



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1.

Обозначим за a_1 - первый член прогрессии, за d - разность прогрессии. Из условия: $a_3 = 3x+3$; $a_5 = (x^2+2x)^2$;
 $a_9 = 3x^2$.

Применив формулу n -ного члена арифметической прогрессии ($a_n = a_1 + (n-1)d$) получим:

$$a_3 = a_1 + 2d \quad a_5 = a_1 + 4d \quad a_9 = a_1 + 8d$$

Изсюда можно видеть, что $3a_1 + 12d = 2a_3 + a_9 = 3a_5$.

Имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 2a_3 + a_9 = 3a_5 \\ a_3 = 3x+3 \\ a_5 = (x^2+2x)^2 \\ a_9 = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3x+3) + 3x^2 = 3(x^2+2x)^2 \Leftrightarrow \\ 2(x+1) + x^2 = (x^2+2x)^2 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x)^2 \quad \text{Замена } t = x^2 + 2x$$

$$t + 2 = t^2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

Вернемся к замене

1) $t = -1$

$$x^2 + 2x = -1$$

$$\uparrow$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\uparrow$$
$$(x+1)^2 = 0$$

$$\uparrow$$
$$x = -1$$

2) $t = 2$

$$x^2 + 2x = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим все 3 полученных корня:

1) $x = -1$

$$a_3 = -3 + 3 = 0 \quad a_5 = ((-1)^2 - 2)^2 = 1 \quad a_9 = 3 \cdot (-1)^2 = 3$$

Легко видеть, что удовлетв. пошед. $\begin{cases} a_1 = -1 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$

2) $x = -1 - \sqrt{3}$

$$a_3 = 3x + 3 = -3 - 3\sqrt{3} + 3 = -3\sqrt{3}$$

$$a_5 = ((1+\sqrt{3})^2 - (1+\sqrt{3}) \cdot 2)^2 = (4 + 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3})^2 = 2^2 = 4$$

$$a_9 = 3(1+\sqrt{3})^2 = 3(4 + 2\sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$a_5 - a_3 = 4 - (-3\sqrt{3}) = 4 + 3\sqrt{3}$$

$$a_9 - a_5 = 12 + 6\sqrt{3} - 4 = 8 + 6\sqrt{3} = 2(4 + 3\sqrt{3})$$

Легко видеть, что удовлетв. пошед. $d = \frac{1}{2}(4 + 3\sqrt{3})$

$$a_1 = -4 - 6\sqrt{3}$$

3) $x = -1 + \sqrt{3}$

$$a_3 = 3x + 3 = -3 + 3\sqrt{3} + 3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = ((\sqrt{3}-1)^2 - 2(\sqrt{3}-1))^2 = (4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2)^2 = (6 - 4\sqrt{3})^2 = 36 - 48\sqrt{3} + 48 = 84 - 48\sqrt{3}$$

$$a_9 = 3x^2 = 3(\sqrt{3}-1)^2 = 3(4 - 2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$a_5 - a_3 = 84 - 48\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 84 - 51\sqrt{3}$$

$$a_9 - a_5 = 12 - 6\sqrt{3} - (84 - 48\sqrt{3}) = 12 - 84 + (48 - 6)\sqrt{3} = -72 + 42\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Услов: даны 3 члена арифметической прогрессии
предусловие: найти значения: $2(a_5 - a_3) = a_9 - a_5$
Подставив числа получим:

$$2(84 - 51\sqrt{3}) = 42\sqrt{3} - 72 \Leftrightarrow 168 - 102\sqrt{3} = 42\sqrt{3} - 72 \Leftrightarrow$$

$\Rightarrow 240 = 144\sqrt{3}$ — легко видеть, что равенство не выполняется, следовательно, $x = -1 + \sqrt{3}$ не подходит

3) $x = \sqrt{3} - 1$

$$a_3 = 3x + 3 = 3\sqrt{3} - 3 + 3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = ((\sqrt{3} - 1)^2 + 2(\sqrt{3} - 1))^2 = (4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2)^2 = 4^2 = 16$$

$$a_9 = 3x^2 = 3(\sqrt{3} - 1)^2 = 3(4 - 2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3}$$

Легко видеть, что условие не выполняется. $d = \frac{1}{2}(4 - 3\sqrt{3})$

$$a_1 = 6\sqrt{3} - 4$$

Ответ: $\begin{cases} x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{3} \\ x = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

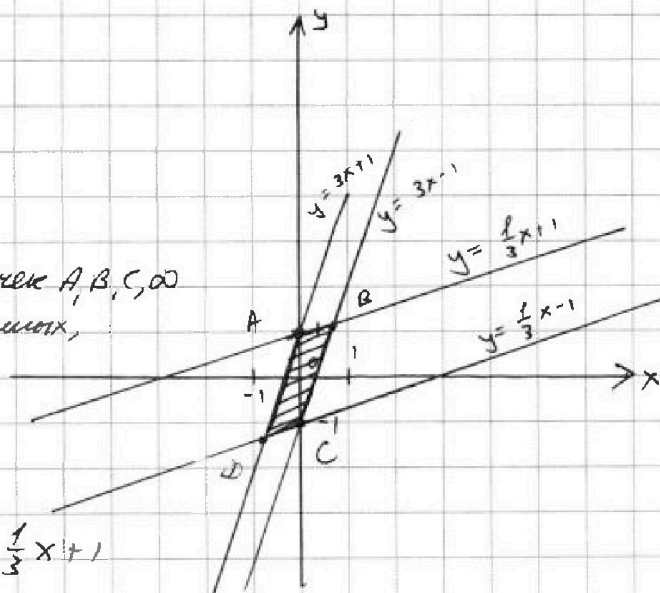
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2.

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq x-3 \\ 3y \leq x+3 \\ y \geq 3x-1 \\ y \leq 3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{1}{3}x - 1 \\ y \leq \frac{1}{3}x + 1 \\ y \geq 3x - 1 \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$

Изобразим все решения системы на графике.



Найдем координаты точек A, B, C, D (точки пересечения в 4 прямых, попарно)

A (0; 1) — точка

$$B: \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3x - 1 = \frac{1}{3}x + 1$$

$$\frac{8}{3}x = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \quad y = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{4}$$

Имеем: B $(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$

C (0; -1)

$$D: \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - 1 \\ y = 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Имеем: D $(-\frac{3}{4}; -\frac{5}{4})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x; y) = 4y + 8x$$

Заметим, что $f(x; y)$ монотонно возр. при увеличении x (y - фикс.) и мон. возр. при увеличении y (x - фикс.).

Отсюда легко видеть, что если среди решений нашей системы есть точка $B(x_0; y_0)$ такая, что нет никакой другой точки с большим ординатой y и нет никакой другой точки с большим абсциссой, то $f(x_0; y_0)$ — максим. значение $f(x; y)$.

А вот легко видеть, что на нашей диаграмме такой точкой является $B(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$.

$$f(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}) = \frac{5}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 8 = 5 + 6 = 11$$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3 .

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$I) \begin{cases} A = 13p^2 \\ B = 75q^2 \end{cases}$$

$$\text{Имеем } (m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

т.к. в обеих частях целое множитель

т.к. в обеих частях целое множитель
($m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m+n > 0$ и $m+n-9 > 0$), то в обеих частях
 $13p^2 > 0 \Rightarrow m+n-9 > 0$ то в обеих частях
только целые множители
(в таблице).

$m+n$	$m+n-9$
1	p^2
2	p
3	1
4	$13p$
5	$13p^2$
6	$13p^3$

Рассмотрим все случаи
(здесь получаем, что p - простое $\Rightarrow 13p^2 = 13 \cdot p \cdot p$ содержит в разложении всего 3 множителя)

6) $mn = 1$ - нел., т.к. $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m+n \geq 2$

$$1) \begin{cases} m+n = 13 \\ m+n-9 = p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 13-9 \Leftrightarrow p^2 = 4 \Leftrightarrow p = 2$$

$$\text{Имеем: } \begin{cases} m+n = 13 \\ mn(m+n-3) = 75q^2 \end{cases} \Rightarrow 10mn = 75q^2$$

Но $45/2 \Rightarrow q^2 : 2$, а т.к. $q \in \mathbb{P}$, то $q = 2$ (ед. четное простое число). Подставим $10mn = 75 \cdot 2^2 \Leftrightarrow mn = 30$

$$\begin{cases} m+n = 13 \\ mn = 30 \end{cases} \Leftrightarrow m(13-m) = 30 - \text{т.к. квадратное, то не более 2-х решений. Подставляем } m=3; m=10$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m = 3 :$$

$$n = 10 = 13 - m = 13 - 3 = 10$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot (13-9) = 13 \cdot 4 = 13 \cdot 2^2 - \text{подходит}$$

$$mn(m+n-3) = 10 \cdot 3 \cdot 10 = 30 = 75 \cdot 2^2$$

$$m = 10 :$$

$$n = 13 - m = 13 - 10 = 3$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 2^2$$

$$mn(m+n-3) = 75 \cdot 2^2 - \text{подходит}$$

$$2) \begin{cases} m+n = 13p \\ m+n-9=p \end{cases} \Rightarrow 9 = 12p \Rightarrow p \notin \mathbb{Z} - \text{не подходит}$$

$$3) \begin{cases} m+n = 13p^2 \\ m+n-9=1 \end{cases} \Rightarrow 13p^2 = 10 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z} - \text{не подходит}$$

$$4) \begin{cases} m+n = p \\ m+n-9 = 13p \end{cases} \begin{cases} m+n > m+n-9 \\ p < 13p \quad (p > 1) \\ m+n = p \\ m+n-9 = 13p \end{cases} - \text{против.$$

$$5) \begin{cases} m+n = p^2 \\ m+n-9 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n = 22 \\ m+n = p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 22 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z} - \text{не подходит}$$

$$\text{II) } \begin{cases} A = 75a^2 \\ B = 13p^2 \end{cases}$$

$$\text{Ищем: } mn(m+n-3) = 13p^2$$

$$\text{Значит не } m, n, 13p^2 > 0 \Rightarrow m+n-3 > 0.$$

решаем в натур. числах. Т.к.

$$13p^2 = 13 \cdot p \cdot p \text{ (кажд. множ. на 13 дел.)}, \text{ то}$$

существует вариант, как-то варьировать
(они перечислены в таблице)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

	m	n	$m+n-3$
1	1	1	$13p^2$
2	1	$13p^2$	1
3	$13p^2$	1	1
4	13	p^2	1
5	13	1	p^2
6	p^2	1	13
7	p	$13p$	1
8	$13p$	p	1
9	$13p$	1	p
10	p	1	$13p$
11	1	p	$13p$
12	1	$13p$	p
13	p^2	13	1
14	1	p^2	13
15	1	13	p^2
16	p	13	p
17	p	p	13
18	13	p	p

1) $m+n=2 \Rightarrow m+n-3 < 0$ — не пох.

2) $m=1$
 $m+n-3 = m-2 = 1$
 $n=3$
 $3 = 13p^2$ — не пох.

3) аналогично с 2)

4) $m=13$
 $m+n-3 = 10+n = 1$
 $n = -9$ — не пох.

5) ~~$m+n-3 = n+13-3 = n+10$~~
 $m+n-3 = 14-3 = 11$
 $p^2 = 11 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$ — не подходит

6) $m+n-3 = m-2 = 13$
 $m=15$
 $p^2 = 15 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$ — не подходит

7) $m+n-3 = 1 \Rightarrow m+n=4$
 $m+n = p+13p = 14p$
 $14p = 4 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$ — не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

8) Аналогично с 7)

9) $m+n-3 = p$
 $\Rightarrow m-2 = p$
 $13p-2 = p$
 $12p = 2 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$
- не подходит

10) $m+n-3 = m-2$
 $p-2 = 13p$
 $-12p = 2 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$ - не подходит

11) Аналогично с 10)

12) $m+n-3 = n-2 = p$
 $13p-2 = p \Rightarrow 12p = 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$ - не подх.

13) Аналогично с 9)

14) Аналогично с 6)

15) Аналогично с 5)

16) $m+n-3 = m \Rightarrow n = 3$
 $\Rightarrow n = 13$ - не подх.

17) $2p-3 = 13 \Rightarrow 2p = 16 \Rightarrow p \notin \mathbb{P}$ - не подх.

18) Аналогично с 16)

Во II случае ни один вариант не подходит.
В I случае подходят только пары (3;10) и (10;3)

Ответ: (3;10) и (10;3)

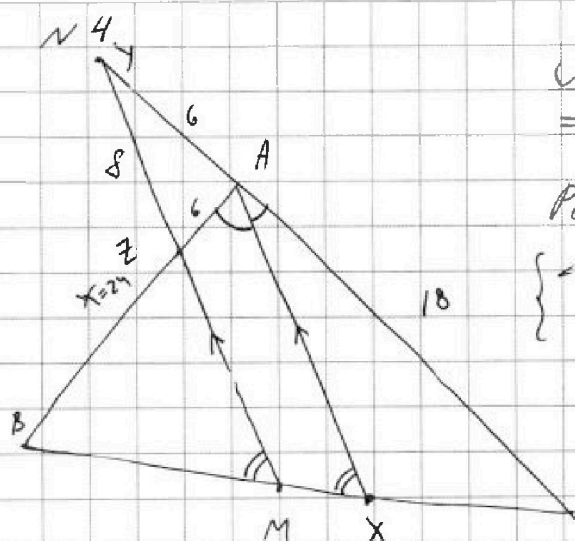


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



По условию $MZ \parallel AX \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BMZ = \angle BXA$ (соотв.; BC - секущая)

Рассмотрим $\triangle BZM$ и $\triangle BAX$:

$$\begin{cases} \angle ZBM \equiv \angle ABX \Rightarrow \triangle BZM \sim \triangle BAX \\ \angle BMZ = \angle BXA \end{cases} \text{ по двум углам}$$

BZ и BA - соотв. (лежат у угла равных углов)

BM и BX - соотв. по той же причине.

Тогда имеем место: $\frac{BZ}{BA} = \frac{BM}{BX}$

Обозначим длину отрезка BZ за x .

По св-ву биссектрисы: $\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{BX}{XC} = \frac{x+6}{18} \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{BX} = (x+6)k \\ \overline{XC} = 18k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}} = \frac{(x+6)k}{(x+24)k} = \frac{x+6}{x+24} \\ \frac{\overline{XC}}{\overline{BC}} = \frac{18k}{(x+24)k} = \frac{18}{x+24} \end{cases}$$

Т.к. M - середина BC , то $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BX}} = \frac{\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}}{\frac{\overline{BX}}{\overline{BC}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x+6}{x+24}} = \frac{x+24}{2x+12}$$

Ранее получили, что

$$\frac{\overline{BZ}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BX}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BZ}}{\overline{BA}} = \frac{x+24}{2x+12}$$

$$\begin{aligned} \overline{BZ} &= x \\ \overline{BA} &= \overline{BZ} + \overline{ZA} = x+6 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \angle YAZ \equiv \angle YAB \\ \angle YAB + \angle BAC = 180^\circ - \text{смежные} \Rightarrow \angle BAC = 180^\circ - \angle YAB \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos(\angle BAC) = -\cos(\angle YAB) = -\frac{1}{9}$$

Применим теорему косинусов в $\triangle ABC$:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\angle BAC)$$

$$\overline{BC}^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) =$$

$$= 30^2 + 18^2 + 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \frac{1}{9} = 30^2 + 18^2 + 4 \cdot 30 =$$

$$= 4(15^2 + 9^2 + 30) = 4(225 + 81 + 30) = 4(336) =$$

$$= 4 \cdot 4 \cdot 84 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 21$$

$$\overline{BC} = \sqrt{4^3 \cdot 21} = \sqrt{2^6 \cdot 21} = 8\sqrt{21}$$

Ответ: $8\sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5.

Рассмотрим вторую строку системы.

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

Во-первых, из второй строки следует сдз. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$
 (в первой строке будут еще ограничения, но мы пока рассматриваем только вторую строку)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} \quad \text{Покажем, что она монотонно возрастает при } x \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{I способ)}: \quad & \left. \begin{aligned} x^4 - \text{мон. возр. при } x \geq 0 \\ 5x^2 - \text{мон. возр. при } x \geq 0 \\ \sqrt{x} - \text{мон. возр. при } x \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ их сумма также мон. возр. при $x \geq 0$

$$\text{II способ)} \quad f'(x) = 4x^3 + 10x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Достаточно показать, что $x \geq 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

$$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow 4x^3 > 0 \\ x > 0 &\Rightarrow 10x > 0 \\ x > 0 &\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow \text{их сумма также } > 0.$$

Видно, что рассмотрим точку $x=0$. В ней функ. не определена, но легко видеть, что $f(0)=0$, и 0 не достигн. так как при любом $x > 0$ $f(x) > 0$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получается, что вторая строчка представляет из себя уравнение следующего вида:

$$\begin{cases} f(x) = f(y), \text{ где } f(x) - \text{мон. возрастает на } x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Нужно видеть, что это ~~возможное~~ решение будем $x=y$. Пусть это не так. Не нарушая общности $x > y$. $x = y + \varepsilon$. Имеем: $f(y + \varepsilon) = f(y)$
($x, y, \varepsilon > 0$)

т.е. $y < y + \varepsilon$, то и $f(y) < f(y + \varepsilon)$
В силу монотон. возрастания $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ равенства быть не могут.

Получим, что исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x=y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{из 1-й строчки} \\ \text{из 2-й строчки} \end{array}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + 5 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \\ x=y \\ x \geq 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдём максим. $OD3$ первой строки:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 6+5x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ (6-x)(x+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; 6]$$

Имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \\ x=y \\ x \in [0; 6] \end{cases}$$

Заметим, что $(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 =$
 $= x+1+6-x - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 7 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$

Заменим $t = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$
 $t^2 = 7 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 7 - 2\sqrt{6+5x-x^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 7 - t^2$$

Первая строка с t : $t + 5 = 7 - t^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Вернёмся к замене:

1) $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 6-x \\ (\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 5 \\ x+1+6-x - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x \geq 2,5 \\ 7 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2,5 \\ \sqrt{(x+1)(6-x)} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2,5 \\ (x+1)(6-x) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2,5 \\ 6x + 6 - x^2 - x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2,5 \\ -x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2,5 \\ x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 12 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

$$(т.к. \sqrt{13} > 0)$$

$$2) \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 6-x \\ (\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 5 \\ x+1+6-x-2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ 3 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ 2,25 = (x+1)(6-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ 2,25 = 6x + 6 - x^2 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ x^2 - 5x - 3,75 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x - 3,75 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 4 \cdot 3,75 = 25 + 15 = 40$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2} \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$(т.к. 2\sqrt{10} > 0)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~В ответ~~ В отрезке есть еще точек не нужно.

$$\begin{cases} x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Вернемся к основному уравнению.

$$\begin{cases} x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \\ x \in [0; 6] \\ x = y \end{cases}$$

$$1) \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \geq 0 \Rightarrow 5 - 2\sqrt{10} \geq 0 \Leftrightarrow 5 \geq 2\sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 \geq 40 - \text{неверно} \Rightarrow x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} - \text{не подходит}$$

$$2) \frac{5 + \sqrt{13}}{2} > 0 - \text{окейно}$$

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \leq 6 \Rightarrow 5 + \sqrt{13} \leq 12 \Rightarrow \sqrt{13} \leq 7 -$$

— подходит.

В итоге подходит только точка $\left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)$

Ответ: $\left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)$



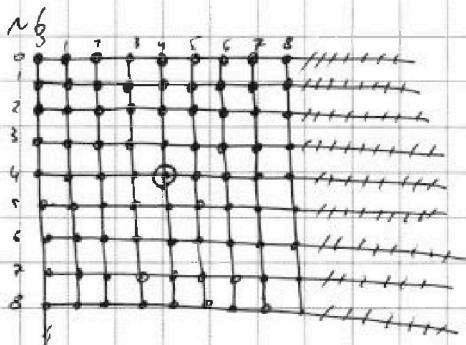
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пронумеруем горизонтальные и вертикальные линии линиями от 0 до 8, начиная с некоего выхваченного угла, как показано на рисунке.

Будем называть узел, находящийся на пересечении 4-й вертикальной и 4-й горизонтальной линий центральным. (он обведен в кружок на рисунке)

Заметим, что если мы покрасим 2 узла рядом, и они окажутся центральными относительно угловой точки, то это раскраска соотв. с рис. 1, раскраска, получающаяся поворотом на 90° и 270° градусов, если те точки не окажутся центральными относительно угла, то это раскраска соотв. с рис. 3, получающаяся поворотом на 90° , 180° , 270° градусов.

Получно, что я имею в виду ввиду под центр. симметричными точками.

$A(x_A; y_A)$ $B(x_B; y_B)$ ← координата x - номер соотв. вертик. координата y - номер соотв. horiz.

A и B - центр. или углов. узлы $\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x_A = x_B - 4 \\ 4 - y_A = y_B - 4 \end{cases}$
(это почти эквив. опред. центр. симметрии в этом.)

Теперь посчитаем кол-во раз центральных или угловых.



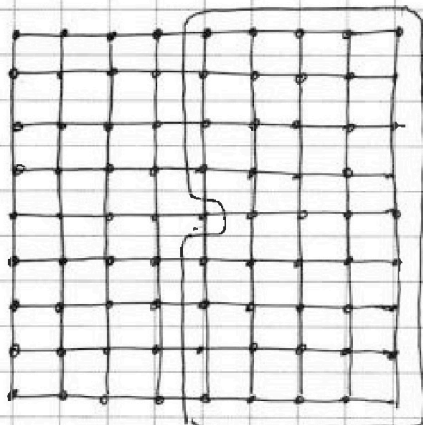
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что в любом угловом симметричном раскрое ровно 1 белый узел находится в выделенной области, а вторая однозначно белая узел однозначно задается первым (это видно из того, что угл. сим.)



В выделенной области.

$$5 \cdot 5 - 1 = 24 \text{ узла} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ всего угл. симметр.
 раскроев $C_{24}^1 = 24$

Всего пом. в раскрое равно $C_{81}^2 = C_{81}^2 = \frac{81 \cdot 80}{2!} =$
 $= 31 \cdot 40$

Тем-во не угл. симметричных раскроев:

$$31 \cdot 40 - 24 = 3240 - 24 = 3216$$

Еще учесть повороты, то $\frac{3216}{4} + \frac{24}{2} =$

$$= 799 + 12 = 811$$

$$\begin{array}{r} 3196 \quad | \quad 4 \\ \underline{28} \\ 39 \\ \underline{-36} \\ 36 \\ \underline{-36} \\ 0 \end{array}$$

с учетом поворотов одно угл. симметричное раскрое имеет 2 без поворотов, а не угл. симметр — 4 без поворот.

Ответ: 811.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Имеем:

$$\frac{x}{x+6} = \frac{x+24}{2(x+6)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x > 0 \\ 2x(x+6) = (x+6)^2 \end{matrix} (x+24) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x > 0 \\ 2x = x+24 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 24 \Leftrightarrow \overline{BZ} = 24$$

По условию $AX \parallel MY \Rightarrow \angle YMC = \angle AXC$ — как соот.

Рассмотрим $\triangle ACX$ и $\triangle CYM$:

$\begin{cases} \angle YMC = \angle AXC \\ \angle ACX = \angle YCM \end{cases} \Rightarrow \triangle ACX \sim \triangle CYM$ по двум углам.
 AC и CY — соотв. (лежат против равных углов)
 CX и CM — соотв. по той же причине

Тогда имеет место:

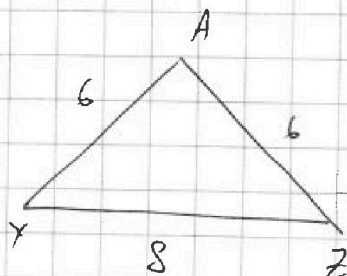
$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CY}} = \frac{\overline{CX}}{\overline{CM}} \quad \frac{\overline{CX}}{\overline{CM}} = \frac{\frac{\overline{CX}}{\overline{BC}}}{\frac{\overline{CM}}{\overline{BC}}} = \frac{\frac{18}{x+24}}{\frac{1}{2}} = \frac{36}{x+24} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

$\left(\frac{\overline{CM}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}, \text{ т.к. } M - \text{ср. } BC \right)$

Отсюда:

$$4\overline{CX} = 3\overline{CM} \quad 4\overline{CA} = 3\overline{CY} \Leftrightarrow 4\overline{CA} = 3\overline{CA} + 3\overline{AY} \Rightarrow \overline{CA} = 3\overline{AY} \Rightarrow 3\overline{AY} = 18 \Rightarrow \overline{AY} = 6$$

Рассмотрим $\triangle AZY$:



Найдём косинус угла $\angle YAZ$.
 По теореме косинусов:

$$\overline{YZ}^2 = \overline{AY}^2 + \overline{AZ}^2 - 2 \cdot \overline{AY} \cdot \overline{AZ} \cdot \cos(\angle YAZ)$$

$$6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos(\angle YAZ) = 8^2$$

$$72 - 72 \cos(\angle YAZ) = 64$$

$$8 = 72 \cos(\angle YAZ) \Leftrightarrow \cos(\angle YAZ) = \frac{1}{9}$$

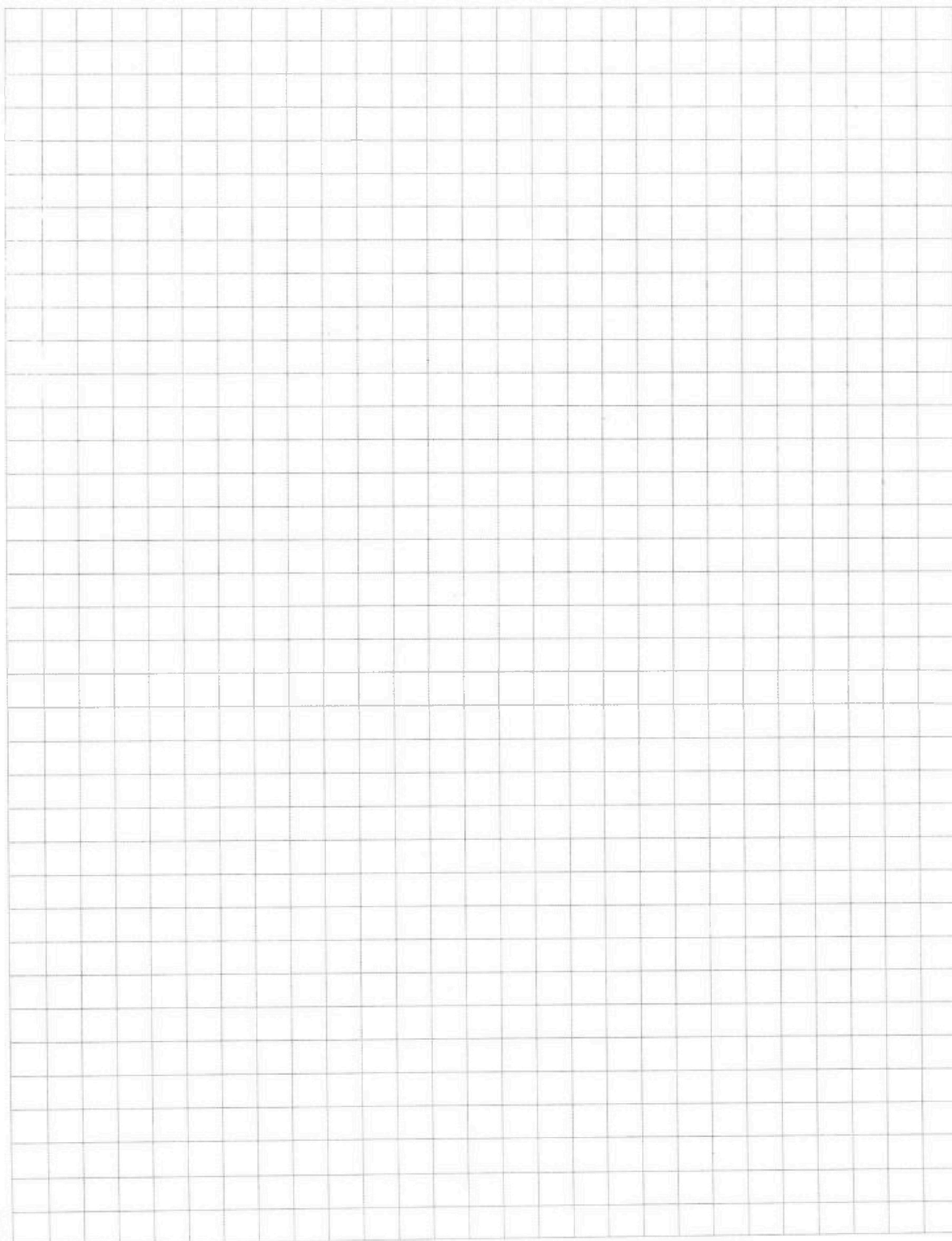


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$$O \Delta O_3: x, y \geq 0$$

$$f(x) = x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = x^4 + 5x^2 + x^{\frac{1}{2}}$$

Покажем, что $f(x)$ - мон. возр. на $x \geq 0$.

$$f'(x) = 4x^3 + 10x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \text{ легко видеть, что } > 0 \text{ при } x \geq 0.$$

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y}}{\sqrt{x+1} - x}$$

Вернемся к первой строке:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$x^2 - 5x - 6 \leq 0$$

$$(x-6)(x+1) \leq 0$$

$$x \in [-1; 6]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+3x-x^2}$$

$$x \in [-1; 6]$$

Зам. $x+1 = \alpha$
 $x-6 = \beta$
 $6-x = \gamma$

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + 5 = 2\sqrt{\alpha\beta}$$

Q03
 $x \in [-1; 6]$

$\alpha + \beta = 2$

$$(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + 5)^2 = 4\alpha\beta$$

$6+3x-x^2$ — максимум при $x = 2,5$

$$6 + 2,5^2 = 6 + 6,25 = 12,25$$

$$\sqrt{4 \cdot 12,25} = \sqrt{49} = 7$$

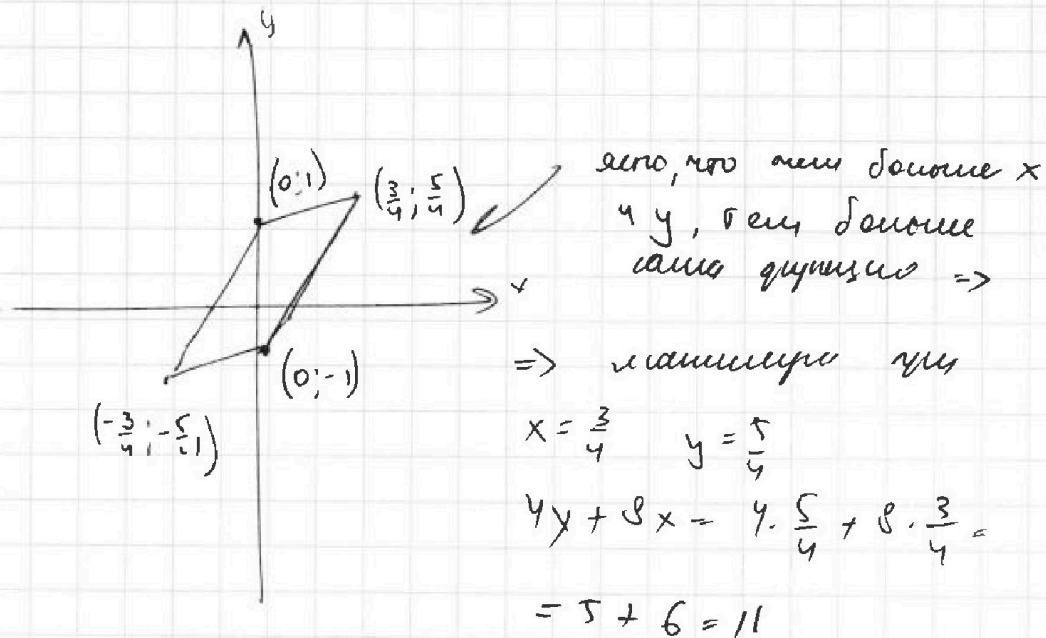
$$\alpha + \beta + 25 = 10\sqrt{\beta} + 10\sqrt{\alpha}$$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№ 3.
 $m, n \in \mathbb{N}$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) =$$

$$= (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

1) $A = 13p^2$

$B = 75q^2 =$

$= 5^3 \cdot 3 \cdot q^2$

$p, q \in \mathbb{P}$

$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$

$(m+n) = 13, 13p, 13p^2, p, p^2$

$m+n$	$m+n-9$
13	p^2 ✓
$13p$	p ✓
$13p^2$	1 ✓
p	$13p$

p^2	$13p$ ✓
-------	---------



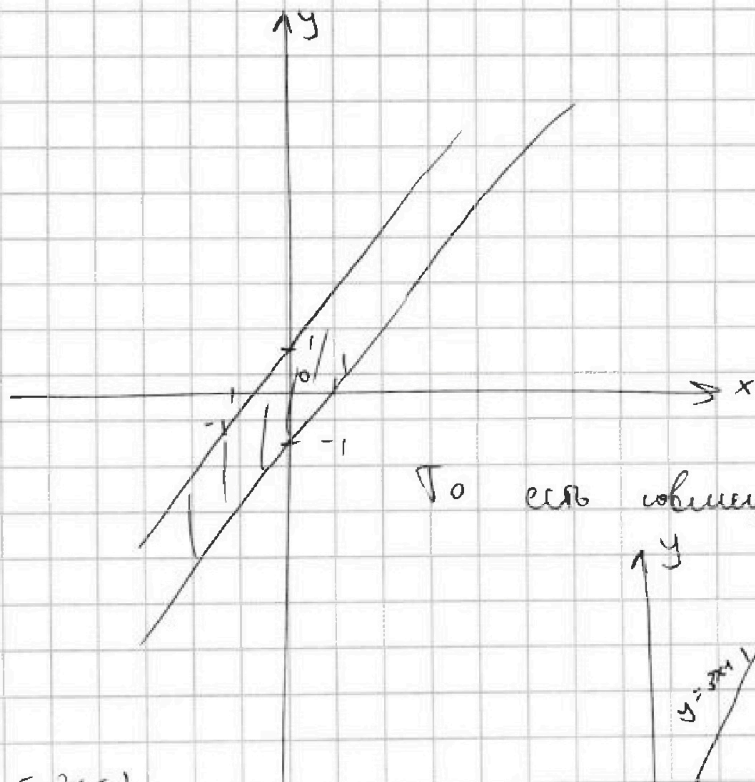
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|3x - y| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y \leq 1 \\ 3x - y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 3x - 1 \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$



То есть область

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$$

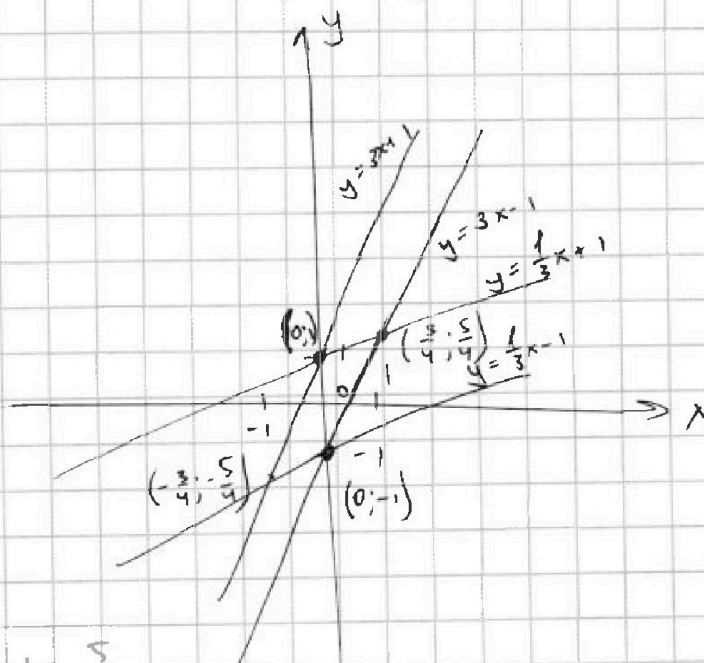
$$3x - 1 = \frac{1}{3}x + 1$$

$$\frac{8}{3}x = 2$$

$$\frac{4}{3}x = 1$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$





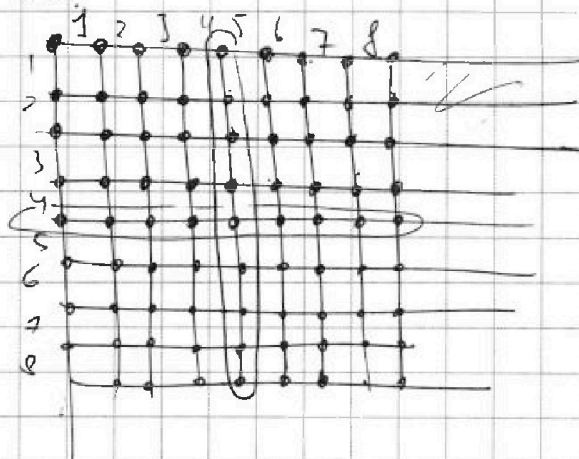
На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6



Выводим угловую
горизонталь и вертикаль.

1) Выводим угловую
линию.

Замечает, что если
угловая линия черная,
то раскрыва при лев

Замечает, что если раскрыва симметрично относительно
угловой линии, то мы даем двоичность. В противном
случае 4.

Всего раскрывов C_{81}^2 . Симметричных раскрывов:

$$C_{44}^1 \Rightarrow \frac{1}{4} (C_{81}^2 - C_{44}^1) + \frac{1}{2} \cdot C_{44}^1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} + \sqrt{6-x}$$

$$x+1 + 10\sqrt{x+1} + 25 = 4(6+5x-x^2) + 4(6-x)\sqrt{x+1} +$$

$$+ \sqrt{6-x} \quad \left| \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} \right.$$

$$(4x-24+10)\sqrt{x+1} = 24+20x-4x^2-2x-25$$

$$4x^2-20x-24 + x+1+25-6+x = (24-4x-10)\sqrt{x+1}$$

$$4x^2-18x+4 = (14-4x)\sqrt{x+1}$$

$$2x^2-9x+2 = (7-2x)\sqrt{x+1}$$

$$(2x^2-9x+2)^2 = (7-2x)^2(x+1)$$

$$4x(2x^2-9x+2)(2x^2-9x+2) = (4x^2-28x+49)(x+1)$$

$$4x^4 - 18x^3 + 4x^2 - 18x^3 + 81x^2 - 18x + 4x^2 - 18x + 4 =$$

$$= 4x^3 - 28x^2 + 49x + 4x^2 - 28x + 49$$

$$4x^4 - 36x^3 + 89x^2 - 36x + 4$$

$$t+t = 7-t^2$$

$$t^2+t-7=0$$

$$(t+7)(t-1)=0$$

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 = x+1+6-x-2\sqrt{(x+1)(6-x)} =$$

$$= 7 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$t = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$$

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 7-t^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.1) $m+n=13$

$$m+n-g=p^2=13-g-4$$

$$p=2$$

$$m+n=13$$

$$mn((m+n)-3) = mn(10) = 75q^2 \Rightarrow q=2$$

$$10mn = 75 \cdot 4$$

$$10mn = 300$$

$$mn = 30$$

$$m=3 \text{ и } n=10 \text{ и наоборот}$$

1.2) $m+n=13p$

$$m+n-g=p$$

$$g=12p \rightarrow \text{не годит.}$$

1.3) $m+n=13p^2$

$$m+n-g=1$$

$$m+n=10$$

$$13p^2=10 \rightarrow \text{не годит.}$$

1.4) $m+n=p^2$

$$m+n-g=13p$$

$$(m+n; m+n-g) = p \quad (p \neq 13)$$

"

$$(m+n; g) = p \Rightarrow g:p$$

$$p=3 \rightarrow \text{не годит.}$$

$$m+n$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad A = 75q^2 \quad B =$$

$$B = 13p^2$$

$$(m+n-3) = 13 \cdot p \cdot p$$

$$1) \quad m = 1$$

$$n(n-2) = 13p^2$$

$$1.1) \quad n = p^2 \quad n-2 = 13 \quad 1.2) \quad n = 13p \quad n-2 = p \quad x$$

$$1.3) \quad n = 13 \quad n-2 = p^2 \quad x \rightarrow \text{не подх.}$$

$$2) \quad n = 1 - \text{аналог}$$

$$3) \quad m = 13 \quad n = p \quad 13 + p - 3 = p - \text{нел.}$$

$$m + n - 3 = p$$

$$4) \quad m = p \quad n = 13 \quad \text{аналог}$$

$$5) \quad m = p \quad n = p \quad m + n - 3 = 13$$

$$2p - 3 = 13$$

$$2p = 16$$

$$p = 8 - \text{не пр.}$$

$$\text{Получили пары } (3; 10); (10; 3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1.

$$a_3 = 3x + 3$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$a_5 = a_3 + 2d$$

$$a_9 = a_3 + 6d$$

$$2d = t$$

d - разность прогрессии

$$3a_3 + 6d = 3(a_3 + 2d) = 2a_3 + a_9$$

$$2a_3 + a_9 = 3a_5$$

$$2(3x + 3) + 3x^2 = 3(x^2 + 2x)^2$$

$$6x + 6 + 3x^2 = 3(x^4 + 4x^3 + 4x^2)$$

$$6x + 6 + 3x^2 = 3x^4 + 12x^3 + 12x^2$$

$$2x + 2 + x^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x = -2: 16 - 32 + 12 + 4 - 2$$

$$2(x+1) + x^2 = (x^2 + 2x)^2$$

$$x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x)^2$$

$$t = x^2 + 2x$$

$$t + 2 = t^2$$

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t + 1) = 0$$

$$t = 2$$

$$t = -1$$

$$1) x^2 + 2x = 2$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 2^2 + 8 \sqrt{12}$$

2 значения

$$2) x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

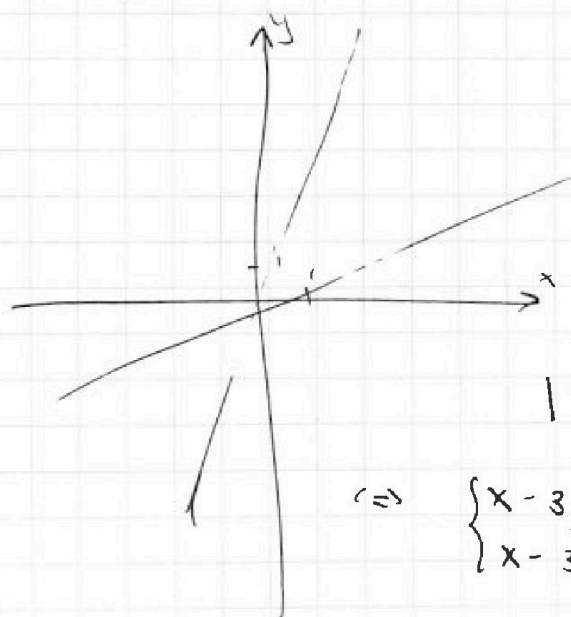
№ 2.

$$\max (4y + 8x) = ?$$

$$|x - 3y| \leq 3$$

$$|3x - y| \leq 1$$

$$1) \begin{cases} x - 3y \geq 0 \\ 3x - y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3y \\ 3x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x \geq y \\ 3x \geq y \end{cases} \quad y = \frac{1}{3}x$$

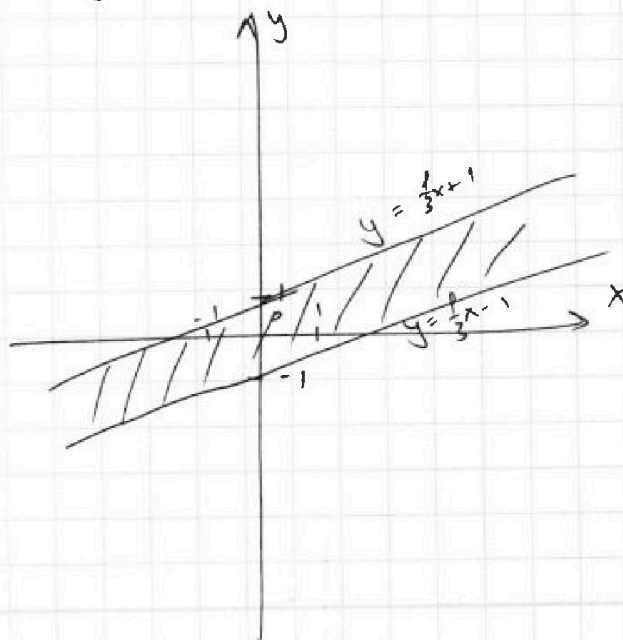


$$\begin{cases} x - 3y \leq 3 \\ 3x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$|x - 3y| \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y \leq 3 \\ x - 3y \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq x - 3 \\ 3y \leq x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{1}{3}x - 1 \\ y \leq \frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$$



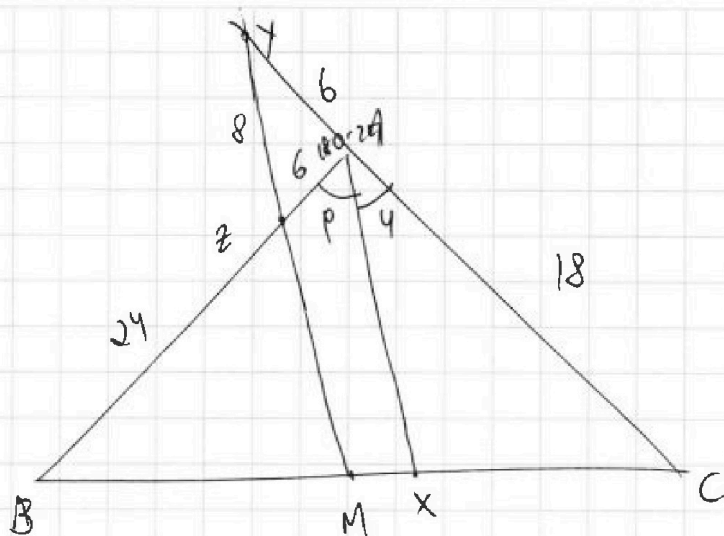


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{BX}{XC} = \frac{30}{18} = \neq \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{CX}{CB} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{CM}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CX}{CM} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{CA}{CX} = \frac{CX}{CM} = \frac{3}{4}$$

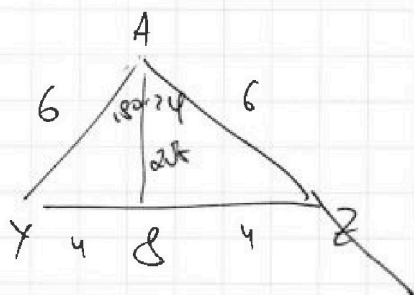
$$4CA = 3CX$$

$$4CA = 3(CA + 3AY)$$

$$CA = 3AY$$

$$CA = 3AY$$

$$AY = 6$$



$$\cos(180^\circ - 2\phi) =$$

$$\cos(90^\circ - \phi) =$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

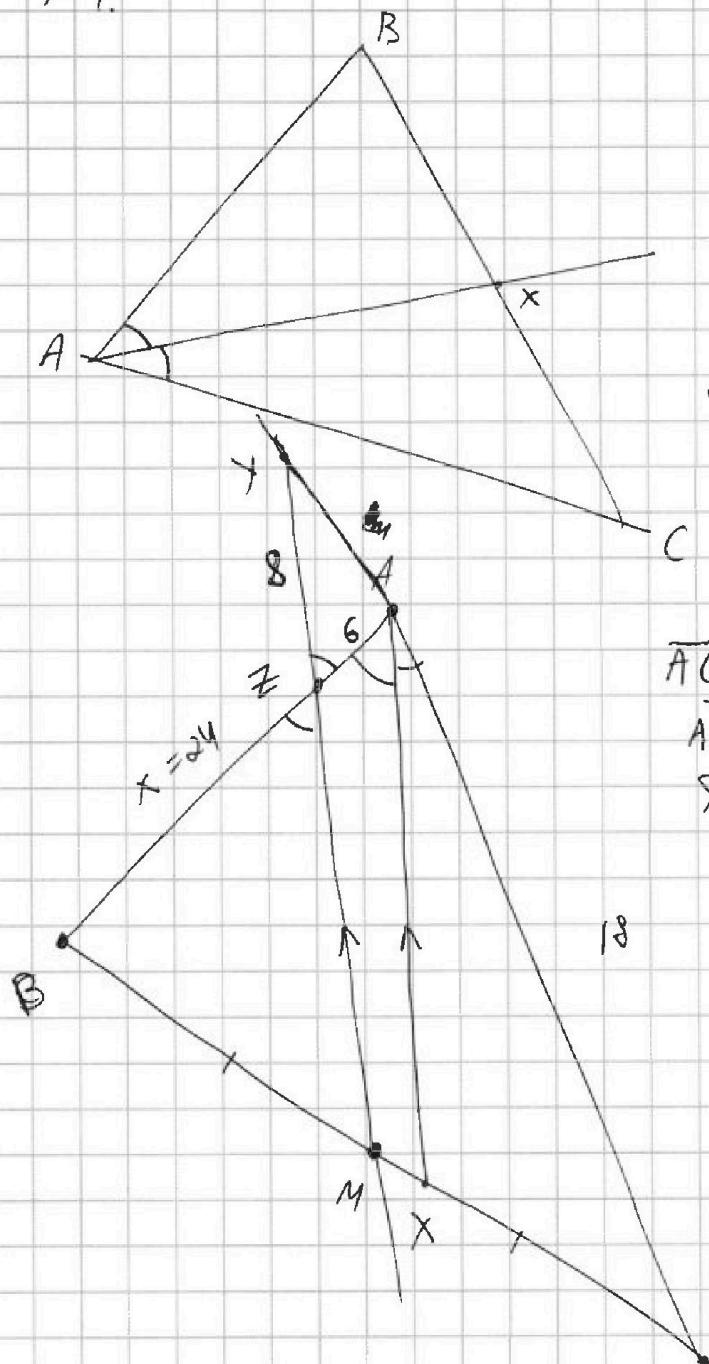
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4.



$$\frac{x}{x+6} = \frac{x+24}{2x+12}$$

$$2x(x+6) = (x+6)(x+24)$$

$$2x = x+24$$

$$x = 24$$

$$\overline{AC} = 18$$

$$\overline{AZ} = 6$$

$$\overline{ZC} = 8$$

$$\overline{BZ} = x$$

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{x+6}{18}$$

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{p}{2}$$

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{p}{2}$$

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{BC}} = \frac{x+6}{x+6+18} = \frac{x+6}{x+24}$$

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}} = \frac{p}{2} : \frac{x+6}{x+24} =$$

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{x+24}{x+6} = \frac{x+24}{2x+12}$$