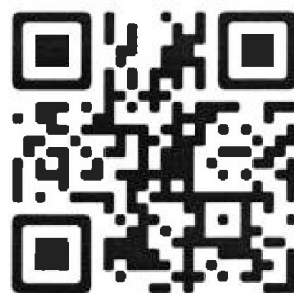




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{t}x + 9t^2 - 9 = 0$$

$$D = (4\sqrt{t})^2 - 4(9t^2 - 9) = 16t - 36t^2 + 36 = -4t^2 + 36 = (6 - 2t)(6 + 2t)$$

Чтобы было 2 различных корня, надо чтобы $D > 0$

$$(6 - 2t)(6 + 2t) > 0 \Leftrightarrow (3 - t)(3 + t) > 0 \Leftrightarrow t \in (-3; 3)$$

Пусть x_1 и x_2 корни, чтобы $x_1 \cdot x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$

$$\textcircled{2} \begin{cases} f(0) > 0 \\ x_1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t^2 - 9 > 0 \\ -4\sqrt{t} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3t - 3)(3t + 3) > 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in (1; +\infty)$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} f(0) > 0 \\ x_1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t^2 - 9 > 0 \\ -4\sqrt{t} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3t - 3)(3t + 3) > 0 \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in (-\infty; -1)$$

$\textcircled{1} t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, берёмая к дискриминанту

$$\begin{cases} t \in (-3; 3) \\ t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

$$\text{Ответ: } t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-b=12 \\ a^2+2ab+b^2+2a+3b=19p^4 \\ a, b \in \mathbb{N} \\ p - \text{простое} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6+n \\ 4a(a+b)+3(a+b)=19p^4 \\ a, b \in \mathbb{N} \\ p - \text{простое} \end{cases} \quad 1) \quad (a+b)^2+2(a+b)=(a+b)(a+b+2)=$$

$$= (2b+n)(2b+n+1)=19p^4$$

$$2b+2n+12=(b+n+6)2 \Rightarrow (b+n) \cdot 2 \div 2 \quad 19 \cdot 2 \text{ простое четное, простое число } 2 \Rightarrow \begin{cases} b+n \in \mathbb{N} \\ a^2+2ab+b^2+2a+3b=19 \cdot 2^2=16 \cdot 19 \end{cases}$$

$$a \quad (2b+12)(2b+15)=16 \cdot 19 \Leftrightarrow 4b^2+54b+18 \cdot 15=16 \cdot 19 \quad | :4 \neq 0$$

$$2b^2+27b+6 \cdot 15-8 \cdot 19=0$$

$$b = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 2 \cdot (6 \cdot 15 - 8 \cdot 19)}}{4} \Leftrightarrow b = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 2 \cdot (35 - 4 \cdot 19)}}{4} \Leftrightarrow b = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 + 4 \cdot 2 \cdot 31}}{4}$$

$$b = \frac{-27 \pm \sqrt{5 \cdot 421}}{4} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{-27+35}{4} \\ b = \frac{-27-35}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = \frac{-62}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 - \text{корень} \Rightarrow a = b + 12 = 14 \\ b = \frac{-31}{2} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} a=14 \\ b=2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Реш:

$$BC=6$$

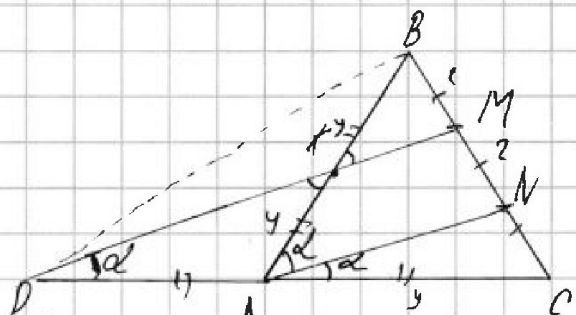
$$\cos(2\angle CMN) = \frac{3}{4}$$

$$BM=MN=NC$$

$$DC=AB$$

$$DM \parallel AN$$

$$AB=?$$



Рассмотрим $\triangle MCD$ $DM \parallel AN \Rightarrow \frac{MN}{NC} = \frac{DA}{AC} = \frac{1}{2}$
 $DA=AC$ (по т. Фалеса)

Рассмотрим $\triangle DCM$ и $\triangle ACN$ $\angle C$ - общий
 $\frac{AC}{DA} = \frac{CN}{DM} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\triangle DCM \sim \triangle ACN$ (по углу и двум проп. стор. парал. к углу) $\Rightarrow \angle D = \angle A = \alpha$

Рассмотрим $\triangle DBC$ BA - медиана $\Rightarrow S_{\triangle DBA} = S_{\triangle BAC} \Rightarrow$

$$S_{\triangle DBA} = \sqrt{p(p-DB)(p-BA)(p-DA)} = \sqrt{p(p-BA)(p-AC)(p-BC)} \quad (p = \frac{p}{2})$$

Рассмотрим $\triangle ABC$ $KM \parallel AN \Rightarrow \frac{BK}{KN} = \frac{DA}{AC}$ (по т. Фалеса)

$$BK=KA=DA=AC=y \Rightarrow \triangle DAK \text{ - } \triangle \Rightarrow \angle D = \angle K = \alpha$$

$\angle DKA = \angle MKB = 2$ (как верш.) $\angle BKN = \angle BAN$ (как corresp. при $KM \parallel AN$ и секущей AB) $\Rightarrow AN \parallel BC$ - с $\triangle BAC$ $\angle A = 2\alpha$

Рассмотрим $\triangle BAC$ $AB^2 + AC^2 - 2 \cos(2\alpha) \cdot AB \cdot AC = BC^2$
 (по т. косинусов)

$$3y^2 + y^2 - 2 \cos(2\angle CMN) \cdot 2y \cdot y = 36 \Rightarrow 3y^2 + \frac{3}{2} \cdot 2y^2 = 36$$

$$3y^2 + 3y^2 = 36 \quad 6y^2 = 36 \quad y^2 = 6 \quad y = \sqrt{6}$$

$$2y^2 = 9 \Rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{2}} = 1.5\sqrt{2} \Rightarrow AB = 2y = 3\sqrt{2}$$

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

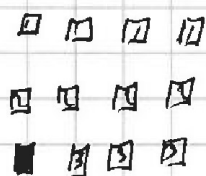
СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть свободная ладья в I ряду, тогда
 4 самых мал. раса. $4!$ сл. на место 1, 4 средних
 расах выходя 4! на место 4, а самые
 высокие 3! на место 3 $\Rightarrow$ всего способов,
 сама ладья не на своем месте, то
 расовек среди не будет, т.к. раса была.

$4 \cdot 4! \cdot 4! / 3!$
 $\wedge$ всего раса.



Пусть свободная ладья не последнем
 ряду, тогда ситуация аналогично I сл
 $4 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 3! \Rightarrow$ всего способов $8 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 3!$

Пусть ладья



в среднем ряду, тогда, выберем того, кто
 сидит на место 4" - 11-способов, дальше
 рассаживаем оставшихся самых мал.

на место 1" - $4!$, средних 3-х место, 2" - 3!
 и самые высокие на 3" - 3! $\Rightarrow$ всего способов в данном сл
 $4 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 11 \cdot 4$

Всего способов $3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 11 \cdot 4 + 4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 8$

Ответ: $3! \cdot 8! \cdot 4! \cdot 11 \cdot 4 + 4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 8$

ХД и КО сф. рф. к АЕ и ВС



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Представим сеть из деревень как граф-связный. Деревни с 1 деревню связки с городами где дорог 5, 6, 7, 9, также образуется граф, где 2 вершины и 1 ребро, получится тот же граф. Пусть города деревни 5, 6, 7, 9 не связаны между собой, тогда они образуют 4 дерева

5	6	7	9

⇒ некоторые города не связаны, поначалу 5, 6, 7, 9 соединены только с 1 ⇒ 5-6-7-9 связки если город не будет связан, то ситуация аналогичная. В условии сказано, что маршруты 1-го соединили города между 5, 6, 7, 9 3-й дорогой, что бы можно было проехать. Из данных деревни в группу, если добавили ещё одну дорогу в деревни между 5, 6, 7 и 9, то получится связность, поначалу верш 4 и ребра 4 у ребра с вершинами ⇒ по методу Дугласа подсчитаем вершины со связью ⇒ дальше 1 маршруты ⇒ все вершины $5+6+7+9-3=24$ - со связью, 1-й ⇒ все деревни $24+4-25$ Ответ: 2425



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 / ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2 \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 2x-2y-x^2-y^2=0 \\ 1-|x-y-1|=4 \end{cases}$$

$$1-|x-y-1|=4$$

$$2x-2y-x^2-y^2 = -(y^2+2y+1) - (x^2-x+1) + 2 = -\underbrace{(y+1)^2}_{\leq 0} + \underbrace{(x-1)^2}_{\leq 0} + 2 \leq 2$$

$$0 \leq 1-|x-y-1| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{1-|x-y-1|} \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} \leq \sqrt{2} \quad \sqrt{0} \leq \sqrt{1} \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} 1-|x-y-1| \in \mathbb{Z} \\ 2x-2y-x^2-y^2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1-|x-y-1|} \in \{\sqrt{0}, \sqrt{1}\} \quad \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} \in \{\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}\}, \text{ так } \sqrt{1-|x-y-1|} + \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = 2$$

$$\sqrt{1} = \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} \Leftrightarrow 2x-2y-x^2-y^2 = 1 \quad (1)$$

$$\sqrt{1} = \sqrt{1-|x-y-1|} \Leftrightarrow 1-|x-y-1| = 1 \quad (2)$$

$$(2') \quad 1-|x-y-1| = 1$$

$$|x-y-1| = 0$$

$$x-y-1=0$$

$$x=y+1$$

$$2(y+1)-2y-(y+1)^2-y^2 = 2y+2-2y-y^2-2y-1-y^2 = -2y^2-2y+1=1 \Leftrightarrow$$

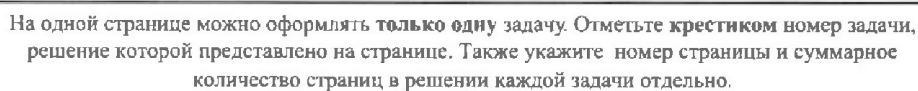
$$2y^2+2y=0$$

$$2y^2+2y=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

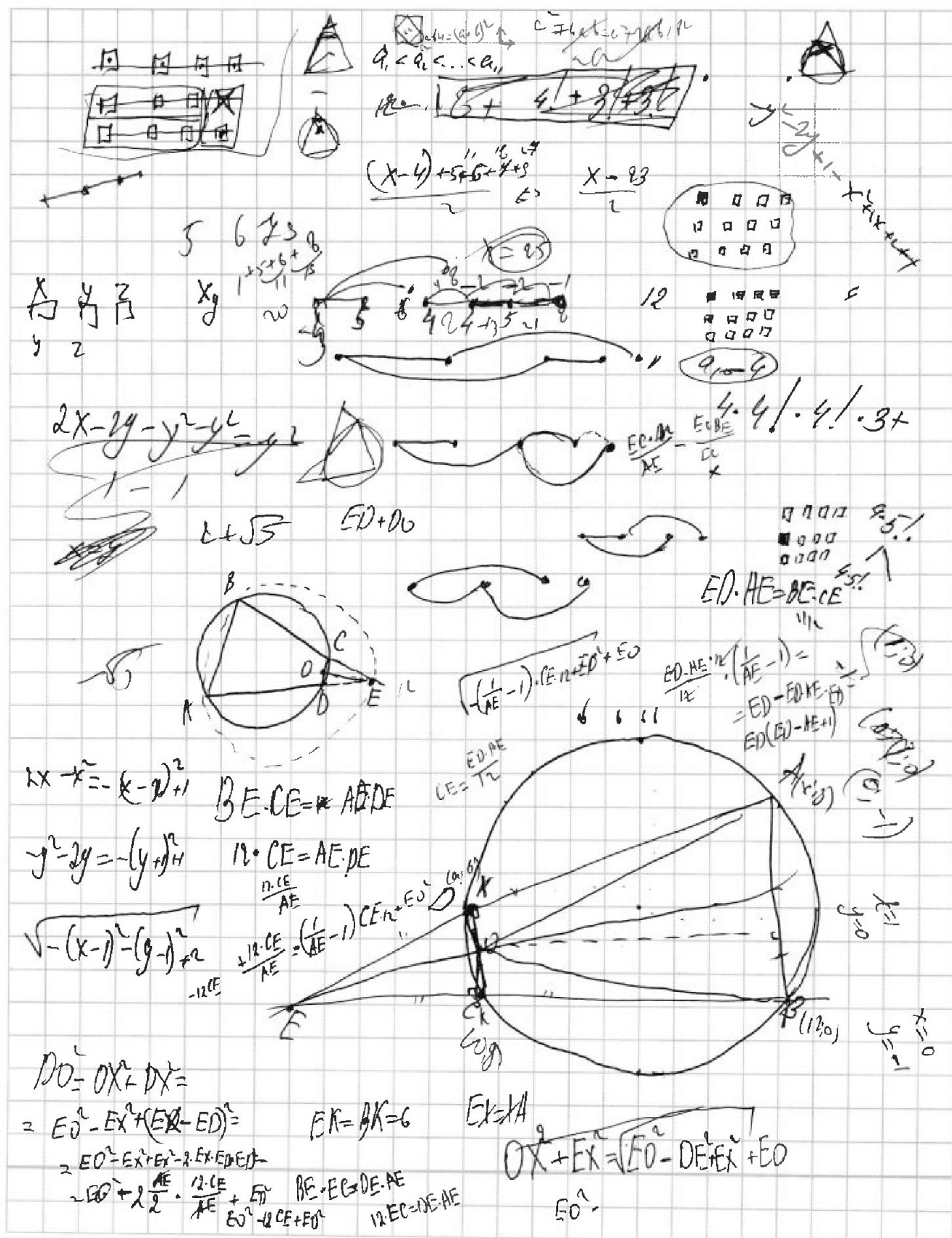
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (1; 0); (0; -1)$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



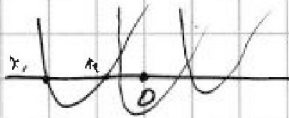


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a^2 + 12ab + 6^2 + 36 + 36 = 199^2$$

$$a = 146$$

$$(a^2 + b^2) + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3) = (26+12)(26+15) = 26 \cdot 41$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 4ab + 3(a+b) = (a-b)^2 + 4ab + 3a + 3b = 144 - 4(6+12)(6) + 3(26+12) =$$

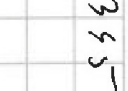
$$46 - 45 = 1.$$

$$2^2 + 4 \cdot 16$$

$$(2521)^2 - 9129 =$$

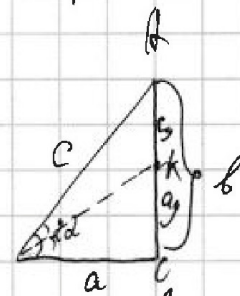
$$\begin{array}{r} 42^2 \\ + 27^2 \\ \hline 169 \\ 54 \\ + 429 \\ \hline 336 \end{array} \quad \begin{array}{r} 21 \\ \times 16 \\ \hline 126 \\ 21 \\ \hline 336 \end{array}$$

$$\cos(\angle CAN) = -\frac{3}{5}$$



$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CD}{AC} = 1$$

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = 1$$



$$cy + ay = b$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{ay+a^2}$$

$$\frac{AK}{KC} = \frac{c}{a} \quad AK + KC = b$$

$$AK + a = KC \cdot c$$

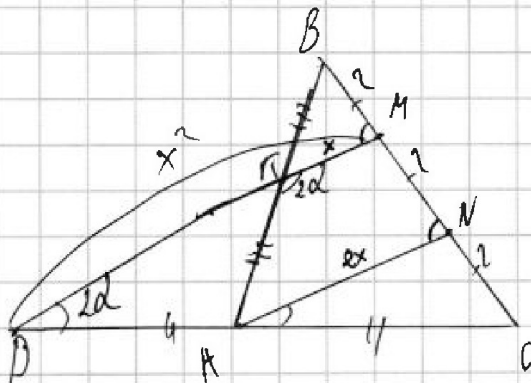
$$AK = \frac{KC \cdot c}{a} = b - KC$$

$$KC \left(\frac{c}{a} + 1\right) = b$$

$$KC = \frac{b}{\left(\frac{c}{a} + 1\right)} = \frac{b \cdot a}{c + a}$$

$$\frac{a}{\frac{b \cdot a}{c + a} + a} = \frac{1}{\frac{b}{c + a} + 1}$$

=



$$4 \cdot MN^2 + DM^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot MM \cdot 2 \cdot DM = 16$$

$$DM^2 + DC^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot DM \cdot AB = 16$$

$$DM^2 + DC^2 + \frac{3}{2} \cdot DM \cdot AD = 16$$

$$DC = \frac{-\frac{3}{2} \cdot DM \pm \sqrt{DM^2 \cdot \frac{9}{4} - 4DM^2}}{2} = -\frac{3}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



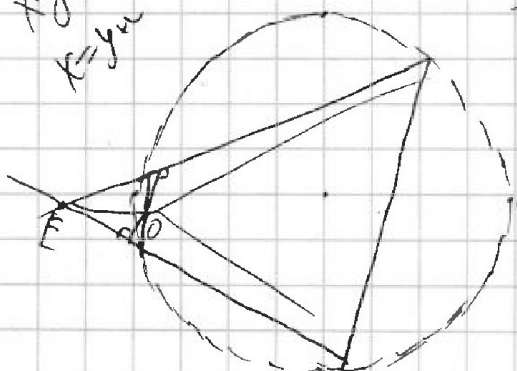
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$BE \cdot CE = FD \cdot DA$
 $DO^2 = OD^2 + DA^2 = EO^2 - EC^2 + LD^2 = EO^2 + (ED - \frac{EA}{2})^2 - \frac{EA^2}{4} =$
 $= EO^2 + ED^2 - EA \cdot ED =$
 $EO = \sqrt{EC \cdot LD}$
 $LD = \sqrt{LD^2 + DO^2}$
 $EO^2 + ED^2 - EA \cdot ED = EO^2 + \frac{12 \cdot CE}{DA} \rightarrow 12 \cdot CE =$
 $BE \cdot CE = DF \cdot EA$
 $DE = \frac{12 \cdot CE}{EA}$
 $= \sqrt{EO^2 + CE \cdot n(DA-1)} = DO$
 $LD = \sqrt{EO^2 + DO^2} = EL =$
 $EO = \sqrt{LD^2 + DO^2}$
 $EL = 6$
 $LD + LD^2$
 $LD^2 = EO^2 - EC^2$

$x - y = 2$
 $x = y + 2$



$x - y = 2$
 $x = y + 2$

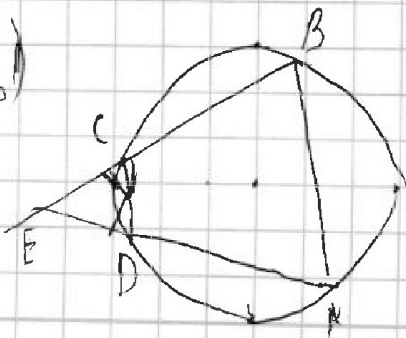
$2y + 4 - y - (y + 2) = y^2$
 $4 = y^2 - y + 2$
 $y^2 - y - 2 = 0$
 $y = 4$
 $y = -1$

$2y + 4 - y$

$2y + 4 - y - y = 4 - y + y = 4$
 $-y = 4$
 $y = -4$

$ED \cdot EA = EC \cdot BE$
 $ED = \frac{12 \cdot EC}{EA} = \frac{12 \cdot EC}{EA}$

$ED = \frac{12 \cdot EC}{EA} = \frac{12 \cdot EC}{EA}$





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

