



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть 2 - знаменатель прогрессии.

$$\begin{cases} (2-x) = 2^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \\ \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = 2^6 (2-x) \end{cases}$$

Переносим равенства:

$$1 = 2^8 \sqrt{(3x+2)^4}$$

$$2^8 = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow 2^4 = \frac{1}{|3x+2|} \quad (\text{т.к. } 2^4 > 0)$$

$$2^4 = \frac{1}{|3x+2|}$$

$$(2-x)^2 = 2^4 (25x+34)(3x+2)$$

$$(2-x)^2 = \frac{(25x+34)(3x+2)}{|3x+2|}$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $3x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}$ Тогда:

$$(2-x)^2 = 25x+34$$

$$x^2 - 4x + 4 = 25x + 34$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$x_1 = 30 \quad x_2 = -1 \text{ — не удов. раскл. значениям}$$

пост. корень (не является корнем $\pm$ уравнения исход. системы)

2) $3x+2 < 0 \Rightarrow x < -\frac{2}{3}$

$$x^2 - 4x + 4 = -25x - 34$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$x_1 = -19 \quad x_2 = -2$$

по проверке установлено, что оба корня удовлетворяют условию. Ответ: $-19; -2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+2} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

Раскроем левую часть второго уравнения на промежутках и найдем минимум на каждом из них.

1) $y \geq 18$: $|y+2| + 2|y-18| = y+2 + 2y-36 = 3y-34$ MIN равен $3 \cdot 18 - 34 = 20$

2) $-2 \leq y \leq 18$: $|y+2| + 2|y-18| = -y+38$ MIN равен $-18+38 = 20$

3) $y \leq -2$: $|y+2| + 2|y-18| = -3y+34$ MIN равен $6+34 = 40$

т.е. минимум по всей числовой прямой равен 20 и достигается при $y=18$. Найдем максимум выражения справа ($\sqrt{400-z^2}$)

Максимум достигается при MAX подкоренного: $f(x) = 400 - z^2$ Однако это выражение максимальное при $z=0$ (из константы вычитается неотрицательное число) $\Rightarrow$ максимум $\sqrt{400-z^2}$ равен $\sqrt{400} = 20$, что равно

минимуму левой части. Значит у этого уравнения лишь одна пара корней: $y=18, z=0$ Подставим их в I уравнение:

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2} \quad \text{OДЗ: } -6 \leq x \leq 3$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} - 7 \quad |^2$$

$$x+6+3-x - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} = 4(x+6)(3-x) - 28\sqrt{(x+6)(3-x)} + 49$$

$$4(x+6)(3-x) - 28\sqrt{(x+6)(3-x)} + 49 = 0$$

$$t = \sqrt{(x+6)(3-x)}$$

$$2t^2 - 13t + 20 = 0$$

$$D = 169 - 160 = 9$$

$$t_1 = \frac{13+3}{4} = 4 \quad t_2 = \frac{13-3}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x+6)(3-x)} = 4 \\ \sqrt{(x+6)(3-x)} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+6)(3-x) = 16 \\ 4(x+6)(3-x) = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 3x + 2 = 0 \\ -4x^2 - 12x + 47 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$D = 9 + 8 = 17$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$

$$4x^2 + 12x - 47 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 47 = 224$$

$$x_3 = \frac{-6 + 4\sqrt{14}}{4} = \frac{-3 + 2\sqrt{14}}{2}$$

$$x_4 = \frac{-6 - 4\sqrt{14}}{4} = \frac{-3 - 2\sqrt{14}}{2}$$

Все корни удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; 18; 0\right); \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}; 18; 0\right);$

$\left(\frac{-3 - 2\sqrt{14}}{2}; 18; 0\right); \left(\frac{-3 + 2\sqrt{14}}{2}; 18; 0\right).$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = \cos x (4\cos^2 x - 3)$$

$$p\cos 3x + 6\cos 2x + 3(p+4)\cos x + 10 = 0$$

$$p\cos x (4\cos^2 x - 3) + 6(2\cos^2 x - 1) + 3(p+4)\cos x + 10 = 0$$

$$t = \cos x, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$(t+1)^3 + (p-1)t^3 = 0$$

$$p-1 = -\frac{(t+1)^3}{t^3} \Rightarrow p = -\left(\frac{t+1}{t}\right)^3 + 1 = -\left(1 + \frac{1}{t}\right)^3 + 1$$

$$\text{при } t \in [-1; 0) \quad p \text{ убывает от } 1 \text{ до } +\infty$$

$$\text{при } t \in (0; 1] \quad p \text{ возрастает от } -\infty \text{ до } -7$$

$$\Rightarrow p \begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq -7 \end{cases} \quad \text{при } t=0 \quad p \text{ не определено.}$$

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)^3 = 1 - p$$

$$1 + \frac{1}{t} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ответ: значения p : $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$;

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

Заметим, что если раскраска удовлетворяет хотя бы двум из указанных симметрий, то она ~~удовлетворяет~~ удовлетворяет всем указанным симметриям (т.к. центральная симметрия эквивалентна двум ~~или~~ осевым симметриям относительно взаимно перпендикулярных прямых).
Количество способов сделать центрально симметричную раскраску равно $C_{\frac{500 \cdot 120}{2}}^4 = C_{30000}^4$ (выбираем 4 точки в верхней половине прямоугольника, остальные будут летать в нижней симметрично вершиной). Аналогично количество способов сделать ^{↑ центральную} любую из осевых симметрий тоже равно C_{30000}^4 (выбираем точки в верхней или в левой половине соответственно).
~~Жалко~~ Для того чтобы сделать все симметрии сразу достаточно выбрать 2 точки в верхней-левой четверти прямоугольника (каждой из них будет соответсваться 3-покаждую пару симметрий). Кол-во способов сделать это равно $C_{\frac{500 \cdot 120}{4}}^2 = C_{15000}^2$.

Сложив все возможные способы сделать ~~или~~ любую из симметрий и вычтя вычтем кол-во способов сделать все симметрии сразу (по этому мы посчитали их трижды) получаем ответ:
ответ: $3 \cdot C_{30000}^4 - 2 \cdot C_{15000}^2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(a-c)(b-c) = p^2$ Однако p^2 имеет лишь 3 делителя: 1, p , p^2 .
Рассмотрим все возможные случаи:

1) $a-c = b-c = p$ или $a-c = b-c = -p \Rightarrow a = b$ $\nmid$ с условием

2) $\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow a-b = p^2 - 1 > 0 \Rightarrow a > b$ $\nmid$ с условием

3) $\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b = p^2 - 1 > 0 \Rightarrow a > b$ $\nmid$ с условием

4) $\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \Rightarrow b-a = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$, $b-a$ не кратно 3 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow p-1$ и $p+1$ не кратны 3 $\Rightarrow p$ не может

иметь остатков 1 или 2 по модулю 3 $\Rightarrow p \div 3$, но p - простое $\Rightarrow$
 $p = 3 \Rightarrow$ ~~всегда~~ ~~вс.~~ $b-a = 2 \cdot 4 = 8 \Rightarrow b = a + 8$

$$a^2 + b = 1000$$

$$a^2 + a + 8 - 1000 = 0$$

$$a^2 + a - 992 = 0$$

$$a_1 = -32 \quad a_2 = 31$$

$$b_1 = -24 \quad b_2 = 39$$

$$c_1 = -33 \quad c_2 = 30$$

5) $\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \Rightarrow b-a = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$, $b-a$ не
кратно 3 $\Rightarrow$ (аналогично 4) $\Rightarrow p = 3, b = a + 8$

$$a^2 + a - 992 = 0$$

$$a_3 = -32 \quad a_4 = 31$$

$$b_3 = -24 \quad b_4 = 39$$

$$c_3 = -23 \quad c_4 = 40$$

Ответ: $(-32; -24; -33); (31; 39; 30);$
 $(-32; -24; -23); (31; 39; 40).$

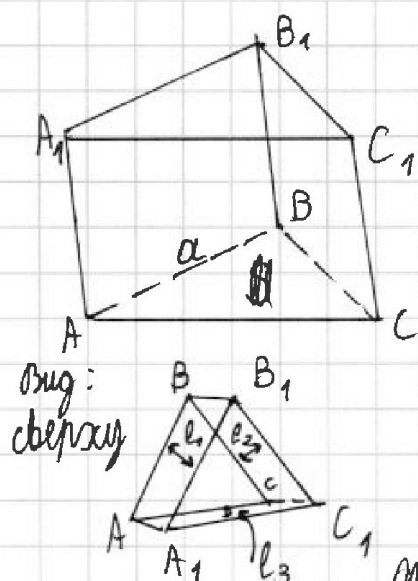


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



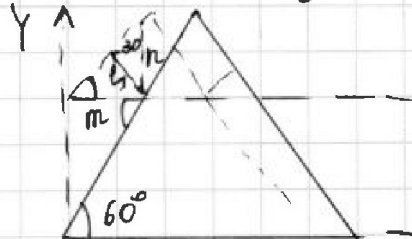
выг:
сверху

N 7 Дано: $S_0 = 4$; $S_1 = S_2 = 6$; $S_3 = 5$
 $AB = BC = AC = a$
Дано Все боковые стороны

призмы - параллелограммы (т.к. стороны основания призмы равны и ||)
их высоты - высоты треугол. Δ
один катет которого - ~~выс~~ высота призмы, а другой - расстояние от проекции стороны одного основания на другое основание до соответствующей стороны другого основания. Тогда:

$$S_1 = a \cdot \sqrt{h^2 + l_1^2} = S_2 = a \cdot \sqrt{h^2 + l_2^2} = 6 \Rightarrow l_1 = l_2$$

$$S_3 = a \cdot \sqrt{h^2 + l_3^2} = 5$$

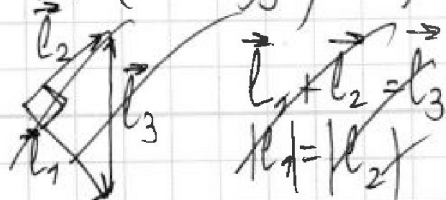


Пусть ~~один~~ ~~а~~ проекция одного основания на плоскость другого получается путём сдвига $\perp$ основания на l_3 вдоль OY . Тогда:
и на x вдоль OX

$$l_1 = \sqrt{l_3^2 + x^2}$$

$$S_1^2 = a^2 \left(h^2 + \frac{l_3^2 x^2}{l_3^2 + x^2} \right) = 36$$

$$S_3^2 = a^2 (h^2 + l_3^2) = 25$$



$$n = l_3 + x \tan 60^\circ$$

$$m = x + l_3 \tan 30^\circ$$

$$l_1 = \frac{mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$l_1 + l_2 = l_3$$

$$l_1 = l_2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$(2\cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos x (2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 1) = \cos x (4\cos^2 x - 3)$$

$$t = \cos x$$

$$4t^3 - 3t + 12t^2$$

$$a - b + 7 = 2ab$$

$$a + 7 = b(2a + 1)$$

$$b = \frac{a + 7}{2a + 1}$$

$$(t+1)^3 + (p-1)t^3 = 0$$

8

1

$$p - 1 = -8$$

$$p = -7$$

$$(-7; 1)$$

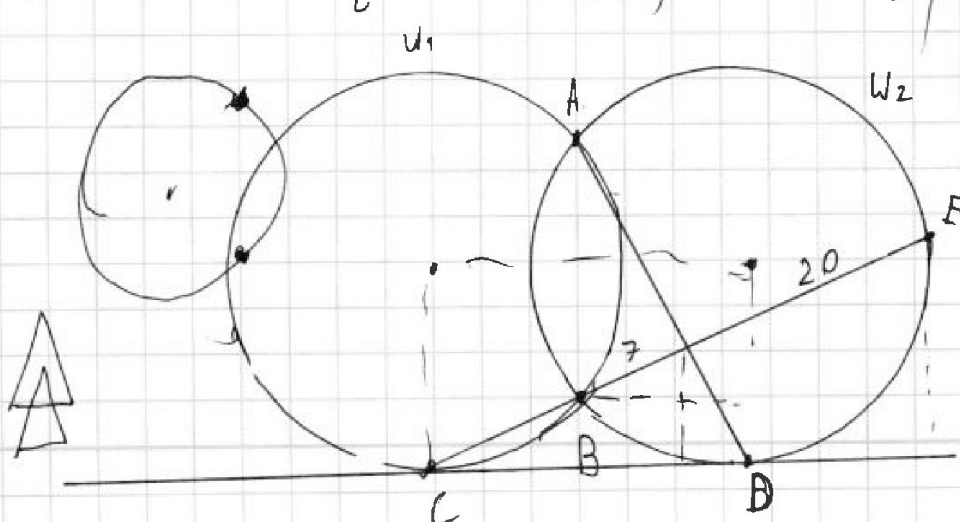
$$0 \leq 3: [-6; 3]$$



$$3pt^2 + 6t + 3 = 0$$

$$pt^2 + 2t + 1 = 0$$

$$p - 1 = - \frac{(t+1)^3}{t^3} = - \left(\frac{t+1}{t} \right)^3 = - \left(1 + \frac{1}{t} \right)^3$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b-a = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

$$\begin{matrix} \cdot 3 & \cdot 3 & \cdot 3 \\ \cdot 3 & \cdot 3 & \cdot 3 \end{matrix} \Rightarrow p:3 \Rightarrow p=3$$

$$\begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 3 \end{matrix} b-a=8$$

$$a^2+b=9000$$

$$\frac{250 \cdot 60 \cdot (250 \cdot 60 - 1)}{2}$$

$$C_{250 \cdot 60}$$

$$C_{60000}$$

$$C_{500 \cdot 60}^4 = C_{30000}^4$$

$$C_{60000}^4$$

$$2 \cdot C_{30000}^4 + C_{60000}^4$$

$$\sqrt{x+6} + 7 = 2\sqrt{3-x}(\sqrt{x+6}+1)$$

$$\sqrt{x+6}$$

$$1$$

$$(3 \cdot C_{30000}^4 - 2 \cdot C_{15000}^2) \beta$$

$$x+6-3$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{ab}$$

$$y+2-2y+36 = 38-y$$

$$-y-2-2y+36 = 34-3y$$

$$\sqrt{3-x} (2\sqrt{x+6})$$

$$(x+6)\sqrt{3-x} - (3-x)\sqrt{x+6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 4 \quad x+6+3-x$$

$$a^2 = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt[4]{3}}$$

$$1) \quad 2-x = a^2 \sqrt{(25x+34)/(3x+2)}$$

$$\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = (2-x) a^6$$

$$\frac{1}{a^6} = a^2 (3x+2)^2 \quad a^8 = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$1) \quad 9 \cdot 56 = 8 \cdot 14 \quad a^4 = \frac{1}{|3x+2|}$$

$$\begin{array}{r} 188 \\ + 36 \\ \hline 224 \end{array} \quad 2-x = \frac{(25x+34)(3x+2)}{|3x+2|}$$

$$\text{Пусть } 3x+2 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{2}{3} \quad 2-x = 25x+34$$

$$26x = -32$$

$$a < b$$

$$b-a \not\equiv 3$$

$$a \not\equiv b \pmod{3}$$

$$a = b$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$1) \quad a-c = b-c = p$$

$$a^2+b = 1000$$

$$2) \quad a-c = 1 \quad b-c = p^2$$