



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x . ~~найдите~~
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

~~найдите наименьшее значение~~

~~найдите~~

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q — простые числа. Решите.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

~~найдите~~

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми. ~~найдите~~
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CE как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

Пусть a_1 - первый член заданной арифметической прогрессии, d - ее разность. Тогда пятый член прогрессии равен $a_1 + 4d$, седьмой равен $a_1 + 6d$, одиннадцатый равен $a_1 + 10d$.

По условию,

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 6x + 18 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 6d = (x^2 - 4x)^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 10d = -3x^2 & (3) \end{cases}$$

Вычитая (1) из (2): $2d = (x^2 - 4x)^2 - 6x - 18 \Rightarrow 2d = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$. Делим обе части полученного уравнения на 2:

$$4d = 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 \quad (4)$$

Вычитая (2) из (3): $4d = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2 \Rightarrow 4d = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 \Rightarrow 4d = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 \quad (5)$

Из (4) и (5) уравнения получаем:

$$2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3 \Rightarrow x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

Пусть $f(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12$

Разделим $f(x)$ на $(x-2)$ по схеме Горнера:

1	-8	17	-4	-12	
2	1	-6	5	6	0

Итого:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получаем, что $f(x) = (x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6)$

Разделим $x^3 - 6x^2 + 5x + 6$ на $x-2$ по схеме Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & 5 & 6 \\ & 1 & -4 & -3 & 0 \end{array}$$

Получаем, что $f(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x - 3)$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 + \sqrt{7} \\ x = 2 - \sqrt{7} \end{cases}$$

$D/4 = 4 + 12 = 16$

Ответ: $x \in \{ 2, 2 + \sqrt{7}, 2 - \sqrt{7} \}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6-4x \leq -3y \leq 6-4x \\ -8-3x \leq -4y \leq 8-3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2+\frac{4}{3}x \geq y \geq -2+\frac{4}{3}x \\ 2+\frac{3}{4}x \geq y \geq -2+\frac{3}{4}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+\frac{4}{3}x \geq -2+\frac{3}{4}x \\ 2+\frac{3}{4}x \geq -2+\frac{4}{3}x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}) \geq -4 \\ x(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}) \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot \frac{7}{12} \geq -4 \\ x \cdot \frac{7}{12} \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{48}{7} \\ x \leq \frac{48}{7} \end{cases} \quad (1)$$

Почему

$$(4) \Rightarrow \begin{cases} -6+3y \leq 4x \leq 6+3y \\ -8+4y \leq 3x \leq 8+4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{6}{4}+\frac{3}{4}y \leq x \leq \frac{6}{4}+\frac{3}{4}y \\ -\frac{8}{3}+\frac{4}{3}y \leq x \leq \frac{8}{3}+\frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{6}{4}+\frac{3}{4}y \leq \frac{8}{3}+\frac{4}{3}y \\ -\frac{8}{3}+\frac{4}{3}y \leq \frac{6}{4}+\frac{3}{4}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \cdot \frac{7}{12} \geq -\frac{6}{4}-\frac{8}{3} \\ y \cdot \frac{7}{12} \leq \frac{6}{4}+\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \cdot \frac{7}{12} \geq -\frac{50}{12} \\ y \cdot \frac{7}{12} \leq \frac{50}{12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{50}{7} \\ y \leq \frac{50}{7} \end{cases} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 7(2x+y) \geq 7(2 \cdot -\frac{48}{7} - \frac{50}{7}) = -96-50 = -146$$

Равенство достигается при $(x, y) = (-\frac{48}{7}, -\frac{50}{7})$

Заметим, что начальное условие выполнено.

Ответ: -146



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = (m-n+3)mn$$

1. Пусть $A = 13p^2$

Разберем случаи, учитывая, что p - простое

$m-n$	1	13	$13p$	$13p^2$	p	p^2	-1	-13	- $13p$	- $13p^2$	- p	- p^2
$m-n+9$	$13p^2$	p^2	p	1	$13p$	13	- $13p^2$	- p^2	- p	-1	- $13p$	-13
p	$\sqrt{\frac{10}{13}}$	$\sqrt{22}$	$-\frac{3}{4}$	-	$\frac{9}{14}$	2	$\frac{3}{4}$	2	$\frac{3}{4}$	$\sqrt{\frac{10}{13}}$	$-\frac{3}{4}$	$\sqrt{22}$

Подходит только $m-n = p^2 - 4$ и $mn = -13$

Подставим в B:

$$\begin{cases} 13mn = 39p^2 \\ -10mn = 39p^2 \end{cases} \text{ - нет решений, т.к. } m, n \in \mathbb{N}$$

$$7mn = 39p^2 \Rightarrow 39p^2 : 7 \Rightarrow p^2 : 7 \Rightarrow p = 7$$

$$\text{Получаем } \begin{cases} 7mn = 3 \cdot 49 \\ m-n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mn = 21 \\ m-n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n = 4 \\ (m+n)^2 = 16 + 4 \cdot 21 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-n = 4 \\ m+n = 10 \\ m+n = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n = 4 \\ m+n = 10 \\ m-n = 4 \\ m+n = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m, n) = (7, 3) \\ (m, n) = (-3, -7) \end{cases}$$

2. Пусть $A = 3q^2$

Разберем случаи. Будем обозначать q - любое простое

$m-n$	1	3	$3q$	$3q^2$	q	q^2	-1	-3	- $3q$	- $3q^2$	- q
$m-n+9$	$3q^2$	q^2	q	1	$3q$	3	- $3q^2$	- q^2	- q	-1	- $3q$
q	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Ни один случай не удовлетв. усл.

Ответ: (7, 3), (-3, -7)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

Пусть $\angle XAB = \alpha$. Тогда $\angle CAH = \alpha$, т.е. AH - биссектриса $\angle A$

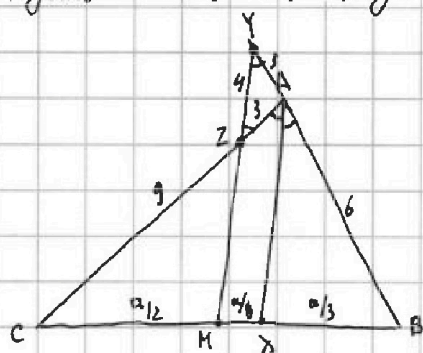
Из параллельности MY и AH получаем, что $\angle YZA = \angle ZAH = \alpha$

$\angle ZAB$ - внешний для $\triangle AZY$.
Значит, $\angle ZYA + \angle YZA = \angle ZAB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ZYA = 2\alpha - \alpha = \alpha$$

Поэтому $\angle AZY = \angle YZA$

Вывод: $\triangle ZAY$ - р/б ($AY = AZ = 3$)



Пусть $BC = a$. AH - медиана $\Rightarrow CH = HB = \frac{1}{2}a$

$MZ \parallel AH \Rightarrow \angle CZM = \angle CAH$, $\angle ACH$ - общий для $\triangle CZM$ и $\triangle CAH$.

Значит, $\triangle CZM \sim \triangle CAH$ по двум углам.

$$\text{Отсюда } \frac{a}{2} = \frac{CZ}{CA} = \frac{CH}{CX} \Rightarrow \frac{9/3}{12} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a + MX} \Rightarrow \frac{3}{2}a + 3MX = 2a$$

$$\Rightarrow 3MX = \frac{a}{2} \Rightarrow MX = \frac{a}{6}$$

$$\frac{a}{2} = MB = MX + XB = \frac{a}{6} + XB \Rightarrow XB = \frac{a}{2} - \frac{a}{6} = \frac{a}{3}$$

$$\text{По свойству биссектрисы, } \frac{AB}{AC} = \frac{XB}{XC} \Rightarrow \frac{AB}{12} = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{2} + \frac{a}{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{12} = \frac{a/3}{2a/3} \Rightarrow AB = 6$$

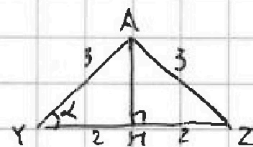
Рассмотрим р/б $\triangle AYZ$:

Высота AM этого равнобедренного треугольника является медианой. Значит, $MY = \frac{AY}{2} = 2$

$$\cos \alpha = \frac{MY}{AY} = \frac{2}{3}$$

По теореме косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle CAB \Rightarrow$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 2\alpha \Rightarrow BC^2 = 144 + 36 - 144 \cos 2\alpha \quad (1)$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1. \text{ Подставим значение } \cos \alpha = \frac{2}{3}:$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{8}{9} - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$$

$$\text{Подставим в (1): } BC^2 = 180 + 144 \cdot \frac{1}{9} = 180 + 16 = 196$$

$$\Rightarrow BC = 14$$

Ответ: 14



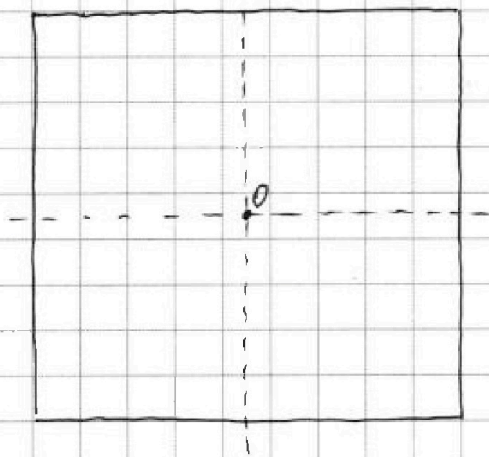
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6



Заметим, что всего в черных
цвет покрашено 100 точек

~~Назовем средним квадратом~~

Все симметричные, параллельные
сторонам квадрата делит его
на 4 ~~квадрата~~ части.

Назовем эти части четвертями.

Заметим, что на границе ~~четвертей~~ ~~затем~~ нет точек.

Если белые точки лежат в одной четверти, то есть еще 3
~~одинаковые~~ раскраски, получаемые из этой ~~перестановки~~ ~~перестановкой~~.

Есть C_{25}^2 способов выбрать 2 белые точки в четверти. Это

Если белые точки лежат в соседних по стороне четвертях,
то таких раскрасок $25 \cdot 25$

Если белые точки лежат в ~~диагонально~~ ~~противоположных~~ ~~четвертях~~, то есть всего есть $25 \cdot 25$ точек раскрасок

$$\text{Итого получим } \frac{25 \cdot 24}{2} + 2 \cdot 25^2 = 25 \cdot 12 + 25 \cdot 50 + 25 \cdot 62 =$$

$$= ~~1625~~ 1550 \text{ раскрасок}$$

Ответ: ~~1625~~ 1550



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☒3
☒4
☒5
☒6
☒7
☒СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \begin{cases} m \cdot n = -1 \\ m \cdot n + 9 = -13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot n = 1 \\ p^2 = -\frac{8}{13} \end{cases} - \text{ни урл. уел.}$$

$$\begin{cases} m \cdot n = -13 \\ m \cdot n + 9 = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot n = 13 \\ p^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot n = 13 \\ p = 2 \end{cases} - \text{подходит}$$

$$\begin{cases} m \cdot n = -13p \\ m \cdot n + 9 = -p \end{cases} \Rightarrow 9 = 12p - \text{ни урл. уел.}$$

$$\begin{cases} m \cdot n = -13p^2 \\ m \cdot n + 9 = -1 \end{cases} \Rightarrow 13p^2 = -10 - \text{ни урл. уел.}$$

Рассмотрим случай, когда $p=2, m \cdot n = 13$. Тогда $3p^2 - 13 = (13+3)mn$

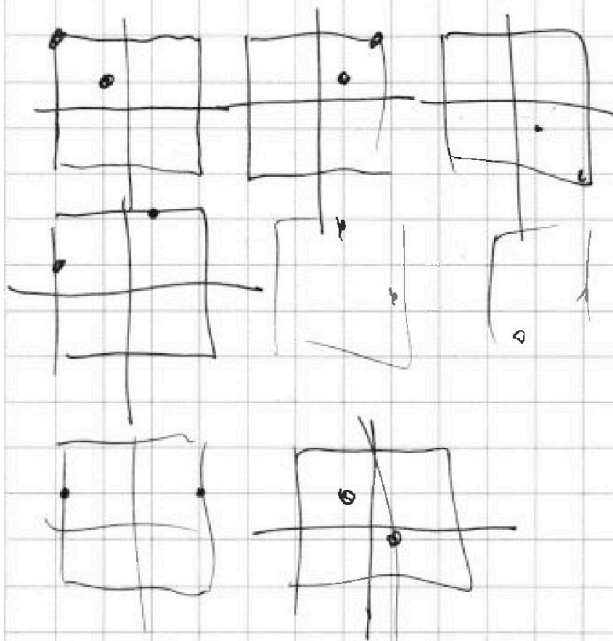
$$\Rightarrow 16mn = 3p^2$$

Отсюда $3p^2 : 16 \Rightarrow p^2 : 16 \Rightarrow p = 4$, но p - простое
то есть 6 p^2 2 входит в степень не больше 2

2. Пусть $A = 3p^2$, p - простое

Разберем случаи:

$m \cdot n$	1	3	$3p^2$	$5p^2$	-1	-3	$-3p^2$	$-5p^2$
$m \cdot n + 9$	$3p^2$	p^2	9	9	$-3p^2$	$-p^2$	-9	-1
p^2	$\sqrt{\frac{10}{3}}$	$\sqrt{12}$	$-\frac{2}{2}$	---	-	-	-	-



$$|4x - 3y| \leq 6$$

$$|3x - 4y| \leq 8$$

$$7(2x + y)$$

$$4x - 3y \leq 6$$

$$3x - 4y \leq 8$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$-6 \leq 4x$$

$$-6 - 4x \leq$$

$$-6 + 3y \leq 4x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☒3
☒4
☒5
☒6
☒7
☒СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$$(*) \begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq -3x+4y \leq 8 \\ -14 \leq 7x-7y \leq 14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -14 \leq x+y \leq 14 \\ -2 \leq x-y \leq 2 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} -16 \leq 2x \leq 16 \\ -14 \leq x+y \leq 14 \\ -2 \leq y-x \leq 2 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} -8 \leq x \leq 8 \\ -16 \leq 2y \leq 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8 \leq x \leq 8 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} -16 \leq 2x \leq 16 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases} \xrightarrow{+} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -24 \leq 2x+y \leq 24 \quad | \cdot 7 \Rightarrow -168 \leq 14x+7y \leq 168$$

То есть $14x+7y \geq -168$. $4x^4-4y^4+x-y \neq 5(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})$

Примем значение -118 достигается при $(x,y) = (-8,-8)$
 ~~$x=0, y=2$~~

Действительно: $14 \cdot (-8) + 7 \cdot (-8) = -112 - 56 = -168$.

Проверим, что (*) верно:

$$\begin{cases} |4 \cdot (-8) - 3 \cdot (-8)| \leq 6 \\ |3 \cdot (-8) - 4 \cdot (-8)| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$|-32 + 24| \leq 6$$

$$4x-3y$$

$$x = -\frac{48}{7}$$

$$\frac{48}{7}$$

$$50$$

$$\frac{625}{250}$$

$$1650$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ 25 \\ \hline 310 \\ 124 \\ \hline 15 \\ 25 \\ \hline 25 \\ 125 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ 25 \\ \hline 25 \\ 62 \\ \hline 50 \\ 150 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$12 \cdot 25 = 3 \cdot 100$$

$$+ 2 \cdot 625 =$$

$$25 \cdot 12 = 25 \cdot 4 \cdot 3 = 500$$

$$2 \cdot 625$$



1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

Дано: $m, n \in \mathbb{N}$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = (m-n+3)mn$$

1. Пусть $A = 13p^2$, где p - простое.

Разберём случаи; учитывая, что p - простое и 13 - простое

$$1) \begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ 10=13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ p^2 = \frac{10}{13} \end{cases} - \text{не удовл. условию}$$

$$2) \begin{cases} m-n=13 \\ m-n+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13 \\ 22=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13 \\ p = \sqrt{22} \end{cases} - \text{не удовл. условию}$$

$$3) \begin{cases} m-n=13p \\ m-n+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p \\ 13p+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p \\ p^2 - 13p - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p \\ p = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 + 36}}{2} \end{cases} - \text{не удовл. усл.}$$

$$4) \begin{cases} m-n=13p^2 \\ m-n+9=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p^2 \\ 13p^2 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p^2 \\ p^2 = -\frac{8}{13} \end{cases} - \text{нет решений.}$$

То есть ни один случай не был реализован.

2. Пусть $A = 3q^2$, q - простое

Разберём случаи:

$$1) \begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=3q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ 10=3q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ q^2 = \frac{10}{3} \end{cases} - \text{не удовл. усл.}$$

$$2) \begin{cases} m-n=3 \\ m-n+9=q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=3 \\ 12=q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=3 \\ q = 2\sqrt{3} \end{cases} - \text{не удовл. усл.}$$

$$3) \begin{cases} m-n=3q \\ m-n+9=q^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$4) \begin{cases} m-n=3q^2 \\ m-n+9=q^2 \end{cases} \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$12x - 9y = 18 \quad 4x - 3y = 6 \quad 3x - 4y = 8$$

$$2x + y = -24$$

$$4x$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy}$$

$$4x + 2y = -48$$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9) = 39^2$$

$$B = m^2n - mn^2 + 31mn = mn(m-n+3) = 13p^2$$

$$(m-n+3)^2 = m^2 - 2mn + n^2 + 6m - 6n + 9 = A - 3m + 3n - 9$$

$$A = (m-n+3)^2 + 3(m-n+3) = (m-n+3)(m-n)$$

$$B = (m-n+3)(mn) = mn(m-n+3)$$

$$-13+9 = -p \quad 9 =$$

$$(m-n+3)^2 = m^2 + n^2 + 9 - 2mn + 6m - 6n = m^2 + n^2 - 2mn + 9m - 9n - 6$$

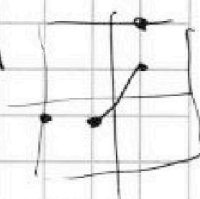
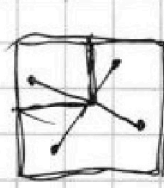
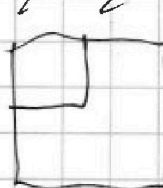
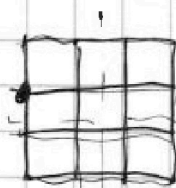
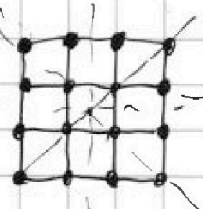
$$-13p^2 + 9 = -3m + 3n + 9 = 23 \quad (m-n+3)^2 = A - 3(m-n+3)$$

$$A = (m-n+3)^2 + 3(m-n+3)$$

$$B = (m-n+3)(mn) = m \cdot n \cdot (m-n+3) = 13p^2$$

$$30+9=39$$

$$m(m+2) = 13p^2$$



У.С. определяется по 1 кв.ту

$$\text{Все: } \frac{C_{1602}}{9} = 9 \text{ обог.} + 28 \text{ с.}$$

$$7 \text{ обог.} - 30 \text{ обог.} + 28 \text{ с.}$$

$$25 \cdot y^2 + 5 - x$$

$$31-120$$

$$-x-6 + 36 - y^2$$

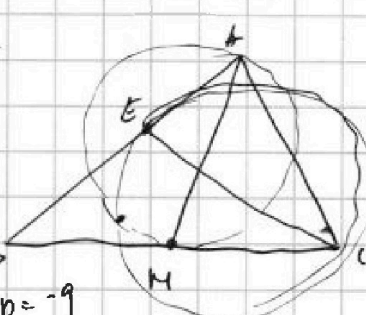
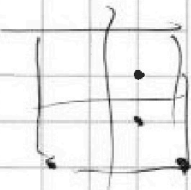
$$x+6+5-y+25 - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} + 10\sqrt{16} - 10\sqrt{5-y} = -120 - 4x - 9y^2$$

$$5x - y + 4y^2 + 89$$

$$(x+6)(5-y) =$$

$$= 30 - xy + 5x - 6y$$

$$30$$



$$m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = m^2 - mn - mn + n^2 + 9m - 9n$$

$$1 \quad 13 \quad p^2$$

$$-p^2 + 9 = 13$$

$$-p+9 = -13p \quad 12p = -9$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy}$$

$$9x^4 + x - 5\sqrt{y} = 9y^4 - 5\sqrt{x} + y$$

$$m \cdot n = -13p$$

$$m-n+9 = -p$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x+y}$$

$$4(x^2-y^2)/(x^2+y^2) + (x-y) + 5/(2\sqrt{x}-2\sqrt{y})$$

$$x+6 + 5-y + 25 - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} + 10\sqrt{x+6} - 10\sqrt{5-y} = 60-2x-2y^2$$

$$3x+2y^2-y-26 =$$

$$x=y$$

$$4x-3y=+6$$

$$7x-7y=-14$$

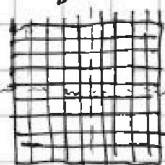
$$3x-4y=-8$$

$$x-y=2$$

$$x+y=2 \quad Bp^2/3g^2$$

$$4x^4 - 4y^4 + x - y + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 0$$

$$-2+9 = -30$$



$$4x - 3y$$



$$32-24$$

$$A: m^2 - 2mn + n^2 + 8m - 9n = (m-n+3)^2$$

$$B: m^2n - mn^2 + 3mn$$

$$m+n \cdot \frac{9}{2}$$

$$mn(m-n+3)$$

$$16+8^4$$

$$x-6 \quad 25-10y+y^2$$

$$mn(m-n+3)$$

$$(m-n+3)^2 = 8(m-n+3)$$

$$7x-7y=-2$$

$$(m-n+3)(m-n+3) = A$$

$$x-y = \frac{2}{7}$$

$$A+81+9m-9n$$

$$mn(m-n+3) = B$$

$$(m-n)^2 - 9(m-n)$$

$$x+y=14$$

$$x = \frac{-12}{5}$$

$$\frac{96}{5} \quad \frac{352}{170}$$

$$(m-n)/mn + 3mn$$

$$4x+6x+72 \leq 6$$

$$-y = 2x+24$$

$$2x+y = -24$$

$$|7x-3y| \leq 8$$

$$|3x-4y| \leq 8$$

$$2x+y = 24$$

$$\begin{matrix} -8 \leq x \leq 8 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{matrix}$$

$$110x+72 \leq 6 \quad 2x+y$$

$$|5x+36| \leq 3$$

$$|3x+8x+69| \leq 6$$

$$|11x+96| \leq 8$$

$$\frac{82}{5} \quad 14 - \frac{2}{7} + \frac{14+2}{2}$$

$$(a+b)^2 - 4ab$$

$$21 - \frac{3}{7}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$(x+y) \cdot 5 + (5-y)^2 - 10y$$

$$5 + 5^2 - y^2$$

$$(x-y)(x+y)/(x^2+y^2) = -5(2\sqrt{x}-2\sqrt{y})$$

$$(a^2-b^2)/(a^4+b^4) = -5(a-b)$$

$$(a-b)/(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8) = -5(a-b)$$

m=1

$$A: m^2 - 2mn + n^2 + 8m - 9n = (m-n+3)^2$$

$$B: m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

p=1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{6}{9} + \frac{8}{3} = \frac{18+32}{9}$$

$$a_5 = 6x + 18$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_{11} = -3x^2$$

a_1, d

$$a_1 + 4d = 6x + 18$$

$$a_1 + 6d = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_1 + 10d = -3x^2$$

$$a_1 + 4d = 6x + 18 = 2x + 6(x+3)$$

$$a_1 + 6d = (x^2 - 4x)^2 = x^2(x-4)^2$$

$$x^7 - 8x^3 + 16x^2$$

$$2d = x^2(x-4)^2 - 6(x+3) = x^2(x^2 - 8x + 16) - 6x - 18 = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18 \quad | :2$$

$$4d = -3x^2 - (x^4 - 8x^3 + 16x^2) = -x^4 + 8x^3 - 15x^2$$

$$2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 = -x^4 + 8x^3 - 15x^2$$

$$3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$1 + 8 + 17 + 4 - 12$$

$$(x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$(x-2)^2(x^2 - 4x - 3) = 0$$

$$(x-2)^2(x^2 - 4x - 3)$$

$$x/4 = 4 + 3$$

$$6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$\frac{65}{25}$$

$$(x^2 - 4x + 4) / (x^2 - 4x - 3) \quad | 625 \quad 2 + \frac{4}{3}x$$

$$x^2 - 4x^3 - 3x^2 - 4x^3 + 16x^2 + 12x + 4x^2 - 16x - 12$$

$$|4x - 3y| \leq 6$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6 \quad | 3$$

$$-8 \leq 3x - 4y \leq 8 \quad | \cdot 4$$

$$-18 + 9y \leq 12x \leq 32 + 16y$$

$$-50 \leq 25y$$

$$-2 \leq y$$

$$\begin{aligned} |4x - 3y| &\leq 6 \\ |3x - 4y| &\leq 8 \end{aligned}$$

$$14x$$

$$2x + y = 24$$

$$\begin{aligned} x &= 8 + 8 \\ 4x &= 72 + 6x \end{aligned}$$

1	-6	5	6
-2	1	-8	
3	1	-3	
-3	1	-9	
6	1	0	5
-6	1	-12	

1	-8	17	-4	-12	
-1	1	-9	21	-30	
2	1	-6	5	6	0

1	-6	5	6	
2	1	-4	-3	0

$$15,8 + y = 24$$

$$\begin{aligned} 14x - 3y &\leq 6 \\ 13x - 4y &\leq 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12x^2 + 12x &\leq -16x + 4 \\ -25x &\leq -5x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 24 \\ 6x + 3y &= 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6 \leq 4x - 56 &\leq 6 \\ -8 \leq 10x + 72 &\leq 8 \end{aligned}$$

$$-14 \leq x - 24 \leq 14$$

$$10 \leq x \leq 38$$

$$y = 24 - 2x$$

$$\begin{aligned} 32 - 24 & \quad 24 - 32 \\ |10x - 72| & \leq 6 \end{aligned}$$

$$3x - 56 + 8x$$

