



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. Пусть (a_n) - арифметическая прогрессия; d - разность

$$\Rightarrow \frac{a_7 - a_5}{2} = d = \frac{a_{11} - a_5}{6} \Rightarrow \frac{(x^2 - 4x)^2 - (6x + 18)}{2} = \frac{-3x^2 - 6x + 18}{6}$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 4x)^2 = -3x^2 + 12x + 36 \Rightarrow (x^2 - 4x)^2 = -x^2 + 4x + 12$$

Замена: $t = x^2 - 4x$

$$t^2 = -t + 12 \Rightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 3 \end{cases}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 - 2\sqrt{7} \\ x = 2 + 2\sqrt{7} \end{cases}$$

Ответ: $-2 - \sqrt{7}$; $-2 + \sqrt{7}$; 2

~~№2~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2. Заметим, что $|a| + |b| \geq ||a| + |b|| \geq |a+b|$ (м.к. ~~$|a| + |b|$~~)

$$|a| + |b| \geq |a+b| \quad (\text{м.к. } \left(\frac{|a|}{|a|+|b|}\right)^2 = a^2 + b^2 + 2|ab| \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2)$$

2) ~~$15(4x-3y)$~~ $15 \cdot 16 + 12 \cdot 8 = 48 = 12 \cdot 5(4x-3y) \cdot 2x$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



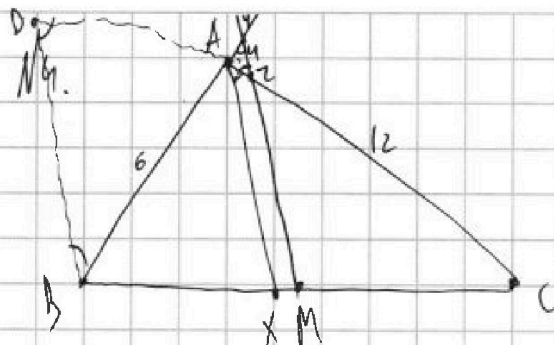
7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. $AX \parallel YM$, то $\angle XMY = \angle AY$
как накрест лежащие, аналогично
 $\angle BAX = \angle BYM$ как ~~всп.~~ $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ по признаку $\triangle YAZ$ $\parallel$ $\triangle$ $\Rightarrow$
 $AZ = AY$

Тогда по св-ву биссектрисы $\frac{BX}{CX} = \frac{BA}{CA}$; ~~Т.к.~~ $AX \parallel ZM$, то
по признаку $\triangle AXC \sim \triangle ZMC \Rightarrow \frac{AC}{ZC} = \frac{AC}{AC-AZ} = \frac{CX}{CM} = \frac{CX}{\frac{1}{2}BC}$

$\Rightarrow \frac{12}{12-3} = \frac{4}{3} = \frac{CX}{\frac{1}{2}BC} \Rightarrow CX = \frac{2}{3}BC \Rightarrow BX = \frac{1}{3}BC$; Т.к. $AX \parallel YM$,

то $\triangle BYM \sim \triangle BAX \Rightarrow \frac{AY}{AB} = \frac{BY}{BX} = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow \frac{BY}{AB} = 1,5 \Rightarrow \frac{AB+AY}{AB} = \frac{AB+3}{AB} = 1,5 \Rightarrow AB = 6$. Пусть $BD \parallel AX$, $D \in AC$. Тогда $BD \parallel YZ \Rightarrow$ по признаку $\triangle AYZ \sim \triangle ABD$

$\Rightarrow \frac{DB}{AZ} = \frac{AB}{AY} = \frac{DA}{AZ} \Rightarrow BA = 6; DB = 8$; по признаку (н.к.

$DB \parallel AX$) $\triangle CDB \sim \triangle CAX \Rightarrow \frac{AX}{DB} = \frac{AC}{CD} = \frac{AC}{AC-AD} \Rightarrow \frac{AX}{8} = \frac{2}{3} \Rightarrow AX = \frac{16}{3}$

AX - биссектриса $\Rightarrow AX = \sqrt{AB \cdot AC - BX \cdot XC} = \sqrt{6 \cdot 12 - \frac{2}{3}BX^2} = 5\frac{1}{3}$

$\Rightarrow BC^2 = \frac{6 \cdot 12 \cdot 9 - 256}{2} = 196 \Rightarrow (BC > 0) BC = 14$

Ответ: 14.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} & (1) \\ 4x^2 + x - 5\sqrt{y} = 4y^2 - 5\sqrt{x+y} & (2) \end{cases}$$

(2) $4x^2 + x + 5\sqrt{x} = 4y^2 + y + 5\sqrt{y}$. Рассмотрим $f(t) = 4t^2 + t + 5\sqrt{t}$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$$

$f_1(t) = 4t^2$ - возрастает. $\Rightarrow f(t)$ - возрастает. $\Rightarrow$ принимает свое значение

$f_2(t) = t$ - возрастает. свое значение равно 1 раз $\Rightarrow$ если

$f_3(t) = 5\sqrt{t}$ - возрастает. $f(x) = f(y)$, но $x = y$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} & (1) \\ x = y \end{cases}$$

Замена
 $(1) \begin{cases} u = \sqrt{x+6} \\ v = \sqrt{5-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v + 5 = 2uv \\ u^2 + v^2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 - 2uv + v^2 + u - v = 6 \\ u^2 + v^2 = 11 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (u-v)(u+v+1) = 6 \\ u^2 + v^2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (u-v)^2 + (u-v) + 6 = 0 \\ u^2 + v^2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u-v = -3 \\ u-v = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u-v = -3 \\ 2 = 2uv \\ u-v = 2 \\ 7 = 2uv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = v-3 \\ v(v^2-3v-1) = 0 \\ u = v+2 \\ 2(v^2+4v-7) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \\ v = -1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2} = -1 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} 5-x = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2 \\ 5-x = \left(-1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20-4x = 22+6\sqrt{13} \\ 20-4x = 22+12\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1+3\sqrt{13}}{2} \\ x = -\frac{1+6\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{1+3\sqrt{13}}{2}, -\frac{1+6\sqrt{2}}{2}$



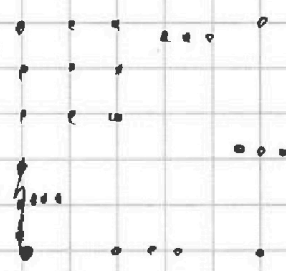
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.  Всего 100 узлов, каждый из которых можно перекрасить белым цветом. Из каждой раскраски поворотом можно получить ровно 3 другие и больше никакие (т.к. 4 поворота 90° возвращают в исходную раскраску). При любой раскраске хотя бы 1 из вершин нечетное количество $\rightarrow$ если отслеживать её перемещение при поворотах, то она вернется в исходную только через 4 поворота. Если вершины не стоят симметрично, то относительно центра вращения, то они вернутся в исходное состояние через 2 поворота.

Получаем,

$$= \frac{100^2}{8} = 1250 \text{ раскрасок}$$

Ответ: 1250 по способу.

Handwritten calculations and notes:

$100 \cdot 99 \cdot 98 + 99 \cdot 98 \cdot 97 + \dots$

$100 \cdot 98 \cdot 97 + 100 \cdot 1 \cdot 100$

$\frac{100 \cdot 98 \cdot 97}{4} + \frac{100 \cdot 1 \cdot 100}{2} =$

$2 - \text{не зависит от пары вершин}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

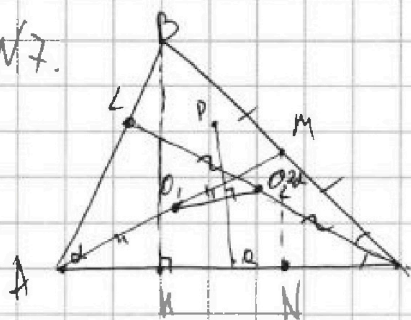
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.



Пусть O_1 - центр ω , а O_2 - центр ω_1
 $\Rightarrow O_1P = O_1Q; O_2P = O_2Q$ O_1, O_2 лежат
 O_1 - середина AM (т.к. AM - диаметр ω)
 O_2 - середина LC (т.к. LC - диаметр ω_1)

1) $O_1P = O_1Q; O_2P = O_2Q \Rightarrow$ по признаку $\triangle PO_1Q; \triangle PO_2Q$ - р/бг.

2) O_1 и O_2 лежат на середине PQ по свойству $\Rightarrow O_1O_2 \perp PQ$.

П.к. $PQ \parallel BN$ (BN - высота), а $BN \perp AC$, то $O_1O_2 \parallel AC$.

Пусть $F = AB \cap O_1O_2; E = BC \cap O_1O_2$ по признаку O_1E - средняя линия в $\triangle ABC$, аналогично FO_2 - средняя линия в $\triangle ABC \Rightarrow$

т.к. $LM \parallel AC$ Пусть K_1, K_2, K_3, K_4 - основания высот из O_1, O_2 на AC . П.к. $O_1K_1 \parallel MK_4 \parallel O_2K_2 \parallel LK_3$, $\frac{AO_1}{AK_1} = \frac{1}{2} = \frac{O_2K_2}{LK_3}$ по признаку $\triangle AO_1K_1 \sim \triangle AMK_4; \triangle CO_2K_2 \sim \triangle CLK_3 \Rightarrow LK_3 =$ т.к. $O_1O_2 \parallel AC$

$O_1K_1 = O_2K_2 \Rightarrow LK_3 = 2O_2K_2 = 2O_1K_1 = MK_4 \Rightarrow$ по признаку $LM \parallel AC \Rightarrow$ по признаку LM - средняя линия $\triangle ABC$ и CL - медиана

и биссектриса $\Rightarrow \triangle ABC$ (по признаку р/бг. ($BC = AC$)). По св-ву п/лого $\triangle AMK_4; O_1K_4 = AO_1 = O_1M \Rightarrow K_4$ лежит на $AL \Rightarrow K_4 = N$

Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $AN = AB \sin \alpha$ $BN \parallel MN$ $\triangle BNC \sim \triangle MNC$

$\frac{BN}{MC} = \frac{CN}{MN} = 2$. т.к. CL - высота по св-ву р/бг. $\triangle ABC$ $\angle A = \frac{1}{2} \angle B =$

$\Rightarrow AC \cos \alpha$; $CN = \frac{1}{2}(AC - AN) = \frac{1}{2}AC(1 - \sin \alpha)$ $\Rightarrow$

$AN = AC(1 - \sin \alpha)$ $AB = 2AC \cos \alpha$ $AB = 2AC \cos \alpha$

$AN = AC(1 - \sin \alpha)$ $AB = AN = AC(1 - \sin \alpha)$



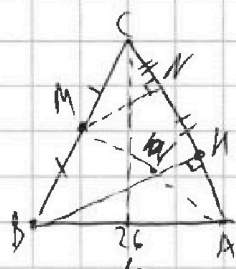
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $AC = a = BC$; CL - высота и медиана

$\Rightarrow \triangle CLA$ - п/коп.

$\triangle BNA \sim \triangle CLA$ по двум углам в п/коп $\triangle$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{CA}{CL} = \frac{BA}{NA} = \frac{a}{26} \quad (\text{п.к. } CL = \frac{1}{2} BA = 13 \text{ п.к. } (L - \text{середина})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow NA = \frac{26 \cdot 13}{a}. \quad \text{п.к. } \triangle CNB \sim \triangle CMN, \text{ но } CN = \frac{1}{2} CA =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (CA - NA) = \frac{1}{2} \left(a - \frac{26 \cdot 13}{a} \right); \quad AN = AC - CN = a - \frac{1}{2} \left(a - \frac{26 \cdot 13}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(a + \frac{26 \cdot 13}{a} \right) \Rightarrow a + \frac{26 \cdot 13}{a} = 40 \Rightarrow a^2 - 40a + 26 \cdot 13 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 20 \pm \sqrt{400 - 338} = 20 \pm \sqrt{62}, \text{ но п.к. } AN = 20, \text{ а } N \text{ лежит на}$$

$$\text{отрезке } AC \Rightarrow a = 20 + \sqrt{62}$$

$$\text{Ответ: } 20 + \sqrt{62}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

