



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
7 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1с7.

$x^2 + 2 \cdot 3tx + (4t^2 - 4) = 0$. Числ. было 2 корня,
 $4t^2 - 4 > 0$, т.е.
 $D > 0$; корни переув. 0, по т. Виета $4t > 4$, т.е.

$t > 1$.

$D = 12t^2 - 16t^2 + 16 > 0$; $4 > t^2$.

Ответ: $t \in (-\frac{2}{\sqrt{3}}, 1) \cup (1, \frac{2}{\sqrt{3}}]$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐

1

☒

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1/02

$$(a^2 - 2ab + b^2) + 75a - 75b = (a-b)^2 + 75(a-b) = (a-b)(a-b+75).$$

Поскольку $a-b \leq 38$, $(a-b)(a-b+75) \leq 38 \cdot 53 < 57 \cdot 87 = 77 \cdot 3^5$. Значит $p=2$, а $77p^5 = 77 \cdot 2^5$. Поскольку

$a+b$ чётно, то и $(a-b)$ чётно, а $(a-b+75)$ — нечётно.

$|a-b+75| =$ либо 7, либо 77, но в первом случае

$$|a-b| = 77 \cdot 2^5, \text{ что } > 38.$$

Значит, $|a-b| = 32$, $|a-b+75| = 77$. Если

$a-b > 0$, то $|a-b+75| > |a-b|$. Значит $a-b = -32$.

Поскольку $a+b=40$, то $a=4$, $b=36$. Ответ: $a=4$; $b=36$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

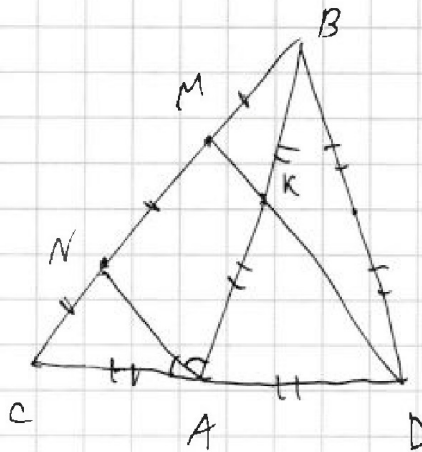
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.



Пусть $(MD \cap AB) = K$.

Тогда $BK = AK$, т.к. MK - средняя линия $\triangle ABK$. Аналогично,

$AC = AD$, т.к. AN - ср. линия

в $\triangle MCD$. Поскольку $AB = CD$,

то и $AC = AD = KA = KB$.

Поскольку $\frac{AC}{AB} = \frac{NC}{NB} = \frac{1}{2}$, то AN - биссектриса $\angle CAB$. По условию, $\cos \angle CAB = \frac{1}{4}$. Значит $\cos \angle BAD = \frac{1}{4}$. То есть высота

из точки B на AD падает в середину AD .

Значит $AB = BD$. Теперь, $4AB^2 = 2BC^2 + 2BD^2 - CD^2$

(формула медианы). Пусть $AC = x$. Тогда $16x^2 = 288 + 24x^2 - 4x^2$, $12x^2 = 288$, $x^2 = 24$, $x = 2\sqrt{6}$, а $AB = 2x = 4\sqrt{6}$. Ответ: $4\sqrt{6}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C_8^2 \cdot 6 C_6^3 \cdot 3.$$

Суммарно у трёх вариантов:

$$\cancel{B1} \cancel{B2} \cancel{B3} \quad 3C_8^2 \cdot C_6^3 + 3C_6^3 \cdot 8 \cdot 7 + 3C_6^3 \cdot C_8^2 = 3C_6^3 (8 \cdot 7 + 2C_8^2) \\ = 3C_6^3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot C_6^3 = C_8^3 \cdot C_6^3 \quad \text{Ответ: } C_6^3 \cdot C_8^3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

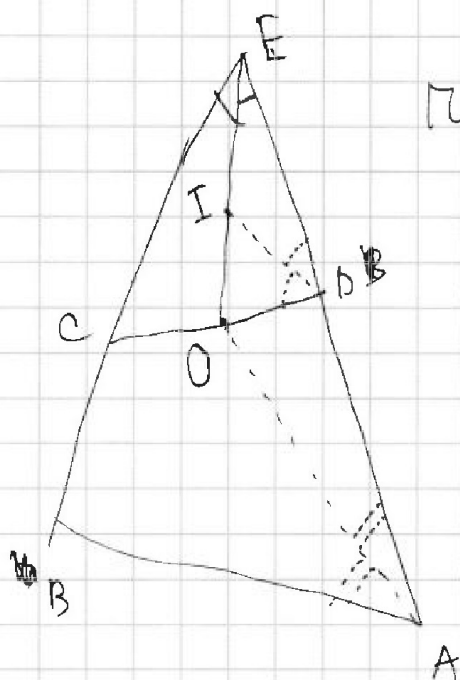
5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№5.

Пусть I - центр впис. окр.

$$\triangle PCE. \text{ Тогда } \frac{EI}{EO} = \frac{PE}{BE}, \text{ так как}$$

т.к. $\triangle PEC \sim \triangle BEA$.

$$\text{В свою очередь, } \frac{EI}{EO} = \frac{DE}{DE+DO}, \text{ т.к.}$$

$$\frac{EI}{EO} = \frac{DE}{DO}. \text{ Тогда если } \frac{DE}{DE+DO} = \frac{DE}{BE} \Rightarrow$$

$$DO+DE=BE=70. \text{ Ответ: } 70.$$



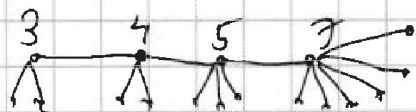
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

Если представить остров в виде графа, где деревни - вершины, дороги - рёбра, то получится дерево (из условия) на $x+4$ вершинах, где x - кол-во деревьев с одной деревней. Поскольку в дереве вершин на одну больше, чем рёбер, то $\frac{19+x}{2} = x+3$, $x=7$. Пример, очевидно, существует:



Ответ: 17.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.

Поскольку $x, y \in \mathbb{Z}$, то и выражения под корнями $\in \mathbb{Z}$. Поскольку корни корней из целого числа 0, есть 2 варианта: когда корни равны (1 и 0) и (0 и 1) соответственно. Пусть а если $\sqrt{t} = 1$, то $t = 1$; если $\sqrt{t} = 0$, то $t = 0$. Значит сами подкоренные выражения равны 1 и 0.

$$\text{I. } \begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 7 & (2) \\ 1 - (x + y - 2) = 0 & (1) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow |x + y - 2| = 7 \Rightarrow x + y = 3 \text{ (a)} \text{ или } x + y = 7 \text{ (b)}$$

$$\text{(a): } x(2-x) + y(2-y) = 7, \quad x + y = 3$$

$$x(2-x) + (3-x)(x-1) = 7 = 2x - x^2 + 3x - 3 - x^2 + x = 7$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 = (x-1)(x-2) \Rightarrow x = 1, 2.$$

$$(x, y): (1, 2), (2, 1)$$

$$\text{b) } x(2-x) + y(2-y) = 7, \quad x + y = 7$$

$$x(2-x) + (7-x)(x+1) = 7 = 2x - x^2 + x + 7 - x^2 - x = 7$$

$$x^2 - 2x = 0 = x(x-2) \Rightarrow x = 0, 2.$$

$$(x, y): (0, 7), (2, 5)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \quad 2x+2y-x^2-y^2=0(1), \quad 7-(x+y-2)=7(2)$$

$$(2) \Rightarrow |x+y-2|=0 \Rightarrow x+y=2.$$

$$\cancel{2x+2y} \quad x(2-x)+y(2-y)=x(2-x)+(2-x)x=2x(2-x)=0$$

$$x=0; 2.$$

$$(x; y): (0; 2), (2; 0)$$

$$\text{Ответ: } (x; y): (2; 0), (0; 2), (2; 7), (7; 2), (0; 7), (7; 0)$$

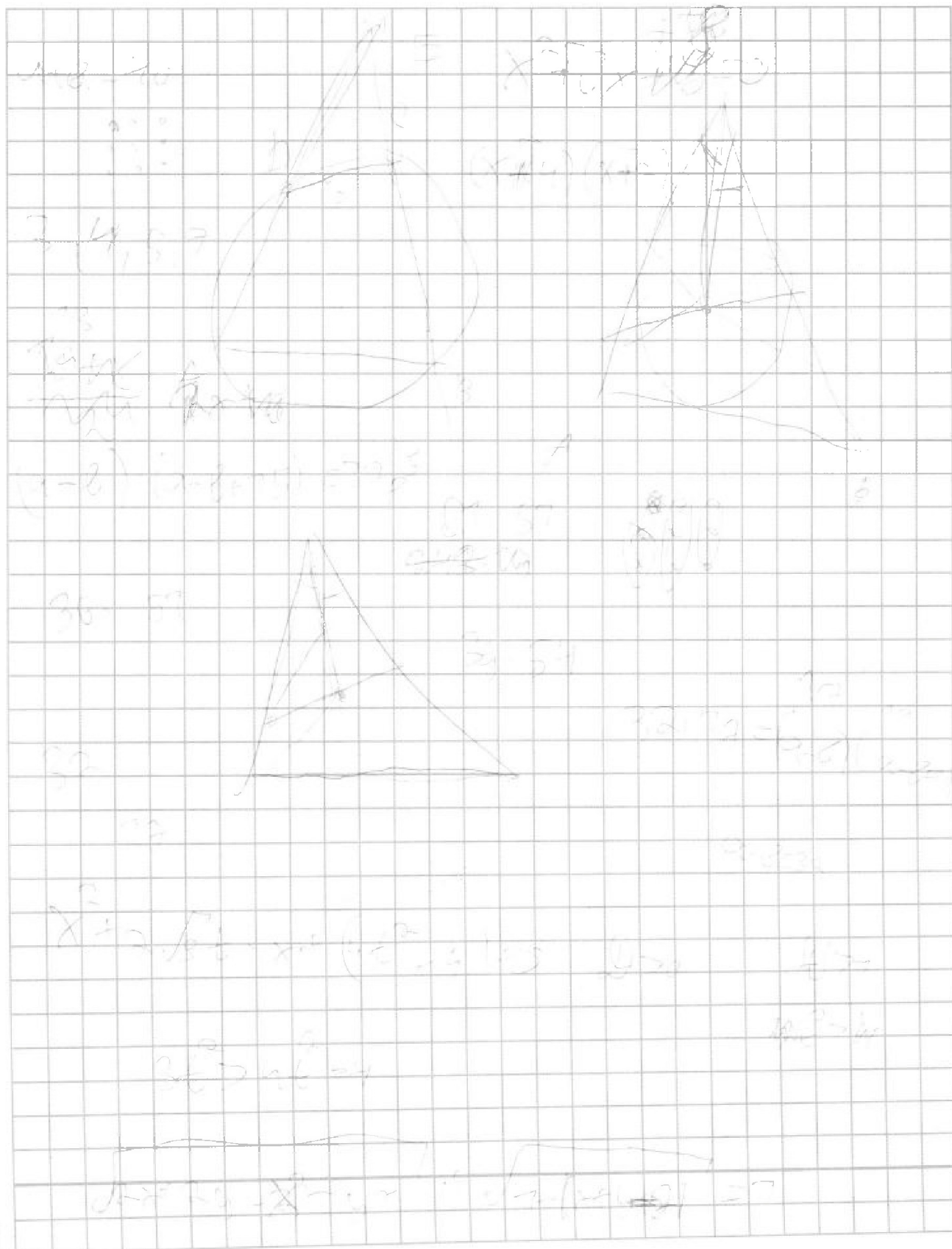


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2 - x + 4} + \sqrt{x^2 - x + 4} = 7$$

$$7x^2 \Rightarrow 7x^2$$

$$\sqrt{x^2 - x + 4} = 7 - \sqrt{x^2 - x + 4}$$

$$7x^2$$

$$|x - y - 2| = 0$$

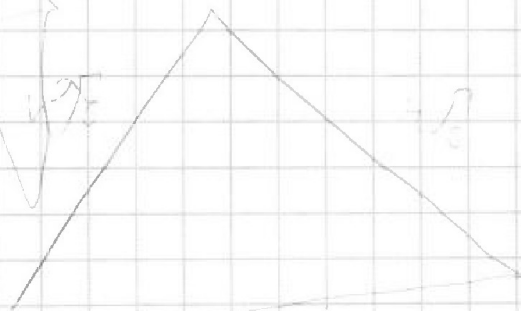
$$x(x-2) + 3x/(x-7) = 7$$

$$x(x-2) = (x-2)(x+2) \Rightarrow x=2$$

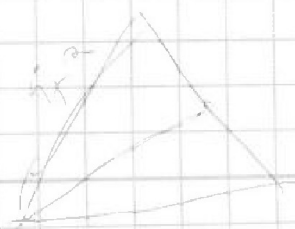
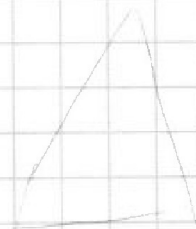
$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$



72



72

$$x^2 - 2x = 10x^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

