



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AM и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

2. Дискриминант $\Rightarrow D > 0$

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot (4t^2 - 4) =$$

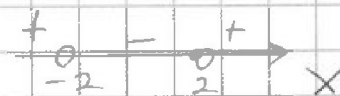
$$= 12t^2 - 16t^2 + 16 = \cancel{16t^2} - 4t^2 + 16$$

$$-4t^2 + 16 > 0, \quad | : (-4)$$

$$t^2 - 4 < 0$$

$$(t-2)(t+2) < 0$$

$$t \in (-2; 2)$$



$$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow \text{по т. Виета:}$$

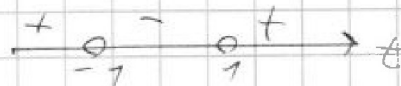
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4t^2 - 4}{1} = 4t^2 - 4,$$

$$4t^2 - 4 > 0 \quad | : 4$$

$$t^2 - 1 > 0$$

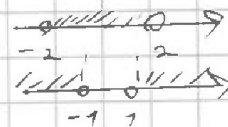
$$(t-1)(t+1) > 0$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$



Получаем

$$\begin{cases} t \in (-2; 2) \\ t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

$$\text{Ответ. } t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$n \geq 2$$

$$a + b = 40$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 14p^5$$

p - простое.

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a - b)^2 + 15(a - b) = (a - b)(a - b + 15)$$

$14p^5$ можно разложить по 2 множителям

$$14p^5 = 1 \cdot 14p^5$$

$$\text{Заметим } a = 40 - b \quad (-1) \cdot (-14p^5)$$

$$(40 - b - b)(40 - b)$$

$$(40 - b - b)(40 - b - b + 15) = (40 - 2b) \cdot (55 - 2b)$$

Заметим, что ~~одно~~ одно из чисел $(40 - 2b)$ и $(55 - 2b)$ всегда будет четным $\Rightarrow$ их произведение тоже четное. (Точно же можно вывести 2-ю скобку)

$\Rightarrow 14p^5$ тоже четное. Единственное простое p , при котором это возможно, это $p = 2$.

Значит,

$$(40 - 2b) \cdot (55 - 2b) = 14 \cdot 2^5 = 14 \cdot 32$$

$$2(20 - b) \cdot (55 - 2b) = 14 \cdot 32$$

$$(20 - b)(55 - 2b) = 14 \cdot 16$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 16 \\ \hline 102 \\ 140 \\ \hline 224 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten calculations on grid paper:

$$1100 - 40b - 55b + 2b^2 - 242 = 0$$
$$2b^2 - 95b + 828 = 0$$
$$D = 95^2 - 4 \cdot 2 \cdot 828 = 49^2$$
$$b_1 = \frac{95 - 49}{2} = \frac{46}{2} = 23$$
$$b_2 = \frac{95 + 49}{2} = 36$$

Применение теоремы:

$$1100 - 40b - 55b + 2b^2 - 242 = 0$$
$$2b^2 - 95b + 828 = 0$$
$$D = 95^2 - 4 \cdot 2 \cdot 828 = 49^2$$
$$b_1 = \frac{95 - 49}{2} = \frac{46}{2} = 23$$
$$b_2 = \frac{95 + 49}{2} = 36$$
$$\Rightarrow \begin{cases} b = 36 \\ a = 40 - b = 40 - 36 = 4 \end{cases}$$

Ответ. $a = 4$
 $b = 36$

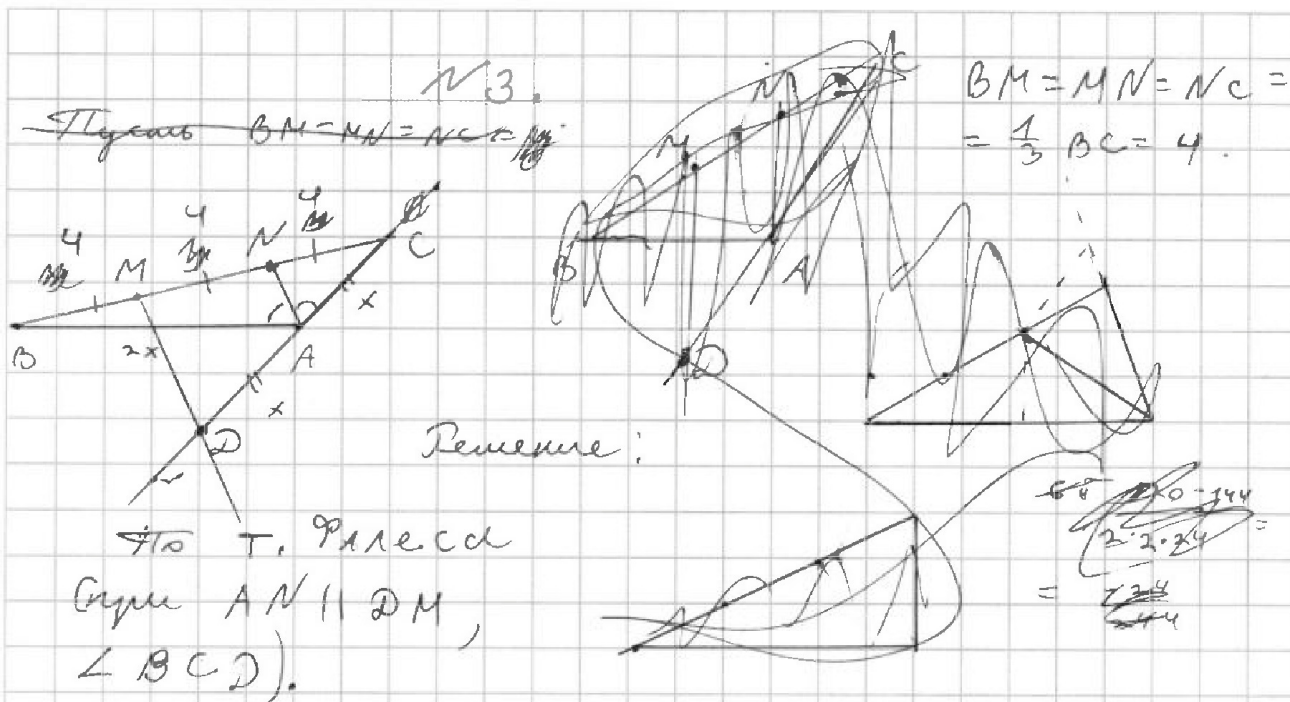


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$CA = AD = x \Rightarrow AB = CD = CA + AD = 2x \quad (\text{по ус.})$$

~~В~~ В $\triangle ABC$ AN делит сторону BC на отрезки, пропорциональные сторонам AB и AC

$$\left(\frac{AN}{AB} = \frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC} \right) \Rightarrow AN - \text{биссектриса } \angle BAC$$

$$\Rightarrow \angle BAC = 2\angle CAN,$$

$$\Rightarrow (\text{по ус.}) \cos \angle BAC = -\frac{1}{4}.$$

Заметим. $\angle \cos$ в $\triangle BAC$.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC,$$

$$144 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{4}\right),$$

$$144 = 5x^2 + x^2, \quad 144 = 6x^2 \quad x^2 = 24$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow AB = 2x = 4\sqrt{6}$$

Ответ. $AB = 4\sqrt{6}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.ч. к.

$ABC D$ - впис.

$$\angle BCD = 180^\circ -$$

$$= \angle BAD,$$

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle CDA \quad \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC$$

$$\Rightarrow \angle ECD = 180^\circ - \angle BCD = \angle BAD,$$

$$\angle CDE = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABC.$$

$$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle CDE$$

$$\gamma = 360 - 180 + \beta - \alpha - 90 =$$

$$= 90 + \beta - \alpha$$

пусть

$$BE = KX,$$

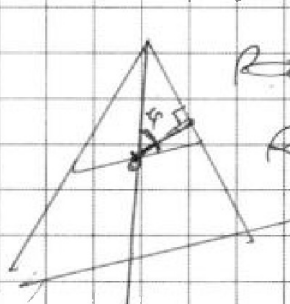
$$CE = X$$

$$AE = KY$$

$$DE = Y$$

в $\triangle ABE$

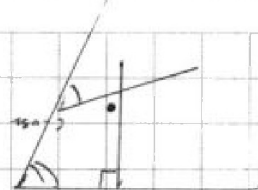
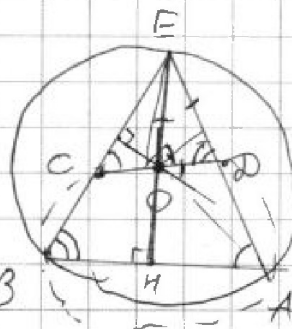
$$\frac{KX}{\sin \alpha} = \frac{KY}{\sin \beta} = 2R$$



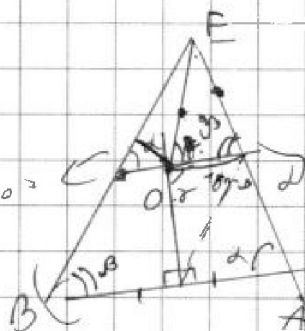
$$R = \frac{KY}{2 \sin \beta}$$

в $\triangle OED$:

$$\frac{R}{\sin \beta} = \frac{Y}{\sin \angle OED} = \frac{OD}{\sin \angle OED}$$



$$360 - (180 + \gamma + 90) = 90 + \beta - \alpha$$





1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Когда-то деревья с одной вершиной, выходящей из нее, дажно соединены эти деревья с деревьями с 3, 4, 5 или 4 деревьями. Если "одинокая" деревья соединена с другой "одинокой", то эти две деревья не могут быть больше ни к чему прикреплены (соединены), иначе их степень (число выходящих из них) будет > 1 .

Значит, все "одинокие" соединены с какой-то не "одинокой" деревьями. Значит, число "одиноких" деревьев — это количество всех верш минус число верш между не "одинокими" деревьями.

Итак:

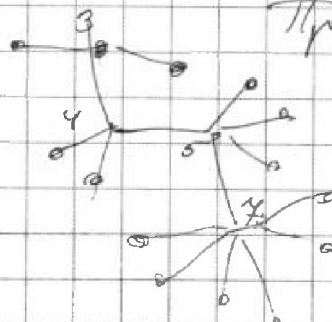
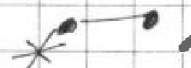
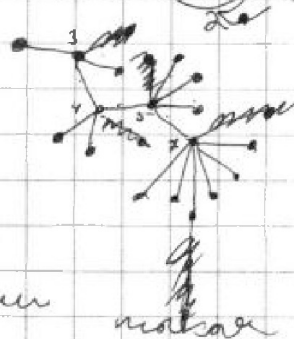
Число "одиноких" =

= $N_{\text{верш}} - N_{\text{верш}}$,

где $N_{\text{верш}}$ — всего верш,

$N_{\text{верш}}$ — всего верш между не "одинокими"

$$3 + 4 + 5 + 4 = 19$$



Пример:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

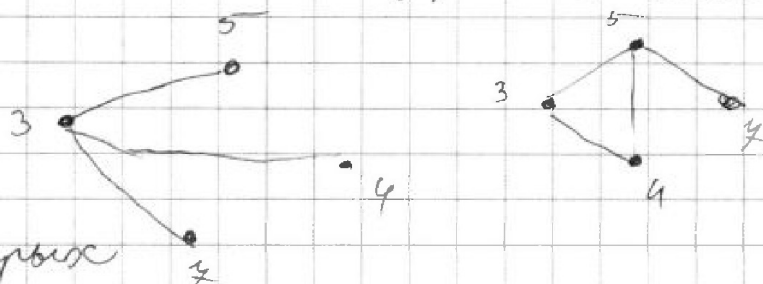
СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \text{Итак } N_{\text{дерев}} - N_{\text{дерев}} = \\
 & = (3 + 4 + 5 + 4) - 2 \cdot N_{\text{дерев}} = \quad \left(\begin{array}{l} \text{т.к. каждая} \\ \text{деревяшка между} \\ \text{не "единичными"} \\ \text{убирает "единицы"} \\ \text{двойные} \end{array} \right) \\
 & = N_{\text{единичных}}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим
значение $N_{\text{дерев}}$.

Оно может быть ~~каким-то~~ только
3 (т.к. не "единичные" обязательно соединены)
до (и если таких деревьев больше 3,



то из
некоторых

деревьев до других будет несколько пере-
рутов.

$\Rightarrow$ $N_{\text{единичных}}$ всегда будет

$$(3 + 4 + 5 + 4) - 2 \cdot 3 = 13.$$

$$\text{Всего деревьев } 13 + 1 = 14.$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим все случаи:

a) $x+y=1$

$x=1-y$

$$\sqrt{1 \cdot (2-1) + 2 \cdot (1-y) \cdot y} + \sqrt{1 - |1-2|} = 1$$

$$\sqrt{1+2y-2y^2} + 0 = 1$$

$$1+2y-2y^2=1$$

$$y^2-y=0$$

$$\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=1 \\ y=1 \Rightarrow x=0 \end{array} \quad \text{или}$$

b) $x+y=2$

$x=2-y$

$$\sqrt{2 \cdot (2-2) + 2 \cdot (2-y) \cdot y} + \sqrt{1 - |2-2|} = 1$$

$$\sqrt{2 \cdot (2-y) \cdot y} + 1 = 1$$

$$y(2-y)=0$$

$$\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=2 \\ y=2 \Rightarrow x=0 \end{array} \quad \text{или}$$

в) $x+y=3$

$$\sqrt{3 \cdot (2-3) + 2 \cdot (3-y) \cdot y} + \sqrt{1 - |3-2|} = 1$$

$$\sqrt{-3+6y-2y^2} = 1$$

$$-2y^2+6y-3-1=0$$

$$y^2-3y-2=0$$

$$\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=2 \\ y=2 \Rightarrow x=1 \end{array} \quad \text{или}$$

В итоге:

Ответ. $(1; 0), (0; 1), (2; 0), (0; 2),$
 $(2; 1), (1; 2).$

это все пары $(x; y)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-(x+y-2)} = 1$$

$$-\alpha(2+\alpha) + (1-\alpha) = (\alpha(2+\alpha) + 1 - \alpha)$$

$$\neq -\alpha(2+\alpha) + (1-\alpha) = (\alpha(2+\alpha) + 1 - \alpha)$$

Итак.

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-(x+y-2)} = 1$$

Уравнение было возведено

$$1-(x+y-2) \geq 0$$

$$|x+y-2| \leq 1 \quad |^2$$

$$(x+y-2)^2 \leq 1$$

$$(x+y-2)^2 - 1^2 \leq 0$$

$$(x+y-3)(x+y-1) \leq 0$$



$$x+y \in [1; 3]$$

т.к. $x, y \in \mathbb{Z}$, то $x+y \in \mathbb{Z}$,

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ x+y = 2 \\ x+y = 3 \end{cases}$$

Заметим, что

$$2x+2y-x^2-y^2 = 2(x+y) - (x+y)^2 + 2xy = (x+y)(2-(x+y)) + 2xy.$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+2y-x^2-y^2} = \sqrt{(x+y)(2-(x+y)) + 2xy}.$$

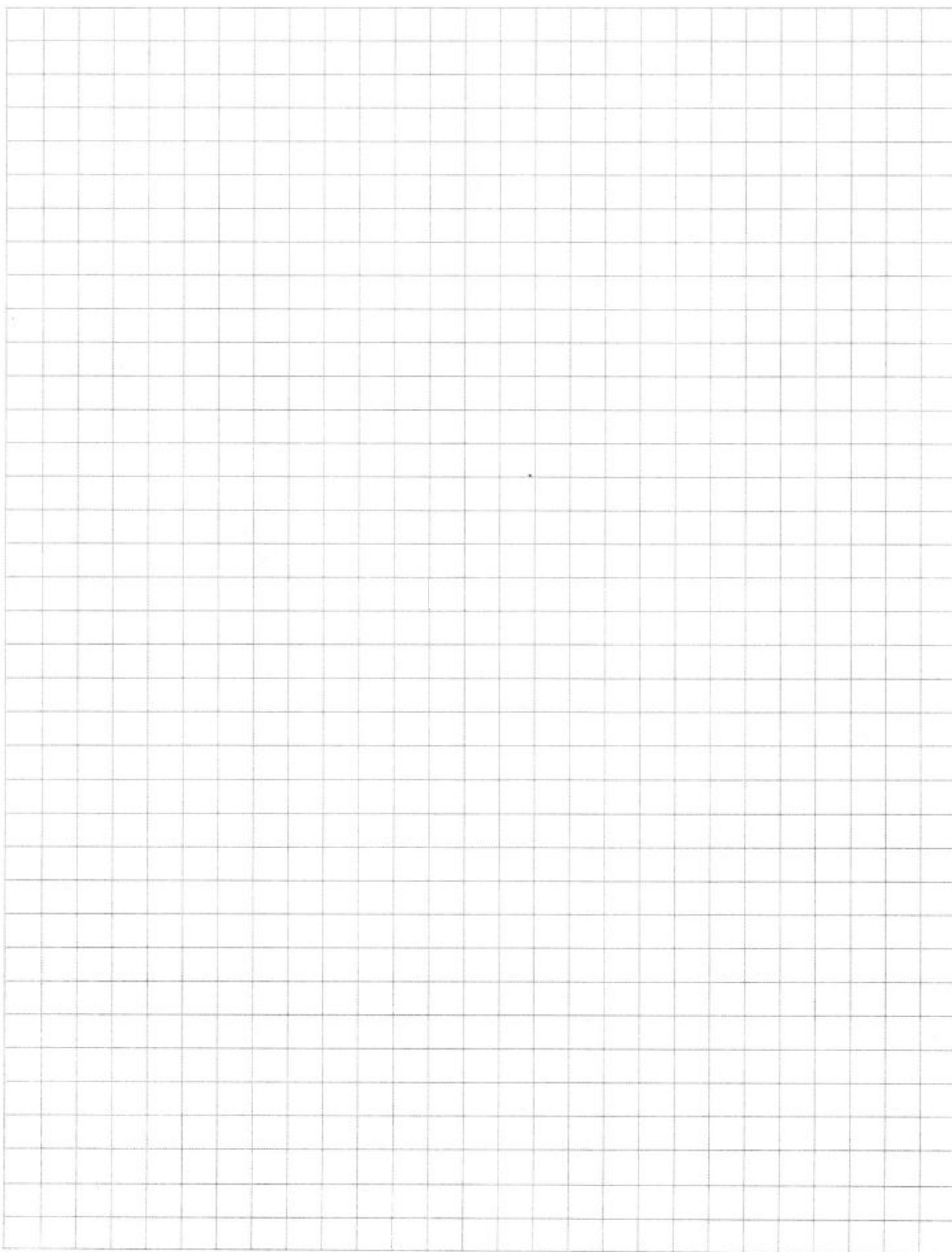


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle CAB = \sim 3.$
 $= 2 \angle CAN$
 $\Rightarrow \cos 2 \angle CAB = -\frac{1}{4}$
 $BC = 12$
 $\cos (2 \angle CAN) = -\frac{1}{4}$
 $\cos CAB = \frac{11^2 + 5^2 - 12^2}{2 \cdot 11 \cdot 5} = -\frac{1}{4}$
 $AB = CD = AC + AD =$
 2
 $BC^2 = 12^2 = x^2 + 4x^2 - 2x^2 \cdot \cos \angle CAB$
 $144 = x^2 (5 - 2 \cos \angle CAB) - 144 = 0$
 $x^2 (5 + 2 \cdot \frac{1}{4}) = 144 = 0$
 $\frac{11}{2} x^2 - 144 = 0$
 $(\sqrt{\frac{11}{2}} x - \frac{12}{\sqrt{11}})(\sqrt{\frac{11}{2}} x + \frac{12}{\sqrt{11}}) = 0$
 $x = \frac{12}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{2}$
 $AB = 2x = \frac{2 \cdot 12 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{2 \cdot 12 \cdot \sqrt{22}}{11}$
 $\frac{l^2 + x^2 - 16}{2 \cdot l \cdot x} = \frac{l^2 + 4x^2 - 64}{2 \cdot 2x \cdot l}$
 $\frac{l^2 + x^2 - 16}{2xl} = \frac{l^2 + 4x^2 - 64}{4xl}$
 $l^2 + 4x^2 - 64 = 2l^2 + 2x^2 - 32$
 $l^2 - 2x + 32 = 0$

$121 + 25 = 146$
 $l^2 + x^2 - 48 = \frac{l^2 + 4x^2 - 64}{2 \cdot l \cdot x}$
 $5x^2 - 2x^2 \cdot (-\frac{1}{4}) = x^2 (5 + \frac{1}{2})$
 $\frac{11}{2} x^2 = 144$
 $\frac{120}{11} \cdot \frac{11}{2} = 60$
 $\frac{12}{11} \cdot \frac{11}{2} = 6$
 $\frac{12}{11} \cdot \frac{11}{2} = 6$
 $\frac{12}{11} \cdot \frac{11}{2} = 6$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-x^2 - y^2 + 2x + 2y = -(x+y)^2 + 2x + 2y + 2xy =$$

$$-(x+y)^2 + 2(x+y - xy)$$

$$a = x+y$$

$$b = xy$$

$$(x+y)(2-x-y) + 2xy$$

$$2 - 2 - 2(xy + 2)$$

$$a = x+y-2 \quad b = xy$$

$$1 - |x+y-2|$$

$$|x+y-2| \leq 1$$

$$\sqrt{2a+2b-a^2} + \sqrt{1-|a-2|} = 1$$

$$\sqrt{2a+2b-a^2}$$

$$1. \quad a(2-a) + 2b$$

$$x = 1-y$$

$$\sqrt{1+2y-y^2} + \sqrt{0} = 1$$



$$-y^2 + y + 1 + 1 = 0$$

$$x+y \in (1; 3)$$

$$2y^2 - 2y = 0$$

$$y=0 \quad x=1$$

$$y=1 \quad x=0$$

$$x+y = 1$$

$$2. \quad \sqrt{0+2y-y^2} + \sqrt{1} = 1 \quad x = 2-y$$

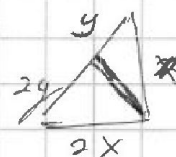
$$2y^2 - 2y = 0$$

$$y=0$$

$$y=2$$

$$y=0 \quad x=2$$

$$y=2 \quad x=0$$



$$3. \quad \sqrt{-1+3y-y^2} + \sqrt{0} = 1 \quad x = 3-y$$

$$y^2 - 3y = 0$$

$$y=0 \quad x=3$$

$$y=3 \quad x=0$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha$$

$$= (x-y)^2 + (x+y)^2 = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 + 2xy + y^2) = 2x^2 + 2y^2$$