



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть арифметическая прогрессия выглядит так: $a; a+b; a+2b...$

1-ый член 2-ой 3-ий

Плюсда:

$$\begin{cases} a+2b = 3x+3 & (1) \\ a+4b = (x^2+2x)^2 & (2) \\ a+8b = 3x^2 & (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1)+(3)}{2} - 6\text{-ой член арифм. прогр. } a+5b = \frac{3x^2+3x+3}{2}$$

$$b = (a+5b) - (a+4b) = 1,5x^2 + 1,5x + 1,5 - (x^2+2x)^2$$

$$a + 2(1,5x^2 + 1,5x + 1,5 - (x^2+2x)^2) = 3x+3$$

$$a = 3x+3 - 3x^2 - 3x - 3 + 2(x^2+2x)^2 = -3x^2 + 2(x^2+2x)^2$$

$$a+4b = (x^2+2x)^2$$

$$-3x^2 + 2(x^2+2x)^2 + 4(1,5x^2 + 1,5x + 1,5 - (x^2+2x)^2) = (x^2+2x)^2$$

$$3(x^2+2x)^2 = 3x^2 + 6x + 6$$

$$(x^2+2x)^2 = x^2 + 2x + 2$$

Пусть $x^2 + 2x = t$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = -1$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2}$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x_3 = -1$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{3}; x_2 = -1 - \sqrt{3}$$

Ответ: $-1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}$ или -1 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$8x+4y = a(x-3y) + b(3x-y)$$

$$\begin{cases} a+3b=8 \\ -3a-b=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3b=8 \\ -9a-3b=12 \end{cases}$$

$$-8a=20$$

$$-2a=5$$

$$a=-2,5$$

$$b = -3a-4 = 7,5-4=3,5$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3y-x| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq 3y-x \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \quad | \cdot 2,5$$

$$\begin{cases} -7,5 \leq 7,5y-2,5x \leq 7,5 \\ -3,5 \leq 10,5x-3,5y \leq 3,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7,5 \leq 7,5y-2,5x \leq 7,5 \\ -3,5 \leq 10,5x-3,5y \leq 3,5 \end{cases}$$

Можно

Сложно

$$-11 \leq 8x+4y \leq 11$$

значит, $(8x+4y)_{\max} = 11$

Пример: $\begin{cases} 3y-x=3 \\ 3x-y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 9y-3x=9 \\ 3x-y=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 8y=10 \\ y=\frac{10}{8}=\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$x = 3y-3 = \frac{15-12}{4} = \frac{3}{4}$$

$$8 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{5}{4} = 6+5=11$$

ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Рассмотрим случаи:

$$1) A = 13p^2; B = 75q^2$$

Тогда $A = 13 \cdot p \cdot p$; 13 - простое

$$A = (m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

$$1) m+n = 13 \quad m+n-9 = p^2$$

$$p^2 = 4$$

$$p = 2$$

$$B = mn(m+n-3) = mn \cdot 10 = 75q^2$$

$$2mn = 15q^2$$

$$2) m(13-m) = 15q^2$$

q - четное, простое $\Rightarrow q = 2$

$$30 = m(13-m)$$

$$m^2 - 13m + 30 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{2} = \frac{13 \pm 7}{2}$$

$$m_1 = 10$$

$$m_2 = 3$$

$$n_1 = 3$$

$$n_2 = 10$$

Первая пара - (3; 10) или (10; 3)

$$2) m+n = 13p \quad m+n-9 = p$$

$$m+n = 13(m+n-9)$$

$$13 \cdot 9 = 12(m+n)$$

$$13 \cdot 3 = 4(m+n)$$

$$m+n = \frac{13 \cdot 3}{4}$$

(или 0,5) - целое $\Rightarrow$ отсюда (m, n) - целые $\Rightarrow$ они не натуральные $\Rightarrow$ не подходят

$$3) m+n = p \quad m+n-9 = 13p$$

$$m+n-9 > m+n \quad \text{т.к. } p \neq 0$$

(аналогично не подходит $m+n=1; m+n-9=13p^2$)

не подх., т.к. $m > 0; n > 0$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4) m+n = 13p^2$$

$$10 = 13p^2$$

p - целое $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ противоречие

$$5) m+n = p^2$$

$$22 = p^2$$

p - целое $\Rightarrow$ противоречие

$$5) A = 13p^2 \quad 13 = 13p^2$$

$$mn(m+n-3) = 13p^2$$

~~1) $m+n-3=1$ - не может быть, так как $m, n \geq 1$~~

~~($m+n-3=1$)~~

$$1) m+n-3 = 13p^2$$

$$1) m+n-3 = 13$$

$$\begin{cases} m+n=16 \\ mn=p^2 \end{cases}$$

$$mn = p^2 \text{ - протм.}$$

$$2) m+n-3 = p$$

$$mn = 13p$$

$$2.1) m=13 \quad n=p$$

$$13+p-3=p$$

$$13=3$$

противоречие

$$3) \begin{cases} m+n-3=1 \\ mn=13p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+n=4 \\ mn=13p^2 \end{cases}$$

$$3.1) m=1 \quad n=3$$

$$13p^2 = 1 \cdot 3$$

$$p^2 = \frac{3}{13}$$

противоречие

$$3.2) m=2 \quad n=2$$

$$13p^2 = 4$$

$$p^2 = \frac{4}{13}$$

$m+n$	13	p	p
$\sqrt{1}$	0	0	0
$\sqrt{p}$	0	0	1
$\sqrt{p^2}$	0	1	1
$\sqrt{13}$	1	0	0
$\sqrt{13p}$	1	0	1
$\sqrt{13p^2}$	1	1	0
$\sqrt{13p^2}$	1	1	1

m	13
n	p
$m+n-3$	p

$m+n$	p^2
1+15	15
2+14	28
3+13	25
4+12	3
5+11	4
6+10	5
7+9	2
8+8	3

не квадрат
простого числа

$$2.2) m=13p \quad n=1$$

$$13p-2=p$$

$$12p=2$$

$$6p=1$$

$$p = \frac{1}{6} \text{ - не простое}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} m+n-3=13p \\ mn=p \end{cases}$$

$$m=1 \text{ или } n=1.$$

(4n-й элемент тригоном. отн. m и n)
Пусть $m=1$

$$\begin{cases} n-2=13p \\ n=p \end{cases}$$

$$p-2=13p$$

$$12p=2$$

$$p=\frac{1}{6}$$

противоречие

$$\begin{cases} m+n-3=13p^2 \\ mn=1 \end{cases}$$

$$m=1 \quad n=1$$

$$-1=13p^2$$

противоречие.

Или все случаи разобраны.

Ответ: (3; 10) и (10; 3)

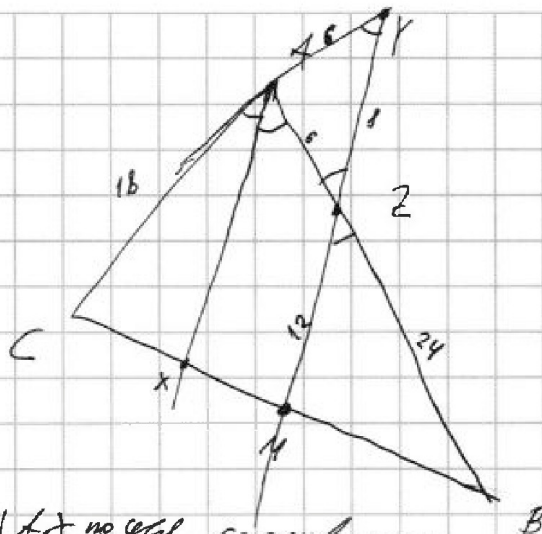
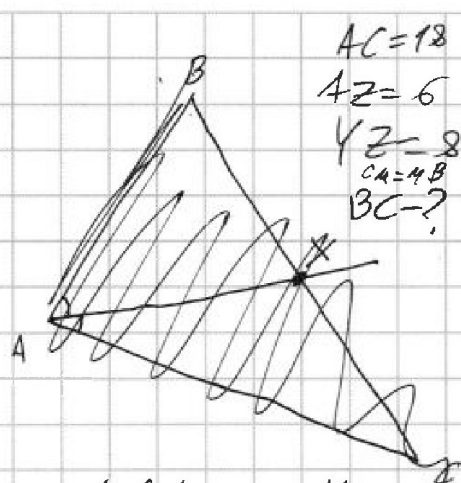


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle A C X = \angle C Y M$, т.к. $Y M \parallel A X$ по усл., соотв. углы
По т. Микелая для $\triangle ABC$ и прямой $Y M$:

$$\frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} \cdot \left(\frac{BM}{MC}\right) = 1$$

для $\triangle C Y M$ и прямой $A B$:

$$\frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \left(\frac{MB}{BC}\right) = 1$$

$$\begin{cases} \frac{18+AY}{AY} \cdot \frac{6}{ZB} = 1 \\ \frac{18}{AY} \cdot \frac{8}{ZM} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \triangle B Z M \sim \triangle B A X \text{ (CB - общ.; } \angle B A X = \angle B Z M \text{)} \\ \text{т.к. } Z M \parallel A X, \text{ соотв. углы} \\ \frac{ZM}{AX} = \frac{BZ}{AB} = \frac{BM}{BX} \end{cases}$$

$\angle M Z B = \angle A Z Y$ - верт. $\Rightarrow \triangle A Y Z \sim \triangle B Z M$ ($\angle A Y Z = \angle A Z Y$)

$$\Rightarrow AY = AZ = 6$$

$$\begin{cases} \frac{18+6}{6} \cdot \frac{6}{ZB} = 1 \\ \frac{18}{6} \cdot \frac{8}{ZM} = 2 \end{cases}$$

$$ZB = 24$$

$$ZM = \frac{18 \cdot 8}{12} = \frac{6 \cdot 8}{4} = 12$$

Ищем $\angle A Y Z = \angle$ По т. синусов для $\triangle A Y Z$:

$$\frac{6}{\sin \angle} = \frac{8}{\sin(\pi - 2\angle)}$$

$$\frac{6}{\sin \angle} = \frac{4}{\sin \angle \cos \angle}$$

$$6 \cos \angle = 4$$

$$\cos \angle = \frac{2}{3}$$

По т. косинусов для $\triangle Z M B$:

$$BM = \sqrt{24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2} = 12\sqrt{15-8} = 12\sqrt{7}$$

Ответ: $12\sqrt{\frac{7}{3}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$~~

~~$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 \geq 0$$~~

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{x} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$(4(6+5x-x^2)) = x+1$ $f(a) = a^4 + 5a^2 + \sqrt{a}$ - строго
 возрастающая функция на
 области определения $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ если $f(a) = f(b)$, то $a = b$
 $f(x) = f(y)$

$$x = y$$

Подставим $y = x$ в первое ур-ие

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

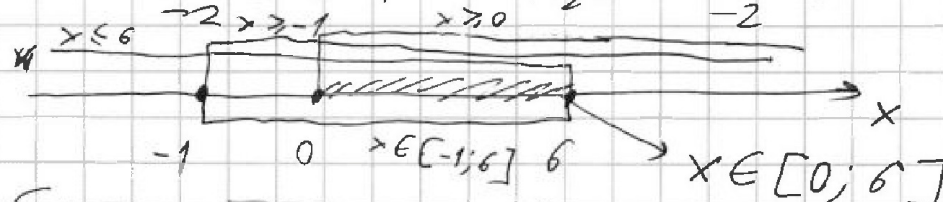
$$6+5x-x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-5+7}{-2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-5-7}{-2} = 6$$



$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$x \in [0, 6]$$

$$-x^2 + 5x + 6 = -(x+1)(x-6) = (6-x)(x+1)$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)}$$

~~$$2\sqrt{(6-x)(x+1)} = x+1 - 2\sqrt{(x+1)(x-6)} + x-6$$~~

$$\begin{cases} a-b+5=2ab \\ a^2+b^2=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{x+1} \\ a \in [1, \sqrt{7}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \sqrt{6-x} \\ b \in [0, \sqrt{6}] \end{cases}$$

$$a^2+b^2+a-b+5=2ab+7$$

$$a^2 = x+1$$

$$a^2+b^2 = 7$$

$$(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$$

$$b^2 = 6-x$$

$$\text{Пусть } a-b = t$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = 1$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$x+1 - (6-x) - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1$$

$$2x - 5 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1$$

$$\sqrt{(x+1)(6-x)} = x - 3$$

$$(x+1)(6-x) = (x-3)^2$$

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 - 6x + 9$$

$$11x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 24}}{4}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$1+5 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)}$$

$$9 = (6-x)(x+1)$$

$$x^2 + 5x + 6 - 9 = 0$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$1) \sqrt{13} < 4$$

$$1) \frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 4,5$$

$$2) \sqrt{13} < 5$$

$$0 < \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

оба корня подходят

$$\text{Ответ: } \frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, 2,5 + \sqrt{10}$$

$$t_2 = -2$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2$$

$$x+1 - (6-x) - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4$$

$$2x - 5 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4$$

$$\sqrt{(x+1)(6-x)} = x - 4,5$$

$$(x+1)(6-x) = (x-4,5)^2$$

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 - 9x + 20,25$$

$$14x - 14,25 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{14,25 \pm \sqrt{205,0625}}{14}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2$$

$$3 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)}$$

$$9 = 4(6-x)(x+1)$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 + 16 \cdot 15}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm 8\sqrt{10}}{8}$$

$$x_{1,2} = 2,5 \pm \sqrt{10}$$

$$1) \sqrt{10} > 3$$

$$2,5 + \sqrt{10} < 0$$

$$\text{не подходит}$$

$$2) \sqrt{10} < 3,5$$

$$2,5 + \sqrt{10} < 6$$

подходит

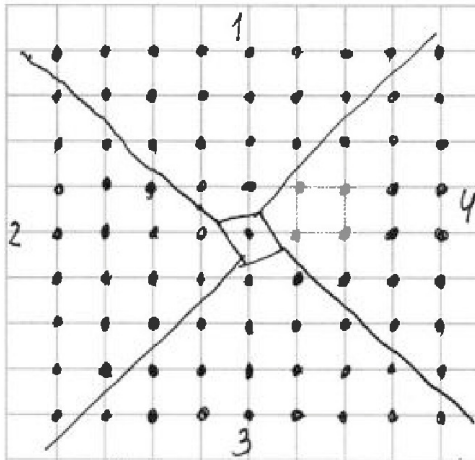
$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 48 \\ \times 15 \\ \hline 240 \\ \hline 16 \\ \hline 240 \\ \hline 1 \\ \times 640 \\ \hline 35 \\ \times 35 \\ \hline 1225 \end{array}$$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Разобьём квадрат на 4 симметричные группы (отн. центра) и центральный узел, не входящий ни в одну из групп (всего 20 узлов)

Тогда у нас будет несколько вариантов раскраски, рассмотрим их.

1) Центральный узел - белый. Тогда есть белый узел в группе N1 и способов окраски 20.

(если не в 1-ой группе, то можем повернуть, чтобы оказался в 1-ой) узел

2) Центральный узел - черный

2.1) Белые узлы в одной группе 20 · 19 способов

2.2) в разных группах

2.2.1) в разных соседних (1 и 2) 20 · 20

2.2.2) в разных противоположных (1 и 3) 20 · 20

Тогда получаем $20^2 + 20^2 + 20 \cdot 19 + 20 = 3 \cdot 20^2 - 1200$

Ответ: 1200.

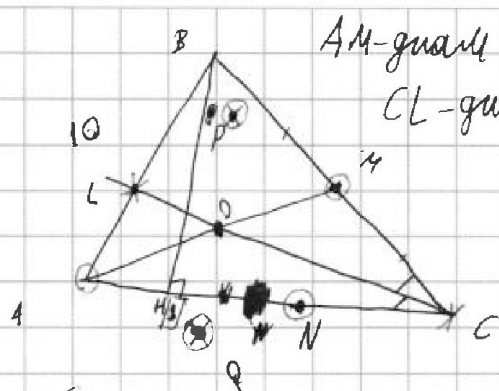
Пояснение: каждая группа получается поворотом из другой, при этом при повороте белых в одной группе не переходят одна в другую. Рассмотрим ситуацию, когда 1 узел в 1-ой группе мы рассмотрим все ситуации, т.е. при повороте в 1-ой группе окажется белый узел



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AM-диагн на Σ лежат: A, M, P, Q, N

CL-диагн на Σ лежат: P, Q, L

$$AB = 10$$

$$AN = 8$$

$$PQ \parallel BH$$

$$(PQ \perp AC)$$

$$\begin{matrix} AC = ? \\ BC = ? \end{matrix}$$

$$CL\text{-диагметр} \Rightarrow \angle LQC = \angle LPC = 90^\circ$$

$$AM\text{-диагметр} \Rightarrow \angle APM = \angle ANM = \angle AQM = 90^\circ$$

$$PQ \parallel BH; BH \perp AC \Rightarrow PQ \perp AC$$

$$CL\text{-бис.} \Rightarrow \frac{AL}{LB} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle ANM = 90^\circ \Rightarrow NM \perp AC; NM \parallel PQ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MPNQ\text{-впис. трапеция} \Rightarrow \text{она равнобедренная}$$

$$\Rightarrow PM = NQ$$

$$\text{в } \triangle CBH: BH \parallel NM; KH\text{-сер. } BC \Rightarrow KH\text{-ср. лин.}$$

$$\Rightarrow HN = KC = \frac{HC}{2}$$

$$HC = AC - AH$$

Запишем т. Пифагора:

$$\triangle ABH: AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$\triangle BHC: BC^2 = BH^2 + HC^2$$

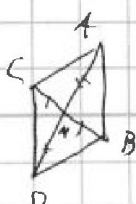
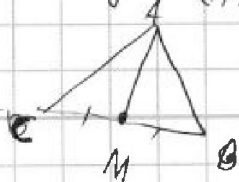
$$\triangle AMN: AM^2 = AN^2 + NM^2$$

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = BC^2 - HC^2$$

$$AB^2 - AH^2 = BC^2 - (AC - AH)^2$$

неизвестные: AH, AC, BC, AN

Найдём AH.



$$\frac{AH + (AC - AH)}{2} = \frac{AC + AH}{2}$$

(иметь $\angle CAB = \angle$)

по т. косинусов

для $\triangle ABC$ и

для $\triangle ACD$:

$$\angle CDB = \angle$$

$$\angle ACD = \pi - \angle$$

$$\angle ABD = \pi - \angle$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{aligned} &BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \alpha \\ &(2AM)^2 = AC^2 + AB^2 + 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \alpha \end{aligned} \right\} +$$

$$4AM^2 + BC^2 = 2(AC^2 + AB^2)$$

$$4AM^2 = \frac{2(AC^2 + AB^2) - BC^2}{4}$$

$$AM^2 = \frac{2(AC^2 + AB^2) - BC^2}{4}$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$BC^2 = BH^2 + (AC - AH)^2$$

$$4AM^2 = \left(\frac{AC + AH}{2} \right)^2 + \left(\frac{BH}{2} \right)^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} &2(AC^2 + AB^2) - BC^2 = (AC + AH)^2 + BH^2 \\ &AB^2 = AH^2 + BH^2 \\ &BC^2 = BH^2 + (AC - AH)^2 \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} &AH = AC - 2NC \\ &NC = \frac{AC - AH}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AH &= AN + \frac{AC - AH}{2} \\ 1,5AH &= AN + \frac{AC}{2} \end{aligned}$$

$$2AC^2 + AB^2 - BC^2 = (AC + AH)^2 + BH^2$$

$$AH = \frac{2}{3}AN + \frac{AC}{3}$$

$$AB^2 = \left(\frac{2}{3}AN + \frac{AC}{3} \right)^2 + BH^2$$

$$BC^2 = BH^2 + \left(AC - \frac{2}{3}AN - \frac{AC}{3} \right)^2$$

$$2(AC^2 + AB^2) - BC^2 = \left(AC + \frac{2}{3}AN + \frac{AC}{3} \right)^2 + BH^2$$

подставим AB и AN

$$100 = \left(\frac{16}{3} + \frac{AC}{3} \right)^2 + BH^2$$

$$BC^2 = \left(\frac{2}{3}AC - \frac{16}{3} \right)^2 + BH^2$$

$$2AC^2 + 200 - BC^2 = \left(\frac{4}{3}AC + \frac{16}{3} \right)^2 + BH^2$$

$$BH^2 = 100 - \left(\frac{16}{3} + \frac{AC}{3} \right)^2 = BC^2 - \left(\frac{2}{3}AC - \frac{16}{3} \right)^2 = 2AC^2 + 200 - BC^2 - \left(\frac{4}{3}AC + \frac{16}{3} \right)^2$$

неизвестные:
AM, AC, AH, BH, BC
AB, AN

$$AC = AN + NC$$

$$\begin{aligned} AH &= AC - 2NC \\ NC &= \frac{AC - AH}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AH &= AN + \frac{AC - AH}{2} \\ 1,5AH &= AN + \frac{AC}{2} \end{aligned}$$

$$AH = \frac{2}{3}AN + \frac{AC}{3}$$

BH, AC, BC?



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$100 - \left(\frac{16}{3} + \frac{AC}{3}\right)^2 = BC^2 - \left(\frac{2}{3} AC - \frac{16}{3}\right)^2 = 2AC^2 + 200 - BC^2 - \left(\frac{4}{3} AC + \frac{16}{3}\right)^2$$

$$900 - (16 + AC)^2 = 9BC^2 - (2AC - 16)^2$$

$$9BC^2 - (2AC - 16)^2 = 18AC^2 - 1200 - 9BC^2 - (4AC + 16)^2$$

$$900 - 256 - 32AC - AC^2 = 9BC^2 - 4AC^2 + 64AC - 256$$

$$9BC^2 - 4AC^2 + 64AC - 256 = 2AC^2 - 1800 - 9BC^2 - 128AC - 256$$

$$34AC^2 - 96AC + 900 - 9BC^2 = 0$$

$$-6AC^2 + 296AC + 1200 + 18BC^2 = 0$$

$$AC^2 - 32AC + 300 - 3BC^2 = 0$$

$$(AC - 16)^2 = 3BC^2 - 44$$

$$(AC - 16)^2 = 3(BC^2 - 44)$$

$$AC = \sqrt{3BC^2 - 44} + 16$$

$$16^2 = 256$$
$$44$$
$$300 - 256 = 44$$

По т. Синуса для $\triangle ABC$ и прямой CL :

$$\frac{MO}{OA} \cdot \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BC}{AC} = 1$$

$$\frac{AC}{BC}$$

$$\frac{MO}{OA} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$$

По т. Синуса в $\triangle MCL$:

$$\frac{MO}{OA} = \frac{MC}{AC} = \frac{BC}{2AC}$$

$$\frac{BC}{2AC} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AC = \sqrt{3BC^2 - 447 + 16}$$

Окружность ω :

$$AP^2 + PC^2 = LC^2$$

$$LC^2 = LQ^2 + QC^2$$

если $BC = 4$

$$AC = \sqrt{47 + 16} = 18$$

$$BC = 6$$

$$AC = \sqrt{647 + 16} = 24$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

