



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Иссл. дан арифметическая последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots$
и:

$$a_1 = a_1$$

$$a_i - a_{i-1} = b$$

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2b \\ a_5 = a_1 + 4b \\ a_9 = a_1 + 8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \quad a_3 - a_1 + 2b = 3x + 3 \\ II \quad a_1 + 4b = (x^2 + 2x)^2 \\ III \quad a_1 + 8b = 3x^2 \end{cases} \begin{array}{l} \\ I - I \Rightarrow \\ III - I \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \quad 2b = (x^2 + 2x)^2 - 3x - 3 \\ II \quad 6b = 3x^2 - 3x - 3 \end{cases} \Rightarrow I - \frac{1}{3}II \Rightarrow 0 = (x^2 + 2x)^2 - 3x - 3 - x^2 + 1x + 1$$

$$0 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x - 2$$

$$0 = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$0 = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$0 = (x^3 + 3x^2 - 2)(x + 1)$$

Заметим что -1 - корень

$$0 = (x^3 + 3x^2 - 2)(x + 1)$$

$$D = 4 + 8 = 12 \Rightarrow \frac{D}{4} = 3 \quad (\text{Дискриминант})$$

$$0 = (-x + 1 + \sqrt{3})(-x + 1 + \sqrt{3})(x + 1)^2$$

$$\text{Ответ: } \{-1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}; -1\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

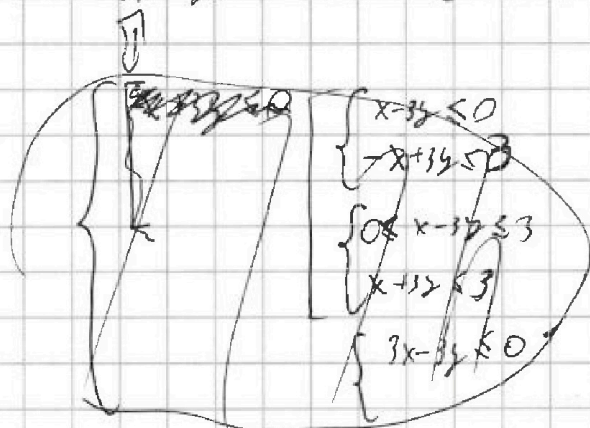
СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

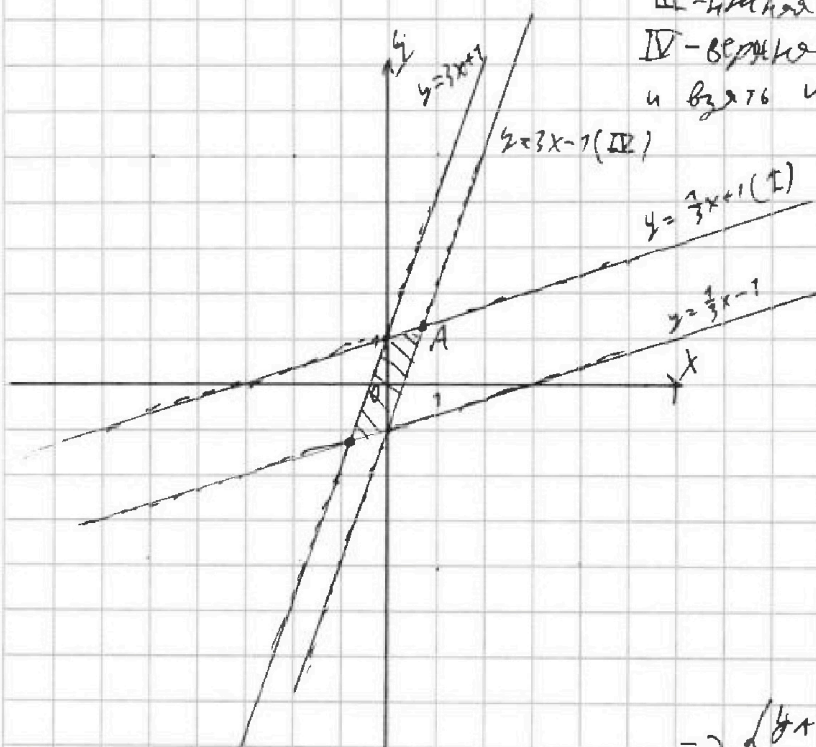
№2

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \\ x-3y \leq 3 \\ -1 \leq x-y \\ x-y \leq 1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \text{I} & \begin{cases} y \leq \frac{1}{3}x + 1 \\ y \geq \frac{1}{3}x - 1 \end{cases} \\ \text{II} & \begin{cases} y \leq 3x + 1 \\ y \geq 3x - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

I - нижняя полуплоскость от $y = \frac{1}{3}x + 1$
 II - верхняя полуплоскость от $y = \frac{1}{3}x - 1$
 III - нижняя полуплоскость от $y = 3x + 1$
 IV - верхняя полуплоскость от $y = 3x - 1$
 и взять их пересечение (включая границы)



$4y + 8x$ - максимум
 Возьмем по y и $x \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ мы видим, что
 $\max x$ и $\max y$ -
 - верхний правый
 угол фигуры (A)

$$A = I \cap IV$$

$$\begin{cases} y_A = \frac{1}{3}x_A + 1 \\ y_A = 3x_A - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = 1x_A - 1 \\ 0 = \frac{8}{3}x_A - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_A = 3x_A - 1 \\ x_A = \frac{3 \cdot 2}{8} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \\ x_A = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$4y_A + 8x_A = 4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 8$$

Ответ: 8



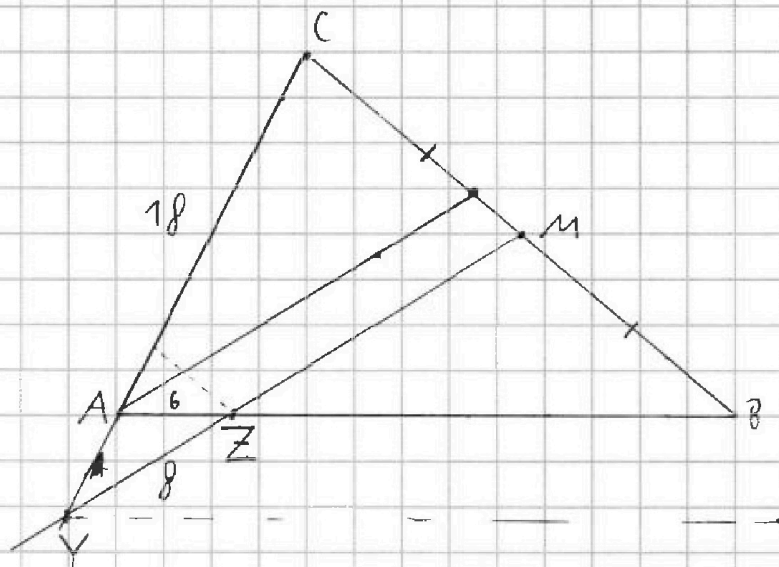
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

No 5

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + 5x + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y| \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x, y \geq 0 \end{cases} \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \end{cases}$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x^2-5x-6)(-1)}$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x-6)(x-1)(-1)}$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{6-x}$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} = 2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{6-x} - 5$$

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{6-x} (\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}) + 4(x-1)(6-x) = 5$$

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{6-x} + 6-x + 4((x-1)(6-x) - \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{6-x} (\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x})) = 5$$

$$2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{6-x} + 4((x-1)(6-x) - \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{6-x} (\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x})) = 0$$

$$\sqrt{x-1} \sqrt{6-x} \cdot (1 - 2(\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x})) = 2((x-1)(6-x))$$

$$1 - 2(\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}) = 2\sqrt{x-1} \sqrt{6-x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6
(продолж.)

2) оба угла между точками и центром делителю будут равными (точки лежат друг в друге после поворота на χ) $\Rightarrow$ угол $= \pi$

т.к. точки симметричны от центра
(таких пар $= \frac{81-1}{2} = 40$ для каждой

кроме центральной)

эти пары будут входить на 2 при поворотах на $\frac{\pi}{2}$

количество различных пар (по поворотам точек) =

$$= \frac{81-40}{2} + \frac{40}{2} = \frac{81!}{2! \cdot (81-2)! \cdot 4} + \frac{40}{2} = \frac{40}{4} =$$

(т.к. что разбивается на 4) (на 2)

$$= \frac{81 \cdot 80}{2 \cdot 4} + 10 = 81 \cdot 10 + 10 = 820$$

Ответ: 820



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Всего можно выбрать

C_8^2 пар точек.

Когда мы поворачиваем

Квадрат ~~на~~ 4 раза (не $\frac{90^\circ}{2}$)

то возвращаемся в

исходное положение, и после каждого поворота

мы "выпечатываем" пару точек которая

равносильна начальной, $\Rightarrow$ большинства пар

~~это~~ объединяется в четвёрки которые

переходят сами в себя при повороте, но

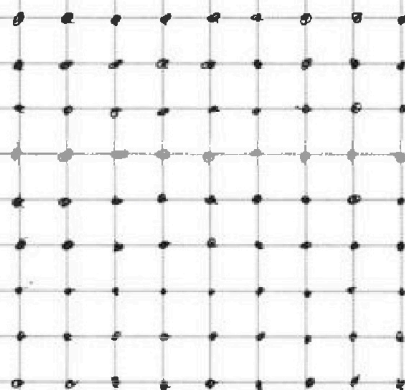
их может быть не 4 если пара переходит

в себя во время поворота. Такое происходит

когда точки расположены симметрично относительно

центральной точки (доказательство):

1) ~~Вопрос~~ Вопрос: при повороте расстояние от центра вращения не меняется (точка в центре квадрата) $\Rightarrow$ обе точки находятся на одном расстоянии от центра.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 67

$PQ \perp AC$



$O_1 O_2 \parallel AC$ ($O_1 O_2$ — центры окружностей)

$O_1 O_2$ — центр AM

$O_1 O_2$ — центр CL



расстояния от L и от M до AC равны



$LM \parallel AC$



LM — ср. линия

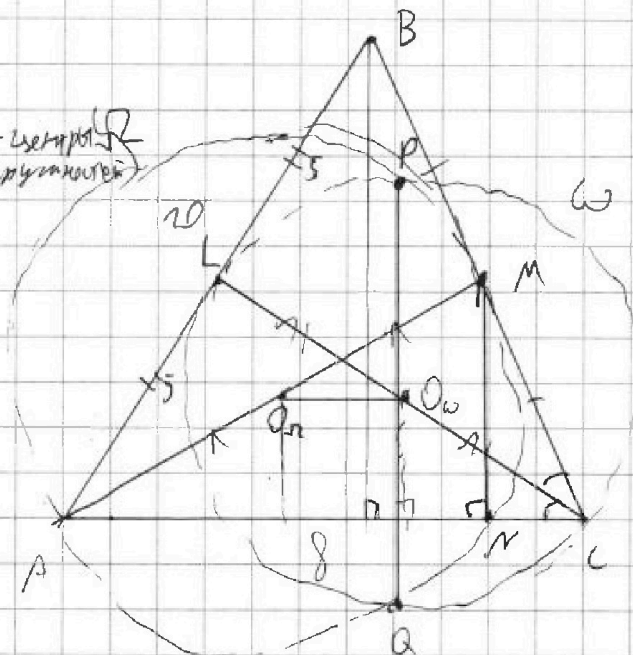


L — середина AB

CL — медиана (и биссектриса)



ABC — равнобедренный





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

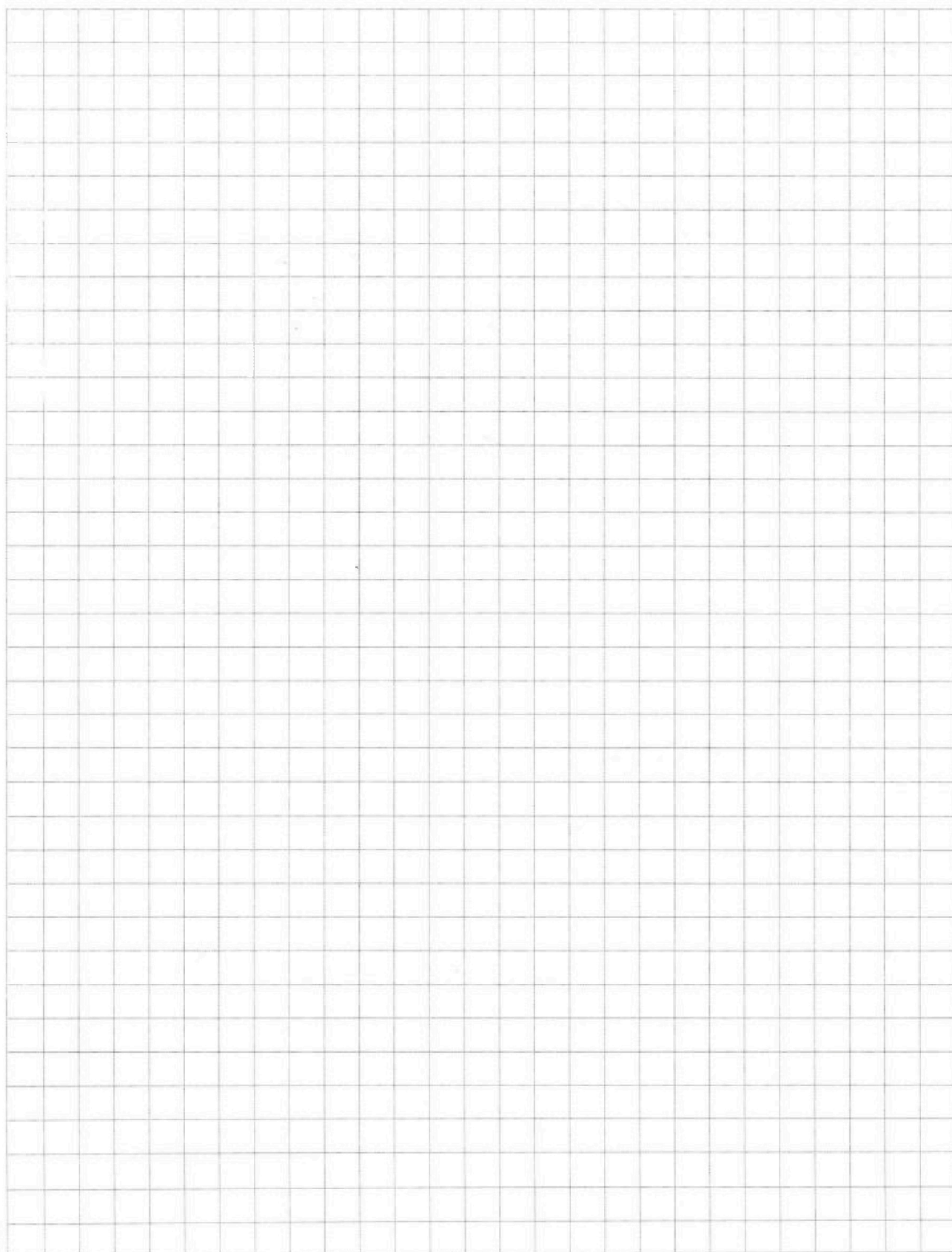
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





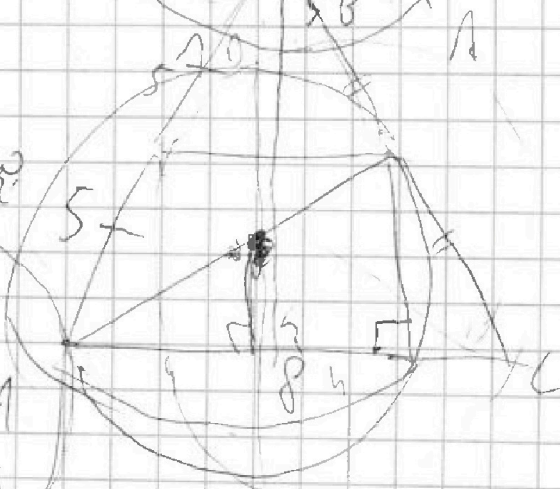
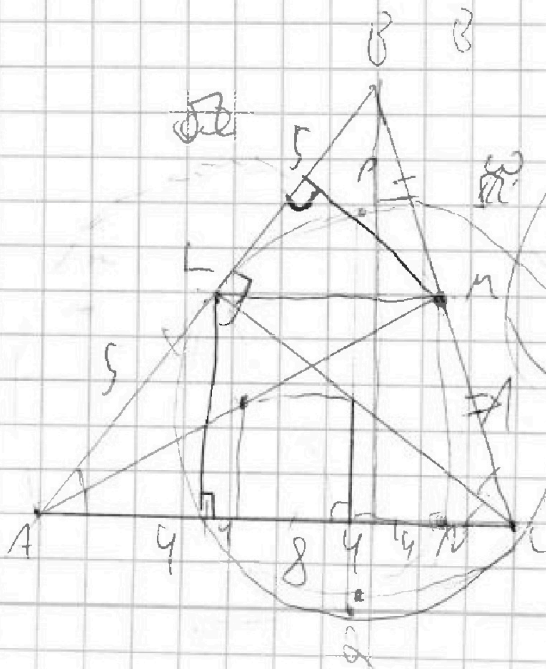
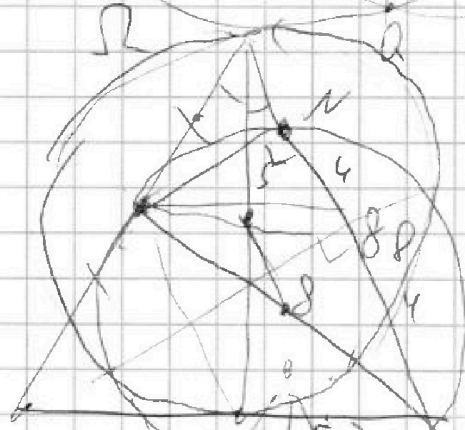
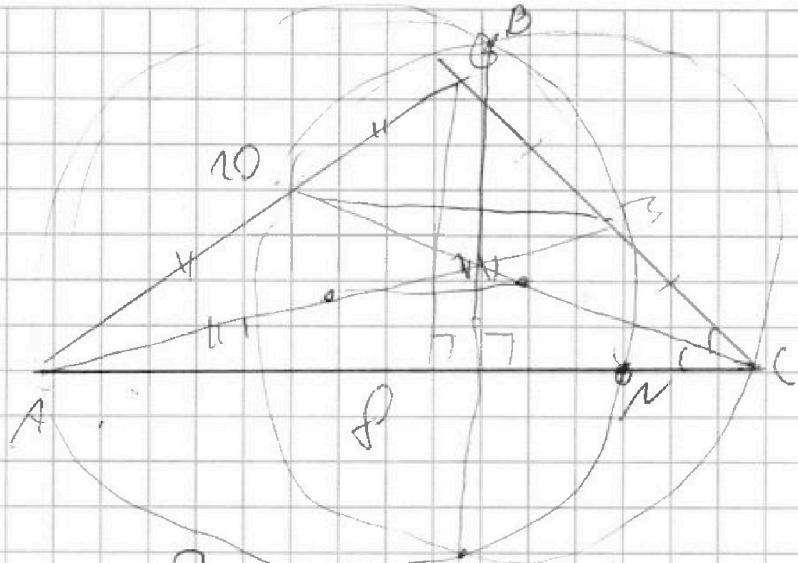
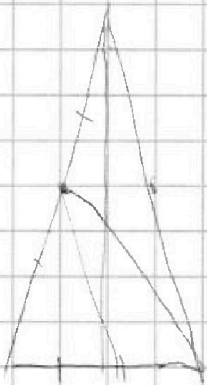
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2+1} - \sqrt{6-2} + 5 =$$
$$2\sqrt{6+54-42}$$





1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нов
 (повороты)

2/

оба угла между точками и
 центром равны $\frac{\pi}{2}$ (или $\frac{\pi}{4}$)
 (чтобы они перешли друг в друга после
 поворота на один угол) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ углы между ними $= \pi$.

и

Они симметричны от центра
 $\Rightarrow$ все точки есть симметричная
 (но центральная не подходит т.к. она
 симметрична сама с собой)

и

Точки на $\pi - \frac{81-1}{2} = 40$
 (пары которые имеют только одну точку
 которую можно получить поворотом на $\frac{\pi}{2}$)

и

(по повороту точки)
 Количество различных пар $=$

$$= \frac{C_{81}^2 - 40}{4} + \frac{40}{2} = \frac{81!}{2! \cdot (81-2)! \cdot 4} - \frac{40}{2} =$$

Группа пар
 которые разбиваются на 4
 (при повороте) $\Rightarrow$ на 2

$$= \frac{81 \cdot 80}{2 \cdot 4} - \frac{40}{2} = 81 \cdot 10 - 20 = 810 - 20 = 790$$

Ответ: 790



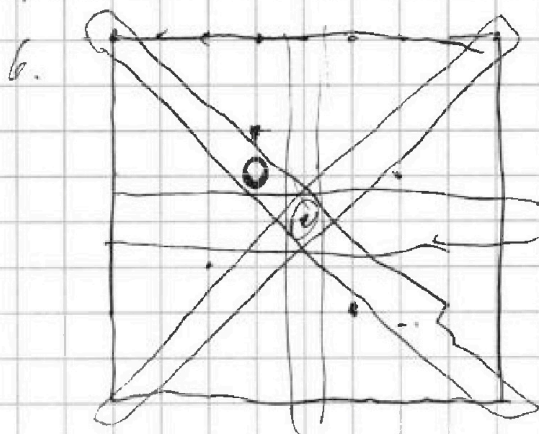
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

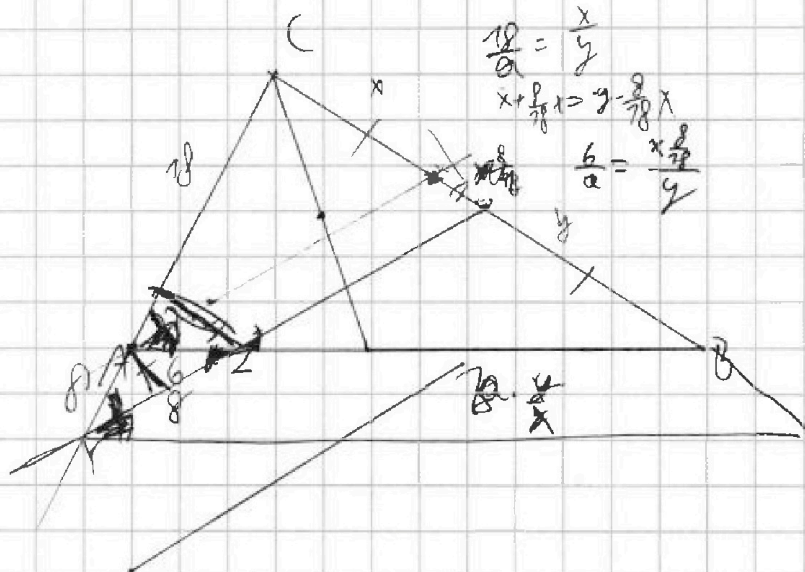
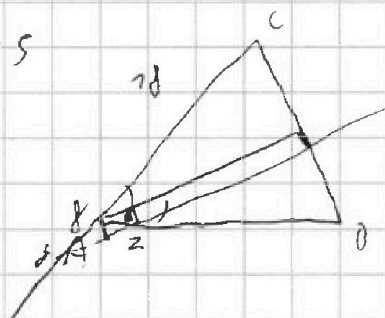


$$\frac{C_{87}^2}{4} = \frac{n!}{4k! \cdot (n-k)!} + 8$$

C_{87}^2



№5



$$\frac{18}{a} = \frac{x}{y}$$

$$x + \frac{18}{y} = y - \frac{8}{y}x$$

$$\frac{6}{a} = \frac{x \cdot \frac{8}{y}}{y}$$

$$\begin{cases} a_0 + 2b = 3x + 3 \\ a_0 + 4b = (x^2 + 2x)^2 \\ a_0 + 8b = 3x^2 \end{cases}$$

$$1 + 4 + 4 - 1 - 2 - 2$$

$$7 - 4 + 4 - 1 + 2 - 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

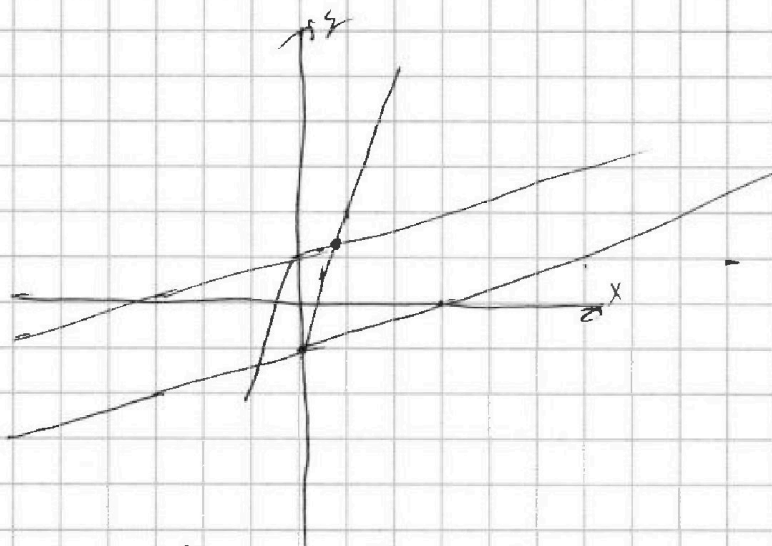
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x - 3y = 3 \quad 3x - y = 1$$

$$1y = \frac{1}{3}x - 1 \quad y = 3x - 1$$



$$m^2 + 2mn + n^2 - 9n - 9m$$

$$A = (m+n)^2 - 9(m+n) - 9 \cdot 9 = (m+n)(m+n-9) - 81$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6y} - 5 = 2\sqrt{5+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{x} = y^4 - \sqrt{y} + 5y^2 \end{cases}$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{x} = y^4 + \sqrt{y} + 5y^2$$

$$x^4 + 5x^2 = x$$

$$x(x^3 + 5x - 1) =$$