in [0; 1] \Rightarrow y \in [0; 1]$$

$$14+5x-x^2=0$$

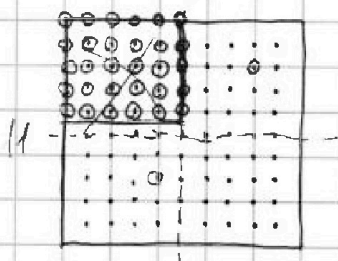
$$D = 25 + 56 = 81$$

$$x = \frac{-8 \pm 9}{-2} = \frac{5 \pm 9}{2} = 7, -2$$

$$14+5x-x^2 = -(x-7)(x+2) = (7-x)(x+2)$$

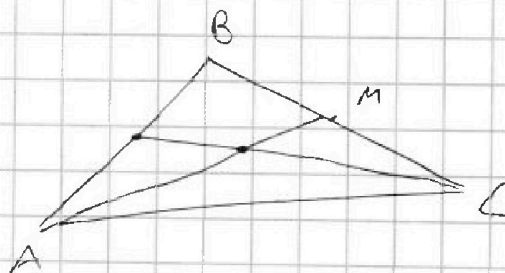
$$\sqrt{x+2} - \sqrt{1-x} + 7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$6.8 - 30 \text{ греек} \quad A_n^2 = \frac{30!}{(30-2)!}$$



14

121 мм





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓1

a_n - арифмет. прогресс.

$$a_4 = 6 - 9x$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2$$

$$a_{10} = 9x^2$$

$$a_n = a_1 + d(n-1), \quad \frac{a_n - a_k}{n-k} = d$$

$$\Rightarrow d = \frac{a_{10} - a_4}{10-4} = \frac{9x^2 - 6 + 9x}{6} = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$$

$$a_1 = a_4 - \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right) \cdot 3 = 6 - 9x - \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 3 =$$

$$= -\frac{9}{2}x^2 - \frac{24}{2}x + 9$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2 = -\frac{9}{2}x^2 - \frac{24}{2}x + 9 + \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right) \cdot 5 =$$

$$= 3x^2 - x + 4$$

$$3x^2 - x + 4 > 0 \quad (D < 0)$$

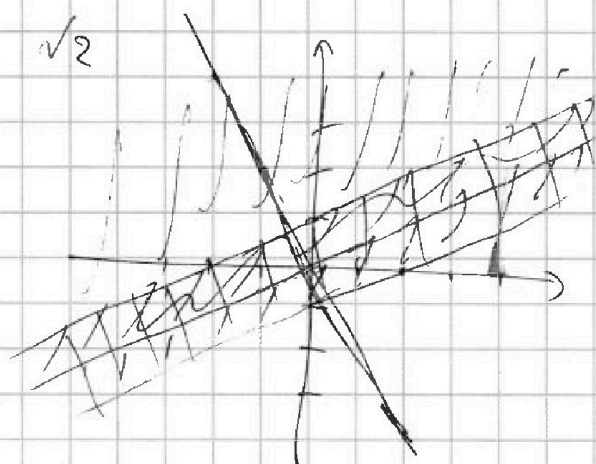


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$3y + 6x = 9$$

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2 - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$|2 - y| \leq 1$$

$$3y = 9 - 6x$$

$$y = \frac{3}{3} - 2x$$

$$\text{если } x - 2y \geq 0$$

$$y \leq \frac{x}{2}$$

$$x - 2y \leq 2$$

$$2y \geq x - 2$$

$$y \geq \frac{x}{2} - 1$$

$$\text{если } x - 2y < 0:$$

$$y > \frac{x}{2}$$

$$3y - x \leq 2$$

$$y \geq \frac{x}{2} + 1$$

√3

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m + 2n + 9)$$

$$1) A = 11p^2 = 11 \cdot p \cdot p$$

$$B = 7sq^2 = 7 \cdot 3 \cdot q \cdot q$$

$$1) m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = 11 \cdot p \cdot p$$

$$(m + 2n)^2 - 7(m + 2n) = 11 \cdot p \cdot p$$

$$m + 2n = L \in \mathbb{N}$$

$$L^2 - 7L = 11 \cdot p \cdot p$$

$$L^2 - 7L - 11 \cdot p^2 = 0$$

$$D = 49 + 44p^2$$

$$L = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 44p^2}}{2}, 49 + 44p^2 = g^2, g - \text{нечёт}$$

$$49 + 44p^2 - g^2 = 0$$

$$7^2 + 2 \cdot 22 \cdot p^2 - g^2 = 0$$

$$1) mn(m + 2n + 9) = 3^2 \cdot 3 \cdot q \cdot q$$

$$(m + 2n)(m + 2n + 9) = 11 \cdot p \cdot p$$

$$\Rightarrow m + 2n = 11p$$

$$\text{или } m + 2n = p$$

$$\text{или } m + 2n = p^2$$

$$m + 2n \neq 11$$

$$m \neq 8, (8, 3), (5, 5),$$

$$m \neq 3, (3, 5) - \text{не } p \cdot p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0_4 = 6 - 9x$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2$$

$$a_{10} = 8x^2 \quad x = ?$$

$$\frac{9x^2 - (x^2 - 2x)^2}{4} = \frac{9x^2 - 6 + 8x}{6}$$

$$9x^2 - (x^2 - 2x)^2 = 6x^2 + 6x - 4$$

$$(3x - x^2 + 2x)(3x + x^2 - 2x) = 2(3x^2 + 3x - 2)$$

$$(-x^2 + 5x)(x^2 + x) = 2(3x^2 + 3x - 2) = 6x(x+1) - 4$$

$$x^2(-x+5)(x+1) = 2(3x^2 + 3x - 2)$$

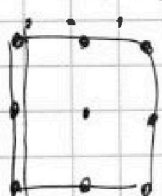
$$x^2(-x^2 + 4x + 5) = 2(3x^2 + 3x - 2)$$

$$-x^2(x-5)(x+1) - 6x(x+1) = -4$$

$$x(x+1)(x^2 - 5x + 6) = 4$$

$$x(x+1)(x-3)(x-2) = 4$$

$$x \neq 0, -1, 2, 3 \quad \text{попробуем } x = 1$$



$$A_3 = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 1$$

$$2 + 4 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =$$

$$27$$

$$27$$

$$27$$

$$27$$

$$27$$

$$27$$

$$27$$

$$27$$

$$27$$

$$27$$

$$27$$

$$27$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} = 3, 2$$

$$\frac{49}{4} = 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

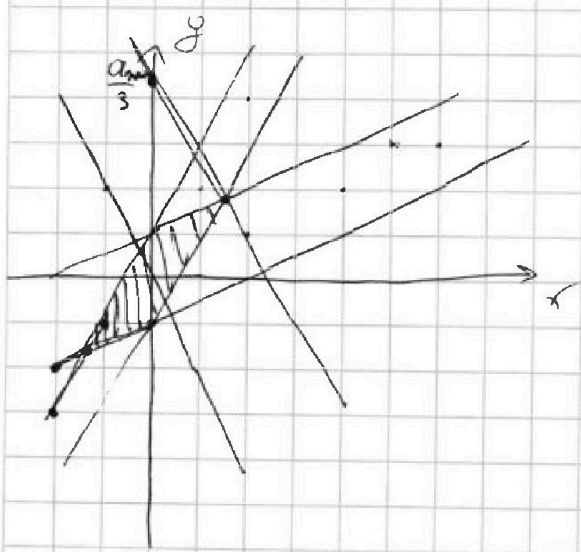
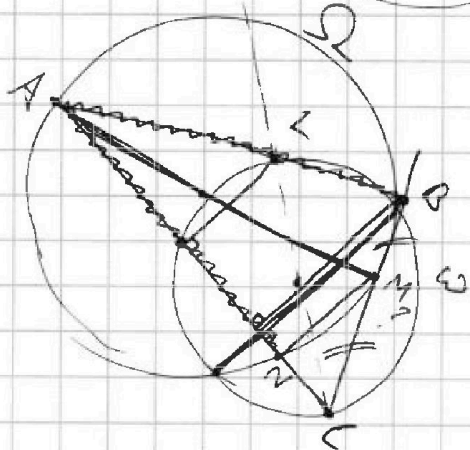
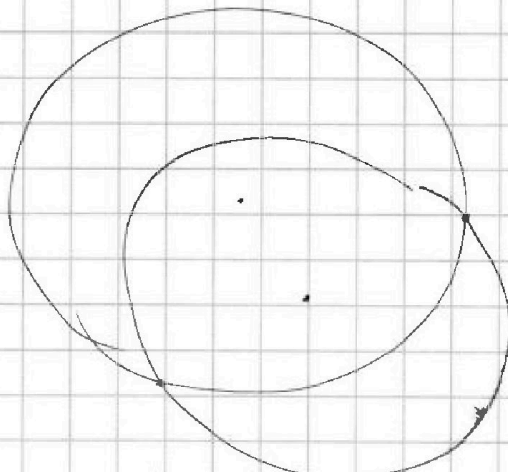
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$x-2y \in [-2; 2]$$

$$2x-y \in [-1; 1]$$

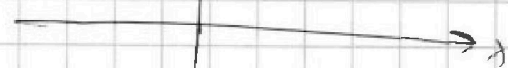
$$x-2y = [-2; 2]$$

$$2x-y = [-1; 1]$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} - [-1; 1] \\ y = 2x - [-1; 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} - [-1; 1] \\ y = 2x - [-1; 1] \end{cases}$$

1/1



$$3y+6x=9$$

$$y = \frac{9}{3} - 2x$$

$$\frac{5}{2} = \frac{0}{3} - \frac{6}{3}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$9 = 18$$

$$2x - 1 = \frac{x}{2} + 1$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$