



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

- он сидит на первой парте в ряду,
- ближайшая парта перед ним пуста,
- за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

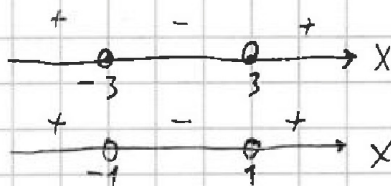
$$x^2 + 4\sqrt{t}x + 9t^2 - 9 = 0$$

два различных действительных корня $\Rightarrow D > 0$

По м. Виета $x_1 x_2 = 9t^2 - 9 > 0$

$$\begin{cases} D = 32t^2 - 4(9t^2 - 9) = 36 - 4t^2 = 4(3-t)(3+t) > 0 \\ 9(t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t+3)(t-3) < 0 \\ (t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$



$$t \in (-3; 3) \cap ((-\infty; -1) \cup (1; +\infty)) = (-3; -1) \cup (1; 3)$$

Ответ: $(-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3) = 19 p^4$$

$$a - b = 12, a = 12 + b, a + b = 2b + 12$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19p^4, (2b+12):2 \Rightarrow 19p^4:2 \Rightarrow p=2$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19 \cdot 16$$

$$2b+15 \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} 2b+15=1 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}, \text{ противоречие условию} \\ 2b+15=19 \Rightarrow b=2, 2b+12=16 \\ 2 \cdot 2 + 12 = 16 \\ 16 = 16 \end{cases}$$

$$a = 12 + b = 12 + 2 = 14$$

Ответ: 14; 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

11 учеников садятся за 12 парт, есть 12 способов выбрать пустую парту.

После выбора пустой парты мы выбираем для каждого ряда столько учеников, сколько заданных парт должно быть (порядок ~~выбора~~^{обхода} рядов не важен), т.к. Если мы выбрали для ряда учеников, то распределить места они могут единственным образом (по порядку).

$$12 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 12 \cdot \frac{11!}{3! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2!} =$$
$$= 12 \cdot \frac{11!}{(3!)^3 \cdot 2!} = 12 \cdot \frac{11!}{6^3 \cdot 2} = \frac{11!}{36}$$

Ответ: $\frac{11!}{36}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

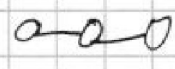
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

Докажем, что между четырьмя деревьями, из которых
выходит 5, 6, 4, 9 дорог есть 3 дороги

- 1) Деревья, из которых выходит по одной дороге не соединены
парными (другими такими деревьями (иначе в паре из таких
деревьев с дорогой между ними не было бы дорог)).
- 2) Четыре дерева (5, 6, 4, 9 дорогами (назовём их центральными для
краткости) соединены между собой дорогами, а другие деревья
(одной дорогой) к ним не выходят, иначе граничат с ними.
Почти существуют 3 центральные деревья, соединённые
„цепочкой“, т.е. маршрут между деревьями един- 
ственен, а значит граф, в котором деревья - вершины, а рёбра - дороги
не имеет циклов. Четвёртое центральное дерево можно соеди-
нить (этим путём ещё одной дорогой, но если оставить больше,
образуются циклы. Дороги, которые ведут к деревьям (1 дорогой
~~забирают~~ относятся к центральным деревьям одним концом,
а ещё 3 дорог - другим. Итого всего деревьев

$$4 + (5 + 6 + 4 + 9) - 2 \cdot 3 = 25$$

Ответ: 25



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = \sqrt{-x^2+2x-1-y^2-2y-1+2} = \sqrt{2-(x-1)^2-(y+1)^2}$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \quad (x-1)^2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2, \quad (y+1)^2 \leq 2 \Rightarrow -2 \leq y \leq 0$$

Переберём 9 случаев

$$1. \quad x=0, y=-2: \sqrt{2-1-1} + \sqrt{1-10+2-1} = 0 \neq 2$$

$$2. \quad x=0, y=-1: \sqrt{2-1-0} + \sqrt{1-10+1-1} = 2 - (0; -1) \text{ является решением}$$

$$3. \quad x=0, y=0: \sqrt{2-1-1} + \sqrt{1-10+0-1} = 0 \neq 2$$

$$4. \quad x=1, y=-2: \sqrt{2-0-1} + \sqrt{1-11+2-1} = \sqrt{-1}, \text{ не имеет смысла}$$

$$5. \quad x=1, y=-1: \sqrt{2-0-0} + \sqrt{1-11+1-1} = \sqrt{2} \neq 2$$

$$6. \quad x=1, y=0: \sqrt{2-0-1} + \sqrt{1-11+0-1} = 2 - (1; 0) \text{ - реш}$$

$$7. \quad x=2, y=-2: \sqrt{2-1-1} + \sqrt{1-12+2-1} = \text{не имеет смысла}$$

$$8. \quad x=2, y=-1: \sqrt{2-1-0} + \sqrt{1-12+1-1} = \text{не имеет смысла}$$

$$9. \quad x=2, y=0: \sqrt{2-1-1} + \sqrt{1-12+0-1} = 0$$

Ответ: $(0; -1), (1; 0)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

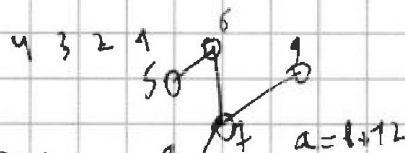
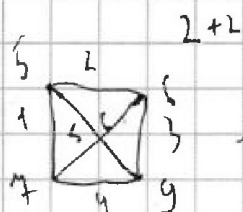
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2-(x-1)^2-(y+1)^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2 \quad a+b=12+20=2(10+8)$$

$$0 \leq x \leq 2$$
$$-2 \leq y \leq 0$$



$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$C_{11}^0 = \frac{11!}{0! \cdot 11!} = 1$$
$$C_{11}^1 = \frac{11!}{1! \cdot 10!} = 11$$
$$C_{11}^2 = \frac{11!}{2! \cdot 9!} = 55$$
$$C_{11}^3 = \frac{11!}{3! \cdot 8!} = 165$$
$$C_{11}^4 = \frac{11!}{4! \cdot 7!} = 330$$
$$C_{11}^5 = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = 462$$
$$C_{11}^6 = \frac{11!}{6! \cdot 5!} = 462$$
$$C_{11}^7 = \frac{11!}{7! \cdot 4!} = 330$$
$$C_{11}^8 = \frac{11!}{8! \cdot 3!} = 165$$
$$C_{11}^9 = \frac{11!}{9! \cdot 2!} = 55$$
$$C_{11}^{10} = \frac{11!}{10! \cdot 1!} = 11$$
$$C_{11}^{11} = \frac{11!}{11! \cdot 0!} = 1$$

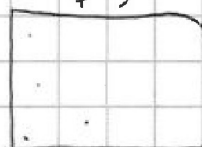
$$5+6+7+9=27$$

$$5-6 \quad 5 \ 6 \quad 5 \ 6 \quad 5 \ 6 \quad 5 \ 6 \quad 5 \ 6$$

$$7 \ 9 \quad 7 \ 9 \quad 7 \ 9 \quad 7 \ 9 \quad 7 \ 9 \quad 7 \ 9$$

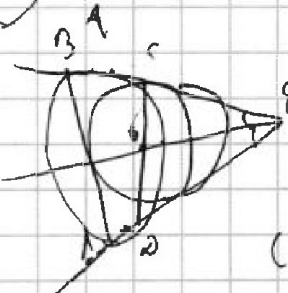
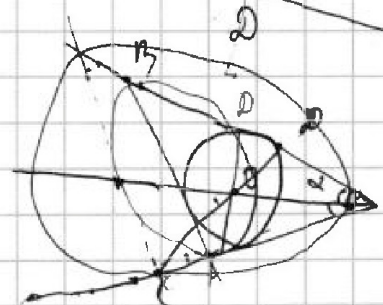
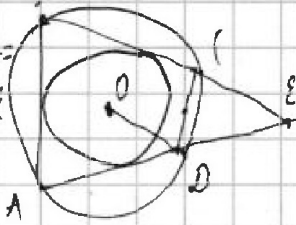
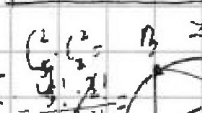
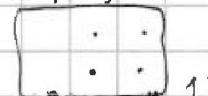
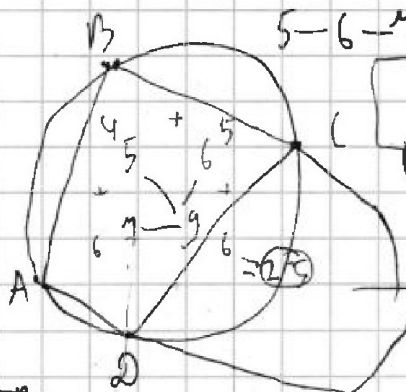
$$6! = 720$$

$$5-6-7-9$$



$$4(8^2 + 12 \cdot 8 + 36)$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8}{2 \cdot 2} = 30 \cdot 6$$



$$\frac{CO}{OD} = \frac{CE}{DE}$$

$$48^2 + 548 +$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$(28+12)(28+15) = 19p^4 : 2 \Rightarrow p=2$$

$$12(C_{11}^3 + C_{11}^8 + C_{11}^3)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

