



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 ^{у квадратного уравнения}
То, что действительных корней 2 и они различны
равносильно тому, что дискриминант > 0

То, что произведение корней больше нуля, если
они существуют, равносильно тому, что свободный
член > 0

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) > 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 > t^2 \\ t^2 > 1 \end{cases}$$

$$\text{если } t \geq 0 \text{ то } \begin{cases} 2 > t \\ t > 1 \end{cases} \quad \text{если } t < 0 \text{ то } \begin{cases} t > -2 \\ t < -1 \end{cases}$$

значит $t \in (2; 1) \cup (-1; -2)$ и любое такое t
подходит т.к. все условия равносильны.

Ответ: $t \in (2; 1) \cup (-1; -2)$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)(a-b+15) = 17 \cdot 2^5$$

$$a+b=40$$

$$a-b = a+b-2b = 40-2b \text{ — чётное число}$$

$$(a-b) : 2 \Rightarrow 17 \cdot 2^5 : 2 \Rightarrow p=2 \text{ т.к. } p \text{ — простое}$$

обозначим разность $a-b$ за x

$$x(x+15) = 17 \cdot 32 \Leftrightarrow x^2 + 15x - 17 \cdot 32 = 0$$

$$(x-17)(x+32)$$

т.к. x — чётно, то $x = -32$

$$\text{получаем систему } \begin{cases} a+b=40 \\ a-b=-32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=36 \end{cases}$$

Действительно $-32 \cdot (-32+15) = 17 \cdot 2^5$, значит

а? Ответ $a=4; b=36$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

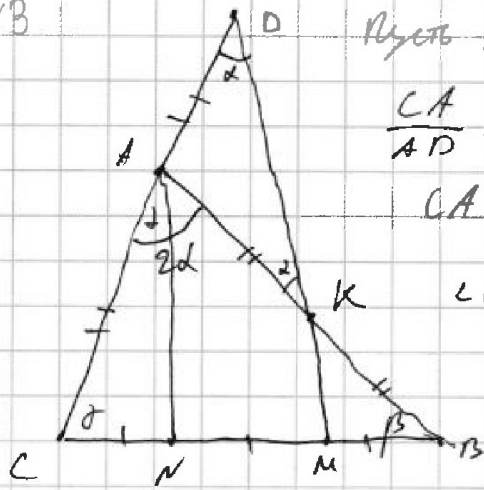
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13



Пусть $\angle CAD = \alpha$ т.к. $AN \parallel MD$ то

$$\frac{CA}{AD} = \frac{CN}{NM} = \frac{1}{1} = \frac{BM}{MN} = \frac{BK}{KA}$$

$$CA = AD = AK = KB = \frac{AB}{2}$$

$$\angle CAN = \angle ADM \text{ (} AN \parallel DM \text{)}$$

$$\angle AKD = \angle KDA \text{ т.к. } AD = AK$$

значит $\angle BAC = 2\alpha$ т.к. внешние
к $\triangle AKD$

$$\text{пусть } \angle CBA = \beta; \angle BCA = \gamma$$

Запишем т. синусов для $\triangle ABC$

$$\frac{12}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma}$$

$$\text{пусть } AB = 2x$$

$$\sin(2\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin(2\alpha) > 0 \text{ т.к. } \alpha < 180^\circ$$

$$\beta = (180 - 2\alpha) - \gamma$$

$$\sin \beta = \cos \gamma \sin(180 - 2\alpha) - \sin \gamma \cos(180 - 2\alpha) = \cos \gamma \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} - \sin \gamma \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{48}{\sqrt{15}} = \frac{x}{\sin \beta} = \frac{2x}{\sin \gamma}$$

$$2x = \frac{48}{\sqrt{15}} \sin \gamma$$

$$x = \frac{48}{\sqrt{15}} \sin \beta = 12 \cos \gamma - \frac{12}{\sqrt{15}} \sin \gamma$$

$$(2x + x) = (24 \cos \gamma - \frac{24}{\sqrt{15}} \sin \gamma) + \frac{24}{\sqrt{15}} \sin \gamma = 24 \cos \gamma$$

$$\text{т.к. } \cos 2\alpha < 0 \Leftrightarrow 2\alpha > 90^\circ \Rightarrow \gamma < 90^\circ \Rightarrow \cos \gamma > 0$$

$$3x = 24 \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}$$

$$x = \frac{24}{\sqrt{15}} \sin^2 \gamma$$

$$x = 8 \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} \quad \begin{cases} 64 - 64 \sin^2 \gamma = \\ = \frac{64 \cdot 9}{15} \sin^2 \gamma \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } AB = 4\sqrt{6}$$

$$x = \frac{24}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{24}} \quad 64 = 1 = \frac{24}{15} \sin^2 \gamma$$

$$x = 2\sqrt{6} \quad 2x = 4\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4
Пусть мы сможем распределить людей по 6
напомню ряду сидит: посчитаем кол-во способов их
расставить.

1. В ряду 3 человека $\rightarrow$ самый левый обязательно
только первый, тогда третий
только второй, тогда самый последний
только последний $\Rightarrow$ 1 вариант.

2. В ряду 2 человека $\Rightarrow$ 1. ~~Второе место первое или~~
~~по столбцу~~ $\rightarrow$ ~~нашу соседей~~
нашу соседей можно показать 2 образом, если
на месте подчеркнуты. $\Rightarrow$ Если второе место первое или
последнее 2 способа показать 2 человека.

Если второе место посередине то мы можем
сместить как угодно $\Rightarrow$ т.е. 2 способами.

Получается на каждое распределение по столбцам
(1+1+2) $\cdot$ 1 $\cdot$ 1 способа расстановки. $\Rightarrow$

Найдём кол-во распределений по столбцам: в первый

столбец C_9^3 способа во второй C_6^3 в третий - произволь-
но мы знаем что у нас 9 элементов т.е. мы распреде-
лим и людей и пустое место.

Получаем ответ: $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot 4$

Outlet: $\min(DI + DE) = 10$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

^{N 6}
Перейдём на эти графы деревне - вершины
города - ~~ребра~~ ребро.

Рассмотрим единственность всех маршрутов $\Leftrightarrow$ отсутствие
циклов $\Leftrightarrow$ граф - дерево

Рассмотрим подграф из вершин 1 и степеней 3, 4, 5, 7
в исходном графе и все ребра между ними.

1 этот подграф должен в итоге быть

2 вершины 6 без пути между ними, но т.к.

из вершины степени 2 можно только вернуться
назад, иде по графу то и в исходном графе
между ними нет пути (!)

2 тогда этот подграф - дерево, иначе он имеет

цикл, тогда исходный граф - не дерево (!) и он
неверен.

значит между ними ровно 3 ребра.

Все остальные ребра ведут в вершины
(в исходном графе) степени 2 и в частности

вершину степени 2 ведёт ребро из вершин
степеней 3, 4, 5 и 7 $\Rightarrow$ вершин степени 2 $3+4+5+7-3 =$
 $= 16$, а всего вершин 20

Ответ: 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тк. $\sqrt{1-|x+y-2|} \geq 0$

$$|x+y-2| \leq 1$$

$$x+y-2 \in [-1; 4] \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$x+y \in [1; 3]$$

$$x+y = 1 \text{ или } 2 \text{ или } 3$$

1) $x+y=1 \Rightarrow \sqrt{1-|1-2|} = 0 \Leftrightarrow 2x+2y-x^2-y^2=1$

возьмем $y=1-x$

$$2x + 2(1-x) - x^2 - (1-x)^2 = 1$$

2 1+x^2-2x

$$-2x^2 + 2x + 2 - 1 = 1$$

$$x(-2x+2) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \text{ или } x=1 \\ y=1 \quad \quad y=0 \end{cases}$$

2) $x+y=2 \quad \sqrt{1-|2-2|} = 1 \Leftrightarrow 2x+2y-x^2-y^2=0$

возьмем $y=2-x$

$$2x + 2(2-x) - x^2 - (2-x)^2 = 0$$

$$4 - x^2 - x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x(-2x+4) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

3) $x+y=3 \quad \sqrt{1-|3-2|} = 0 \Rightarrow 2x+2y-x^2-y^2=1$

возьмем $y=3-x$

$$2x + 2(3-x) - x^2 - (3-x)^2 = 1$$

$$6 - x^2 - 9 - x^2 + 6x = 1$$

$$-2x^2 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Ответ: $(x, y) = (0, 2) \text{ или } (1, 0) \text{ или } (0, 2) \text{ или } (2, 0) \text{ или } (1, 2) \text{ или } (2, 1)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$4 \cdot 3 \cdot t^2 - 16t^2 > 0$$

$$-4t^2 + 16 > 0$$

$$4t^2 - 4 > 0$$

$$16 > 4t^2 > 4$$

$$4 > t^2 > 1$$

$$2 > t > 1$$

$$-2 < t < 4$$

$$x = 17$$

$$(a-b)^2 \cdot 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

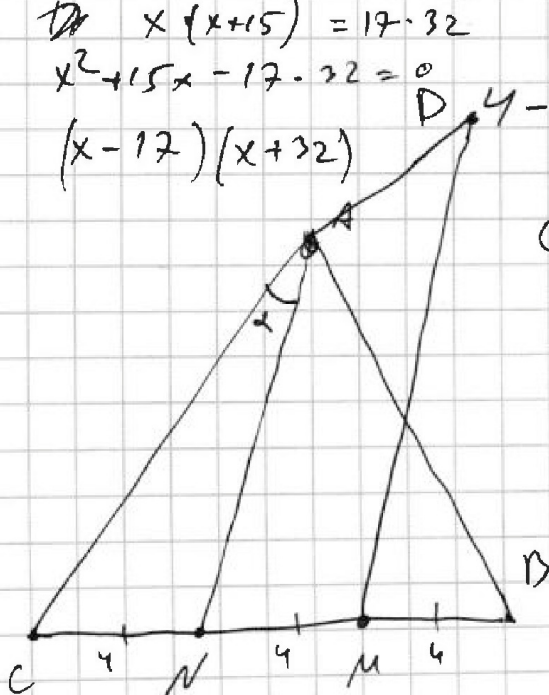
$$x(x+15) = 17 \cdot 32$$

$$x^2 + 15x - 17 \cdot 32 = 0$$

$$(x-17)(x+32)$$

$$4 - 36 = -32$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{4}$$



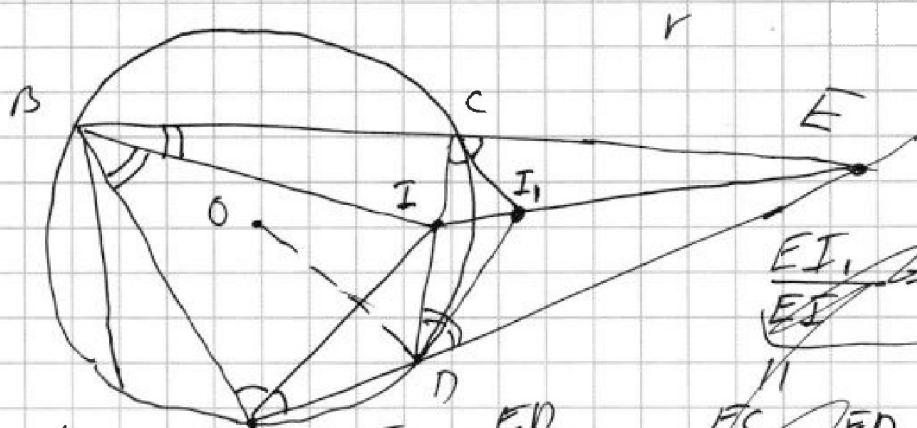


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{EI_1}{EI} = \frac{EQ}{ES} = \frac{ED}{EA}$$

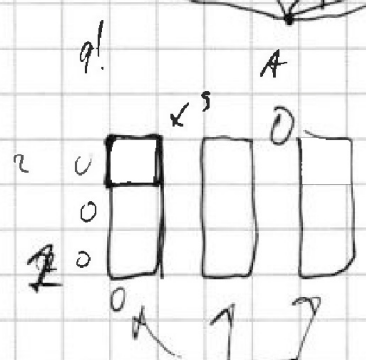
$$\frac{EC}{10} = \frac{ED}{6}$$

$$CI = EB = 10$$

$$EA \cdot ED = DI$$

$$\frac{EC}{EI} = \frac{ED}{DI}$$

$$\frac{EI_1}{EI} = \frac{ED}{EB} = \frac{EC}{EA}$$



$$\sqrt{2x+y-x^2-y^2} + \sqrt{3-x-y} = 1, \quad x+y-2 \geq 0$$

$$\sqrt{2x+y-x^2-y^2} + \sqrt{1-x-y} = 2$$

$$\sqrt{1-x-y} = x^2+y^2-2-x-y$$

$$(2x+y)(2x+y-x^2-y^2)(3-x-y) = (x^2+y^2-2-x-y)^2$$

$$(3x+y-x^2-y^2)^2$$

$$(x^2+y^2-2x-y)(x^2+y^2-2x-y)$$

$$x^3+y^3$$

$$\neq 0$$

$$DI = ED \quad IC = EA$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \cdot y = 1 \quad \sqrt{1-1} = 0$$
$$2x + 2y - x^2 - y^2 = 1 \quad x = 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

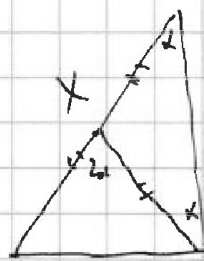
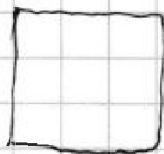
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{12}{\sin 2\alpha} = \frac{2x}{\sin \gamma} = \frac{48}{\sqrt{15}}$$

$$\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\frac{12}{\sin 2\alpha} = \frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin \beta}$$



$$\sin \beta = \sin(180 - 2\alpha - \gamma)$$

$$\sin \beta = \sin \gamma$$

$$= \cos(\gamma) \sin(180 - 2\alpha) - \sin \gamma \cos(180 - 2\alpha)$$

$$\frac{2x}{\sin \gamma} = \frac{48}{\sqrt{15}}$$

1 2 ... 8

$$x = (\sin \gamma) \frac{24}{\sqrt{15}}$$

$$x = (\sin \beta) \frac{48}{\sqrt{15}}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4} (\cos \gamma) + \frac{1}{4} \sin \gamma$$

$$x = \sin \gamma \frac{24}{\sqrt{15}}$$

sin

$$x = \frac{\sqrt{15}}{4} \cos \gamma + 12 \cos \gamma - \frac{12}{\sqrt{15}} \sin \gamma$$

$$3x = 24 \cos \gamma \quad x = \sin \gamma \frac{24}{\sqrt{15}}$$

$$1 - \sin^2 \gamma = \frac{9}{25} \sin^2 \gamma \quad x = 8 \cos \gamma$$

$$\frac{\sin \gamma \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma}} = \frac{3}{\sqrt{15}} \sin \gamma$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x(2-x)+y(2-y)} \quad 1 \leq x+y \leq 3$$

$$(x+y)^2 - 2xy$$

$$x(2-x)+y(2-y)$$

$$2(x+y)$$

$$x+y \geq 2$$

$$2,2$$

$$1,5 \quad 0,5$$

$$2 \quad 4 \quad 3,3 \quad 4$$

$$2 \quad 2$$

$$4 \quad 2 \quad 2-1$$

$$x+y < 2$$

$$x+y =$$

$$x+y \geq 2$$

$$|-x-y+2| = |-x-y+2|$$

$$x+y \leq 3$$

$$1 \leq x+y < 2$$

$$3 \geq x+y \geq 2$$

$$-1+x+y$$

