



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть арифм. прогр. Будет вида $a_n = a + k(n-1)$, тогда

$$a_5 = a + 4k = 6x + 18, \quad a_7 = a + 6k = (x^2 - 4x)^2, \quad a_{11} = a + 10k = (3x^2)$$

2) Тогда

$$a + 6k - (a + 4k) = 2k = (x^2 - 4x)^2 - (6x + 18)$$

$$a + 10k - (a + 6k) = 4k = (-3x^2) - (x^2 - 4x)^2$$

$$\Rightarrow 2((x^2 - 4x)^2 - 6x - 18) = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3x^2 + 3(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 4x + (x^2 - 4x)^2 - 4 = 0$$

Пусть $(x^2 - 4x) = t$

$$t^2 + t - 4 = 0$$

$$(t + 4)(t - 3) = 0$$

$$\Rightarrow t + 4 = 0 \quad \text{или} \quad t - 3 = 0$$

$$t = -4$$

$$t = 3$$

Согл. зам:

$$x^2 - 4x = -4$$

$$x^2 - 4x = 3$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 2 \pm \sqrt{7}$$

3) Так как каждое уравнение было либо линейным, либо квадратным, либо кубическим, а все 5 корней подходят (если их подставить, в каждое уравнение), эти 5 значений - наш ответ.

Ответ: $2 - \sqrt{7}; 2; 2 + \sqrt{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \quad | +3 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \quad | \cdot (-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -18 \leq -12x + 9y \leq 18 \\ -32 \leq -12x + 16y \leq 32 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -50 \leq (12x - 9y) + (-12x + 16y) \leq 32 + 18$$

$$-50 \leq 7y \leq 50$$

$$-\frac{50}{7} \leq y \leq \frac{50}{7}$$

(максимальные значения y)

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \quad | \cdot 4 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \quad | \cdot (-3) \end{cases} \quad \begin{cases} -24 \leq 16x - 12y \leq 24 \\ -24 \leq -9x + 12y \leq 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -24 + 24 \leq (16x - 12y) + (-9x + 12y) \leq 24 + 24$$

$$-48 \leq 7x \leq 48$$

$$-\frac{48}{7} \leq x \leq \frac{48}{7}$$

(все значения x)

1) Максимальное значение $14x + 7y$ будет при максимальных x и y . Макс. x и y равны $-\frac{48}{7}$ и $-\frac{50}{7}$ из полученных выше.

$$2) \text{ Максимальное } 14x + 7y = -\frac{48}{7} \cdot 14 + \left(-\frac{50}{7}\right) \cdot 7 = -48 \cdot 2 + (-50) = -146$$

Ответ: -146



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

11) $(m-n)(m-n+9) = 3q^2$

Один из множителей $(m-n)$ или $(m-n+9)$ должен делиться на 3, т.к. $3q^2$ делится на 3, а множители - целые числа, но

если $m-n$ кратно 3, то $m-n+9$ также кратно 3, т.к. $9 \div 3 = 3$.

Если же $m-n+9$ кратно 3, то $m-n$ также делится на 3.

12) Значит $3q^2$ делится на 9, т.к. 2 множителя кратно 3

Т.к. q - простое и делится на 3, то единственно возможный вариант $q=3$

$$\Rightarrow 3q^2 = 27$$

13) Если $m-n$ - простое, то $m-n+9$ - простое, и наоборот, если $m-n+9$ - простое, то $m-n$ - простое (т.к. 9 простое, а простое + простое = простое)

Значит их произведение - простое, но 27 - не простое,

$$\text{значит } A \neq 3q^2$$

14) $\Rightarrow$ нас всего 1 вариант $m=7, n=3$

Ответ: 7; 3

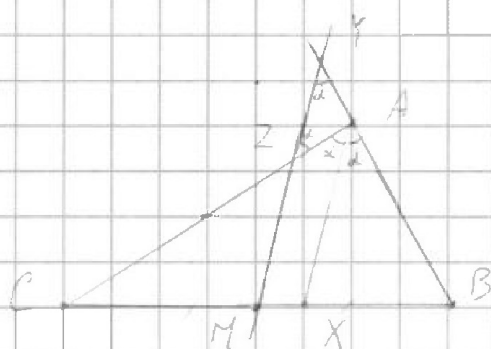


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: AX - бис. M - середина BC

$MY \parallel AX$ ~~середина~~

$AC = 12$ $AZ = 3$ $YZ = 4$

Найти:

$BC = ?$

Решение:

1) Пусть $\angle CAH = \alpha \Rightarrow \angle HAB = \alpha$, а $\angle BAC = 2\alpha$

2) $AX \parallel MY$, а AZ - секущая $\Rightarrow \angle CAH = \alpha$ и $\angle YZA$ - накр. лежа, а также $\angle YZA = \angle CAH = \alpha$

3) $\angle YAC = 180^\circ - \angle CAB = 180^\circ - 2\alpha$

4) $\angle YAZ + \angle AYZ + \angle AZY = 180^\circ \Rightarrow \angle AYZ = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = \alpha$

5) Получается, что треугольник AYZ - равнобедр. и $AY = AZ = 3$

6) По теореме косинусов $AY^2 + AZ^2 - 2 \cos \angle YAZ \cdot AY \cdot AZ = YZ^2$

$$3^2 + 3^2 - 2 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) \cdot 3 \cdot 3 = 4^2$$

$$-2 \cos(180^\circ - 2\alpha) \cdot 9 = 16 - 18 \quad | : -2$$

$$9 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) = 1$$

$$\cos(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$$

7) По теореме (если l и m симметричны относительно AX) $\frac{BM}{MC} = \frac{CZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{AB} = 1$

$$\frac{BM}{MC} = 1, \text{ т.к. } M - \text{середина } BC; CZ = AC - AZ = 12 - 3 = 9 \Rightarrow \frac{CZ}{AZ} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 3 \cdot \frac{AY}{AB} = 1 \quad 3AY = AB \quad AB = 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

8) По теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos \angle A \cdot AB \cdot AC$

$$BC^2 = 9^2 + 12^2 - 2 \cdot \cos 2\alpha \cdot 9 \cdot 12$$

($\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$, см пункт 6)

$$BC^2 = 81 + 144 + 2 \cdot \frac{3 \cdot 12}{9}$$

$$BC^2 = 81 + 144 + 24 = 249$$

$$BC = \sqrt{249}$$

Ответ: $\sqrt{249}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -6 \\ y \leq 5 \end{cases}$$

Пускай функция

$$f(x) = 4x^4 + x + 5\sqrt{x}$$

получается $f(x) = f(y)$

Функция монотонно возрастает, поэтому принимает лишь одно значение.

значения, а $x \geq 0$ и $y \geq 0$

Функция монотонно возрастает $\Rightarrow x = y$

$$\Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)} \quad |^2 \text{ (так как обе части неотрицательны, это равносильное преобразование)}$$

$$4(x+6)(5-x) = 25 + 10(\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x}) + x+6 - 2(\sqrt{x+6} \cdot \sqrt{5-x} + 5-x)$$

$$4(x+6)(5-x) = 25 + 10\sqrt{x+6} - 10\sqrt{5-x} + 11 - \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{5-x} - 5$$

$$4(x+6)(5-x) = 31 + 9\sqrt{x+6} - 9\sqrt{5-x}$$

$$120 - 4x - 4x^2 = 31 + 9(\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x})$$

$$(30-x-x^2)4 = 31 + 9(2\sqrt{30-x-x^2} - 5)$$

Положим $\sqrt{30-x-x^2} = t$

$$4t^2 = 31 + 9 \cdot (2t - 5)$$

$$4t^2 = 31 + 18t - 45$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^2 = 18t - 14$$

$$t^2 - \frac{18}{4}t + \frac{14}{4} = 0$$

$$t^2 - 4,5t + 3,5 = 0$$

$$(t-1)(t-3,5) = 0$$

$$t=1 \text{ или } t=3,5$$

Согл. зад.

$$\sqrt{30-x-x^2} = 1 \text{ или } \sqrt{30-x-x^2} = 3,5$$

$$\sqrt{30-x-x^2} = 3,5$$

$$\begin{cases} 30-x-x^2=1 \\ 30-x-x^2=12,25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30-x-x^2=12,25 \\ 30-x-x^2=12,25 \end{cases}$$

$$29-x-x^2=0$$

$$26,5-x-x^2=0$$

$$x^2+x-29=0$$

$$x^2+x-26,5=0$$

$$D=1+29\cdot 4=117$$

$$D=1+8\cdot 53=107\cdot 4$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{117}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{107}}{2}$$

Получим неравенства для x в $[0; 3]$.

$$\frac{-1 - \sqrt{117}}{2} < 0 \Rightarrow x \neq \frac{-1 - \sqrt{117}}{2}; \quad \frac{-2 - \sqrt{107}}{2} < 0 \Rightarrow x \neq \frac{-2 - \sqrt{107}}{2}$$

$$\sqrt{100} < \sqrt{107} < \sqrt{117} < \sqrt{121} \Rightarrow 10 < \sqrt{107} < \sqrt{117} < 11 \Rightarrow 4$$

$$9 < -1 + \sqrt{107} < -1 + \sqrt{117} < 10$$

$$4,5 < \frac{-1 + \sqrt{107}}{2} < \frac{-1 + \sqrt{117}}{2} < 5 \quad \text{По ОДЗ } -6 < x \leq 9$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{107}}{2} \text{ и } x = \frac{-1 + \sqrt{117}}{2} = \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{-1 + \sqrt{107}}{2}; \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поря QR-кода недопустима!

- 1) Для начала наглядно, считаем всего рисунков (без учета с поворотом), найдем их нам в логично найденно чисел комбинаций

$$C_{100}^2 = \frac{100!}{2!98!} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 50 \cdot 99 = 4950$$

(2 - потому что 2 узла, 100 - потому что всего 100 узлов)

- 2) Теперь можно было бы просто разделить это число на 4, но заметим, что есть такие узлы (каждый их симметричен), которые при повороте на 180° образуют перевернутый рисунок, например . Например  - симметричные узлы.

- 3) Если проанализировать все узлы так, чтобы левый верхний угол был 1, левый нижний 3, правый верхний 2, а правый нижний 4 (см. ), то симметричные - это те, что в сумме дают 101, а таких пар всего 50.

- 4) Значит среди 4950 рисунков 4900 имеют 3 "симметричных" при повороте на 90° , 180° и 270° ; и 50 рисунков являются симметричными и являются сами (каждый при повороте на 90°). Значит уникальных рисунков всего $\frac{4900}{4} + \frac{50}{2} = 49 \cdot \frac{100}{4} + \frac{50}{2} = 49 \cdot 25 + 25 = 50 \cdot 25 = 1250$

Ответ: 1250 рисунков

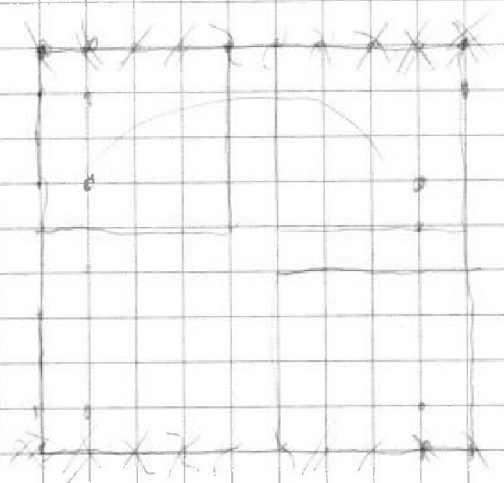


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \times 10 = 100$$

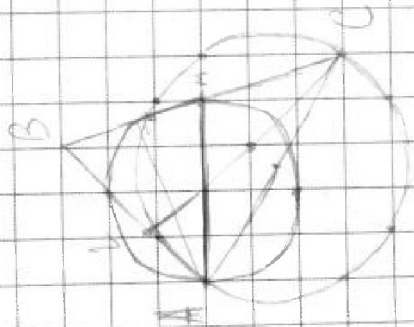
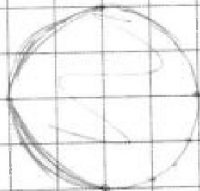
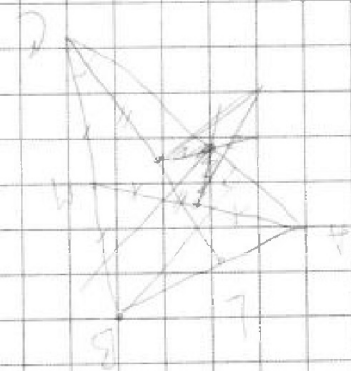
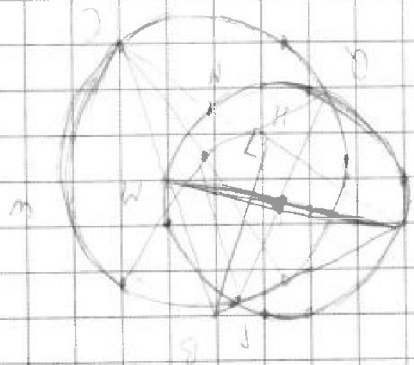
$$\frac{100 \cdot 39}{2}$$

$$C_{100}^2 = \frac{100!}{38! \cdot 2!} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 39 \cdot 50 = 95 \cdot 40 = 4950 \div 2 = 4950$$

$$\frac{4900}{2}$$

$$\frac{4950}{2}$$

$$\frac{50}{2} = 49 \cdot 25 + 25 = 50 \cdot 25 = 750$$





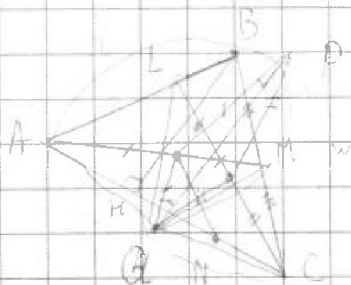
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА

~~10~~ ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

CL-ди.

MA-медиана

PG||BH

AM-диаметр Ω

CL-диам ω

$\Omega \cap \omega = P, Q$

BK-высота

AB = 26

AN = 20

Найти:

AC = ? BC = ?

Решение:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + 4k = 6x + 18$$

$$a + 6k = (x^2 - 4x)^2$$

$$a + 10k = (-3x^2)$$

$$2k = (x^2 - 4x)^2 - 6x - 18$$

$$4k = (-3x^2) - (x^2 - 4x)^2$$

$$(2\sqrt{2})(2\sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 7 = 11 + 4\sqrt{2}$$

$$2((x^2 - 4x)^2 - 6x - 18) = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$2(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3x^2 + 3(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = 0$$

$$x^2 + (x^2 - 4x)^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 12x - 36 = (x - 6)^2$$

$$(x - 6)^2 + (x^2 - 4x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x - 6 = 0 \quad x^2 - 4x = 0$$

$$x = 6 \quad (x - 4)x = 0$$

$$x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$(x^2 - 4x)^2 + (x^2 - 4x) - 9 = 0$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t} - 9 = 0$$

$$D = 10 + 36 = 46$$

$$t = -1 \pm \sqrt{37} \Rightarrow t = 1 + \sqrt{37}$$

$$(x^2 - 4x) = 1 + \sqrt{37}$$

$$x^2 - 4x = (1 + \sqrt{37}) = 0$$

$$x^2 - 4x = 3$$

$$x^2 - 4x = 4$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x(1) = 16 + 1 = 17$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{37}}{2}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{37}$$

$$x = 2$$

$$a + 4k = 30$$

$$a + 6k = (4 - 8)^2 = 16$$

$$a + 10k = -12$$

$$2\sqrt{2}$$

$$a + 4k = 30 - 6\sqrt{2}$$

$$(x^2 - 4x)^2 = (11 + 4\sqrt{2} - 8 - 4\sqrt{2}) = 3$$

$$\Rightarrow x^2 = -3 - 12\sqrt{2}$$

$$2k = 2 + 6\sqrt{2}$$

$$4k = 4 + 12\sqrt{2}$$

$$9 - 42 - 12\sqrt{2}$$

$$2 - \sqrt{2}$$

$$30 - 6\sqrt{2}$$

$$11 - 4\sqrt{2} - 8 + 4\sqrt{2} = 3$$

$$-33 + 12\sqrt{2}$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$(t - 3)(t + 4) = 0$$

$$t = 3$$

$$x^2 - 4x = 3$$

$$x^2 - 4x = 4$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x(1) = 16 + 1 = 17$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{37}}{2}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{37}$$

$$x = 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$2) m \in \mathbb{N} \text{ и } n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m-n) \in \mathbb{Z} \text{ и } (m-n+9) \in \mathbb{Z}$$

3) Запишем все возможные разложения $13p^2$ и $3p^2$ на простые числа и множители, учитывая, что $p, 13, 9$ и 3 - простые числа.
(система уравнений $A = 13p^2$)

$$A = 1 \cdot 13p^2 = (-1) \cdot (-13p^2) = 13 \cdot p^2 = (-13) \cdot (-p^2) = p \cdot 13p = (-p) \cdot (-13p)$$

4) Значит получаем, что $(m-n)$ равен 1 из этих множителей, а $(m-n+9)$ - по пере, подставим значения, и проверим, какие сойдутся.

$$\left\{ \begin{array}{l} m-n = 1 \\ m-n+9 = 13p^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 13p^2 = 10 \end{array} \right. \Rightarrow p^2 = \frac{10}{13} \Rightarrow p = \pm \sqrt{\frac{10}{13}}, \text{ но } p \in \mathbb{N} \Rightarrow (1, 13p) \text{ не подходит}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m-n = -13p^2 \\ m-n+9 = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -13p^2 \\ -13p^2 = -10 \end{array} \right. \Rightarrow p^2 = \frac{10}{13} \Rightarrow p = \pm \sqrt{\frac{10}{13}}, \text{ но } p \in \mathbb{N} \Rightarrow (-13p, -1) \text{ не подходит}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m-n = 13 \\ m-n+9 = p^2 \end{array} \right. \Rightarrow 13+9 = p^2 \Rightarrow p^2 = 22 \Rightarrow p = \pm \sqrt{22} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m-n = -13 \\ m-n+9 = p^2 \end{array} \right. \Rightarrow -13+9 = p^2 \Rightarrow p^2 = -4 \Rightarrow p = \pm 2 \text{ (2 - простое число)} \Rightarrow (13, p^2) \text{ подходит}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m-n = p^2 \\ m-n+9 = 13 \end{array} \right. \Rightarrow p^2+9 = 13 \Rightarrow p^2 = 4 \Rightarrow p = \pm 2 \Rightarrow (p^2, 13) \text{ - подходит}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m-n = 13p \\ m-n+9 = p \end{array} \right. \Rightarrow 13p+9 = p \Rightarrow 12p = -9 \Rightarrow p = -\frac{3}{4}, \text{ но } p \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m-n = p \\ m-n+9 = 13p \end{array} \right. \Rightarrow p+9 = 13p \Rightarrow 12p = 9 \Rightarrow p = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{не подходит}$$

5) В итоге получаем, что $m-n = -13$, $m-n+9 = p^2$; либо $m-n = p^2$, $m-n+9 = 13$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$(m-n)(m-n+9) = 13p \cdot p; \quad p^2 \leq 13; \quad 3q \leq 9; \quad q \leq 3; \quad 13p \leq 9$$

$$p = 13p; \quad 13 \leq p^2; \quad 3 \leq q^2; \quad 9 \leq 3; \quad 13 \leq 9$$

$$p = 13p; \quad 13 \leq p^2; \quad 3 \leq q^2; \quad 9 \leq 3; \quad 13 \leq 9$$

$$3q + 2 = 4^2$$

$$m-n > m-n-9 \Rightarrow m-n \geq 13p$$

$$m-n-9 \geq p$$

$$13p - 9 \geq p$$

$$p + 9 \geq 13p$$

$$12p \geq 9$$

$$p \geq \frac{3}{4} \notin \mathbb{N}$$

$$m-n \geq 3$$

$$m-n-9 \geq 4^2$$

$$m-n \geq 10$$

$$13p^2 \leq m-n$$

$$1 \leq m-n-9$$

$$m-n \geq 10$$

$$3q^2 = m-n$$

$$1 \leq m-n-9$$

$$m-n \geq 10$$

$$3q^2 = m-n$$

$$1 \leq m-n-9$$

$$m-n \geq 10$$

$$3q^2 = m-n$$

$$1 \leq m-n-9$$

$$m-n \geq 10$$

$$3q^2 = m-n$$

$$1 \leq m-n-9$$

$$m-n \geq 10$$

$$3q^2 = m-n$$

$$m \cdot n \cdot (m-n+3) = 4 \cdot 9 \cdot 3; \quad 4 \cdot 3 \cdot 9; \quad 3 \cdot 9 \cdot 9;$$

$$m \cdot n = 1 \cdot 3; \quad 4 \cdot 9; \quad 9 \cdot 9; \quad 1 \cdot 3 \cdot 3; \quad 4 \cdot 9; \quad 1 \cdot 9 \cdot 3; \quad 9 \cdot 1 \cdot 3;$$

$$m \cdot n \cdot 3 = 3 \cdot 1 \cdot 3; \quad 3 \cdot 4 \cdot 9; \quad 3 \cdot 9 \cdot 9; \quad 9 \cdot 3 \cdot 1; \quad 3 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1; \quad 3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 9;$$

$$q = 1 \cdot 1 \cdot 1; \quad 1 \cdot 3 \cdot 9; \quad 3 \cdot 9 \cdot 1; \quad 9 \cdot 1 \cdot 3; \quad 3 \cdot 1 \cdot 9;$$

$$3 \cdot 9 \cdot 1; \quad 1 \cdot 9 \cdot 3; \quad 1 \cdot 3 \cdot 9;$$

$$3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1; \quad 1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 1; \quad 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 9;$$