



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{t}x + 9t^2 - 9 = 0$$

D — дискриминант.

$$D > 0$$

$$D = 16t^2 - 36t^2 + 36 > 0$$

$$36 > 4t^2$$

$$t^2 < 9$$

$$t \in (-3; 3)$$

По т. Виета:

x_1, x_2 — корни

$$x_1 \cdot x_2 = 9t^2 - 9 > 0$$

$$t^2 > 1$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$t \in (-3; 3) \cap ((-\infty; -1) \cup (1; +\infty))$$

$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

$$\text{Ответ. } t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b = 12$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) =$$

$$= (a+b)(a+b+3)$$

$$a - b = 12$$

$$a - b \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$$a \equiv b$$

$$a - b = 12, \Rightarrow a \text{ и } b \text{ четные оба или оба нечетные}$$

т.к. если они разной четности, то их разность будет нечет., 12 - чет.

$$a \text{ и } b \text{ одной чет., } \Rightarrow a+b - \text{чет.}$$

$$\underset{12}{(a+b)} \underset{12}{(a+b+3)} = 19p^4$$

$$19p^4 : 2$$

$$p^4 : 2, \Rightarrow p = 2, \text{ т.к. } p - \text{чет. и простое.}$$

$$a+b+3 - \text{нечет., т.к. чет. + нечет. = нечет., } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b+3 \not\equiv p^4, \Rightarrow a+b \not\equiv p^4$$

$$\text{если } a+b : 19, \text{ то } a+b : 19 \cdot p^4, \text{ т.к. } 2 \nmid 19 \text{ и } 2 \nmid 19 \text{ простые}$$

$$a+b \geq 2, \text{ т.к. } a, b \in \mathbb{N}, \Rightarrow a+b \geq 19 \cdot p^4 = 19 \cdot 16$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b+3 > a+b \geq 19 \cdot 16$$

$$(a+b)(a+b+3) > 19 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 16 = 19 \cdot 16, \Rightarrow !!! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b \leq 16 \text{ и } a+b \neq 19, \Rightarrow a+b+3 \leq 19$$

$$a+b \geq \frac{2}{2}, \Rightarrow a+b \geq 16$$

$$a+b+3 \geq 19$$

$$19 \cdot 16 = (a+b)(a+b+3) \geq 19 \cdot 16, \Rightarrow \begin{aligned} a+b &= 16 \\ a+b+3 &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a+b=16 \\ a-b=12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2a = 16 + 12$$

$$\begin{cases} a=14 \\ b=2 \end{cases}$$

$$14+2+3=19.$$

Ответ. $a=14, b=2$.



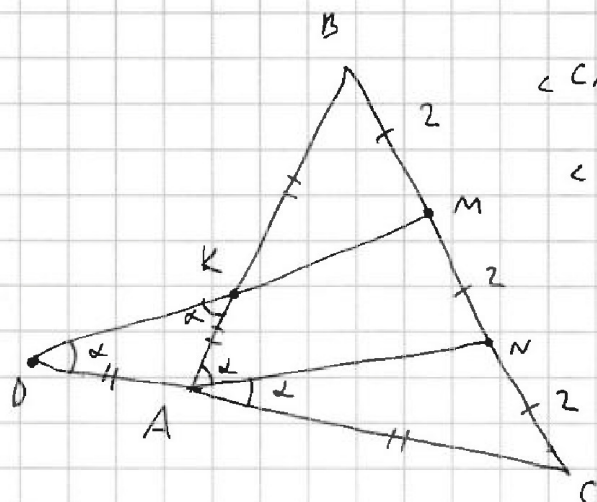
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle CAN = 2$$

$$\angle CAN = \angle CDM, \text{ т.к. } AN \parallel MD, \text{ соотв. } \angle$$

$$MK \parallel AN \text{ и т.к. } M - \text{сер. см. } BN, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ ~~не~~ } MK - \text{сред. лин. в } \triangle ABN, \Rightarrow AK = KB, \text{ т.к.}$$

$$AN \parallel MD \text{ и т.к. } N - \text{сер. см. } MC, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ т.к. } A - \text{сер. см. } CD, \text{ т.к. } AN - \text{сред. лин. в } \triangle CDM.$$

$$CD = AB, \Rightarrow AK = KB = AC = AD = \frac{1}{2} AB.$$

$$\triangle ADK - \text{равнобедр.}, \Rightarrow \angle ADK = \angle AKD$$

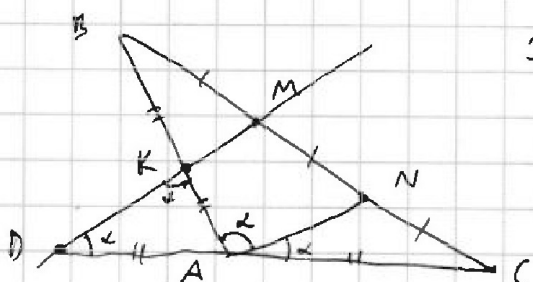
$$\angle AKD = \angle KAN, \text{ т.к. } \text{накрест. лежащие } \angle \text{ при пересечении пр.}$$

MD и AN и секущей AK .

$$\angle KAN = \angle CAN = \alpha$$

$$\angle CAB = 2\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = -\frac{3}{4}, \Rightarrow 2\alpha > 90^\circ, \Rightarrow \angle CAB - \text{тупой.}$$



По т. косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 2\alpha$$

$$6^2 = AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - 2 \cdot AB \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

$$\text{т.к. } 6^2 = AB^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right), \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

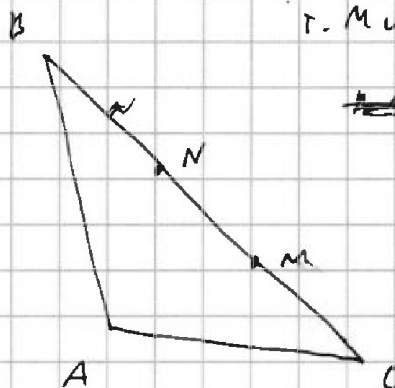
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



г. М и N — середины. Макс, г.к. искомое!

~~BN = MC~~ $BN = MN = MC$

$BM > MN, \Rightarrow !!!$

Ответ. $AB = 3\sqrt{2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0

Если рассадить 11 улиток, то останется 1 свободное место.

Пусть мы выбрали 3 улитки, кол-во способов рассадить их в 1 ряд ≈ 1 , т.к. свободных мест в 1 ряду не будет, $\Rightarrow$ они будут хорошо видны, если перед ними сидит 1 улитка меньшего роста, но упорядочить их по росту можно единственным ~~способом~~ способом.

Кол-во способов выбрать ряд, в котором сидят ~~2 улитки~~ ^{-4.} 2 улитки $\rightarrow 4$ способа.

Кол-во способов выбрать 2 улитки из 11:

$$C_{11}^2.$$

Кол-во способов ~~по~~ рассадить:

$$a < b: \quad \begin{array}{cccc} a & b & b & 0 & a \\ & 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & a & b & \end{array} \quad - 4.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Кол-во способов выбрать из ~~оставшихся~~ ^{оставшихся} 9

т.е. 3 и рассадить их в один ряд:

$$C_9^3 \cdot 1$$

Кол-во способов ^{выбрать} ~~выбрать~~ из 6 по 3: и

$$C_6^3$$

~~Кол-во~~ Кол-во способов рассадить оставшихся 3:

$$1$$

Всего способов ^{рассадить} ~~рассадить~~:

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot 1$$

$$\text{Ответ. } 4^2 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Данный граф, верши - деревья, ~~ребра~~ ребра - дороги.
и связный граф.

единственный маршрут из любой деревни, до любой, $\Rightarrow$ без циклов.

связный граф без циклов - дерево.

в дереве на n вершинах ~~ребра~~ равно $n-1$ ребра.

кол-во ребер $= \frac{5+6+7+9+n-4}{2} = n-1$, т.к.

сумма степеней всех вершин $= 5+6+7+9+(n-4) \cdot 1$, т.к.
 $n-4$ верш.

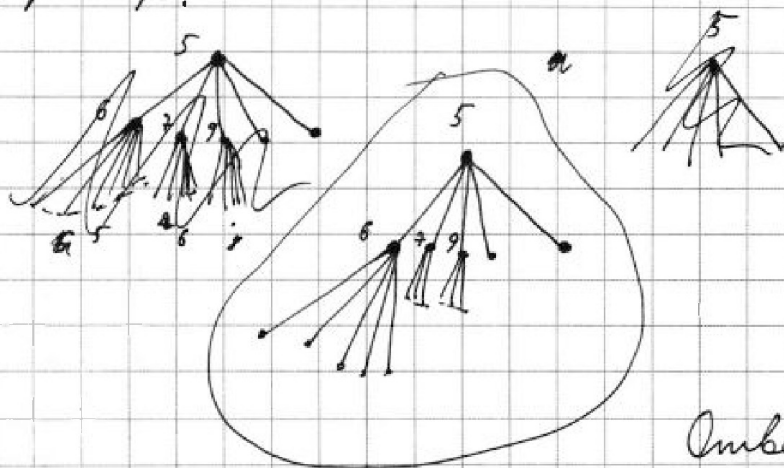
или. степ. 1. ~~каждое ребро~~

Каждое ребро посчитали 2 раза, $\Rightarrow \frac{5+6+7+9+n-4}{2}$.

$$\frac{5+6+7+9+n-4}{2} = n-1$$

$$n = 25.$$

Пример:



Ответ. 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что в дереве на n вершинах ^{ребро} $n-1$ ребро.

в дереве есть ≥ 1 верш. степ. 1.



Индукция по n .

База. $n=1$: 1 верш., 0 ребер.

$n=2$:  2 верш., 1 ребро.

Переход. Пусть в дереве на n верш. $n-1$ ребро.

Докажем, что в дереве на $n+1$ верш. ^{по ребру} n ~~ребро~~.

Рассм. ~~дерево~~ ~~дерево~~ дерево на $n+1$ верш.

выберем верш. степ. 1. Остался ~~граф~~ ~~граф~~ граф

на n вершинах. ~~Связность~~ Связность осталась и

циклов не появилось, $\Rightarrow$ граф - дерево.

по По предположению, в дереве на n верш. $n-1$

ребро, $\Rightarrow$ если ~~верш~~ ~~верш~~ верш. степ. 1, то

ка-то верш. увел. на 1 и ребро на 1, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в ~~дерево~~ ~~дерево~~ ~~дерево~~ $n+1$ верш. и n ребро

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-(x-y-1)} = 2 \quad \text{Ответ: } (1; 0) \\ (0; -1).$$

$$2x-2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$x-y-1 \geq 0;$$

$$1-x+y+1 \geq 0$$

$$x-1 \geq y \geq x-2$$

$$x-y-1 \leq 0;$$

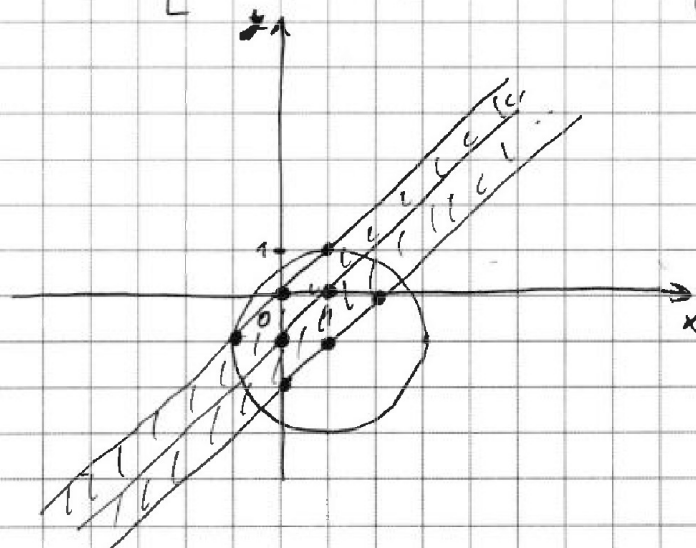
$$1+x-y-1 \geq 0$$

$$x-1 \leq y \leq x$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$x+1 \geq y \geq x-2$$

$$x \geq y \geq x-1$$



$$\sqrt{2+2-1-1} + \sqrt{1-|1+1-1|} \neq 2$$

$$\sqrt{4-0-4-0} + \sqrt{1-|2-0-1|} \neq 2$$

Проверим эти точки:

$$(1; 1), (1; 0), \text{ ~~то же~~ } (0; 0),$$

$$(-1; 1); (0; -1); (0; -2);$$

$$(1; -1); (2; 0);$$

$$\sqrt{2-2-1-1} + \sqrt{1-|1-1-1|} \neq 2$$

$$\sqrt{2-0-1-0} + \sqrt{1-|1-0-1|} = 2$$

$$\sqrt{0} + \sqrt{1-|0-0-1|} \neq 2$$

$$\sqrt{-2+2-1-1} + \sqrt{1-|1+1-1|} \neq 2$$

$$\sqrt{0+2-0-1} + \sqrt{1-|0+1-1|} = 2$$

$$\sqrt{0+4-0-4} + \sqrt{1-|0+2-1|} \neq 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

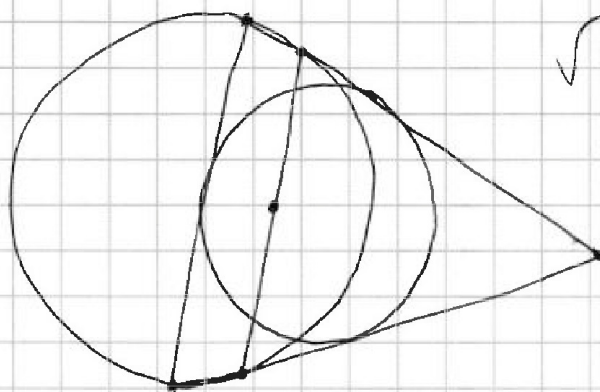
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-(x-y+1)^2} = 2$$

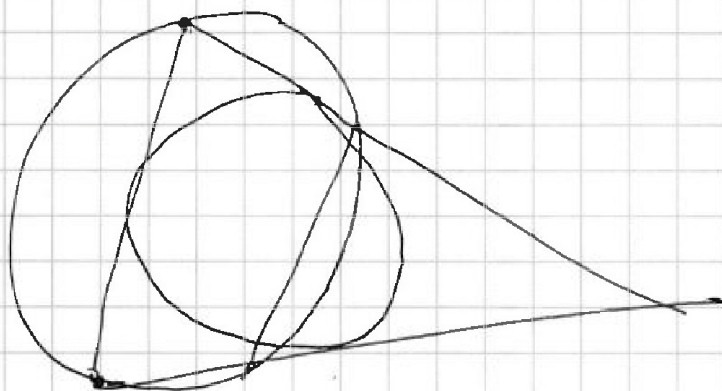
$$2x-2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$x^2-2x+1 + y^2+2y+1 \leq 2$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$|x-y-1| \leq 1$$

$$\frac{5+6+7+9+n-4}{2} = n-1$$



$$23+n=2n-2$$

$$25=n$$

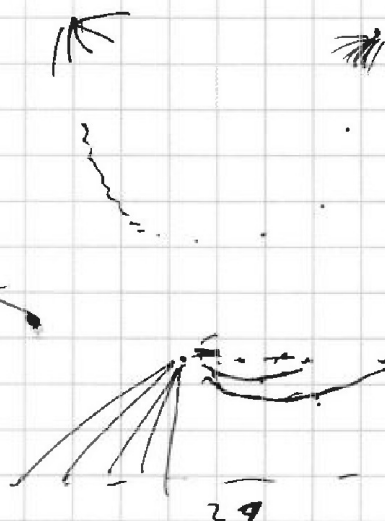
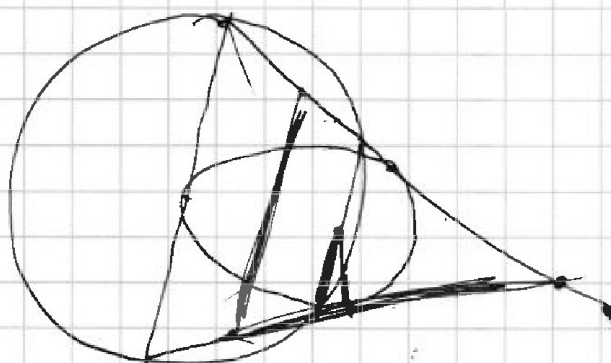
$$x-y-1 \geq 0:$$

$$x-y \geq 1$$

$$x-y-1 \leq 0:$$

$$y-x \leq 1$$

$$x-y \geq 1$$



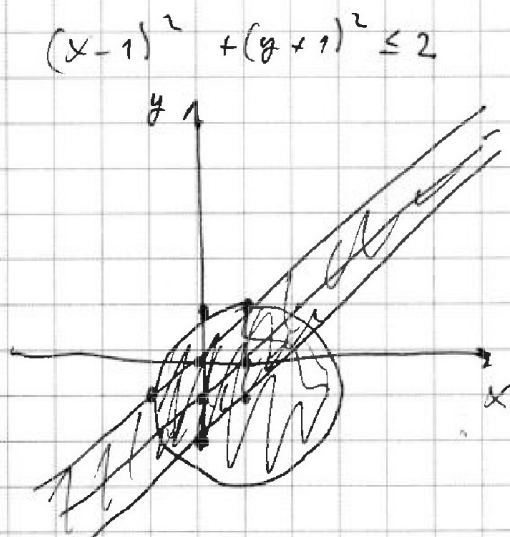


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$0 \leq x - y - 1 \leq 1$$

$$1 \leq x - y \leq 2$$

$$x - y > 1$$

~~или~~

$$y - x + 1 \leq 1$$

$$y \leq x$$

$$x - y - 1 \leq 0$$

~~$$x - y - 1 \leq 0$$~~

$$x - y \leq 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

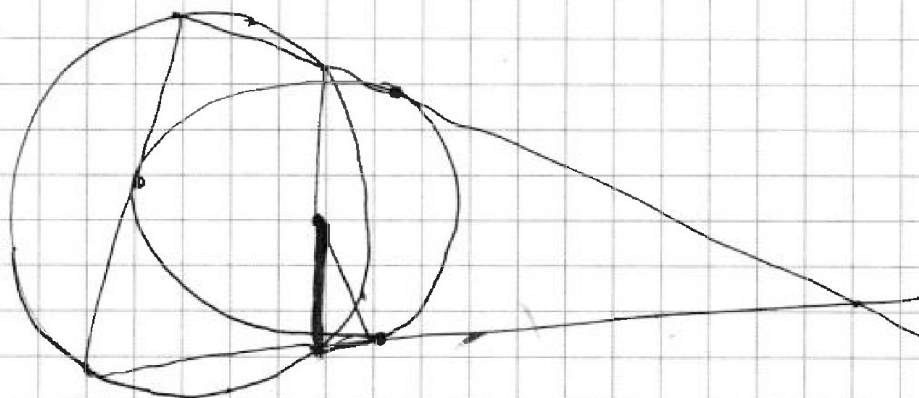
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

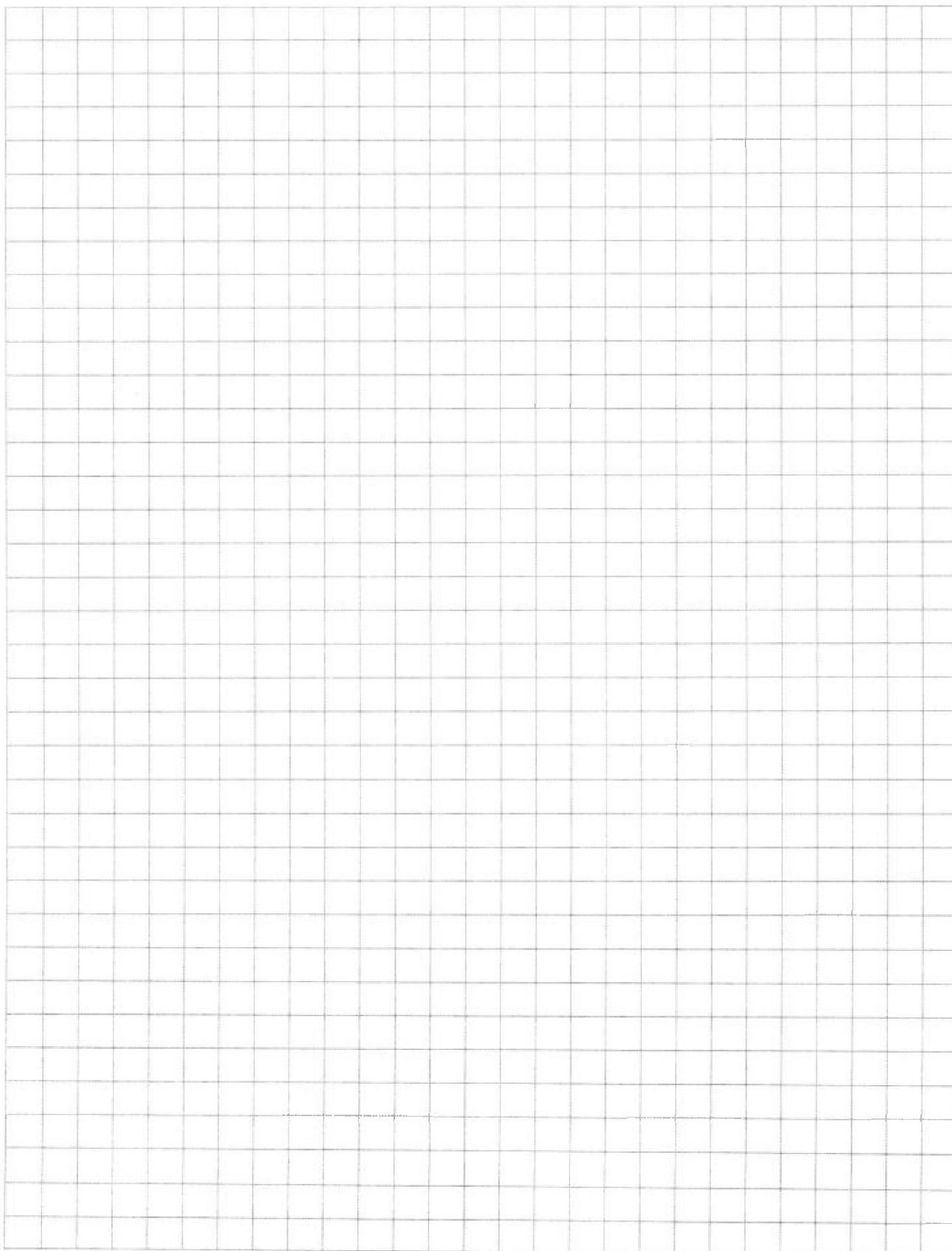
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

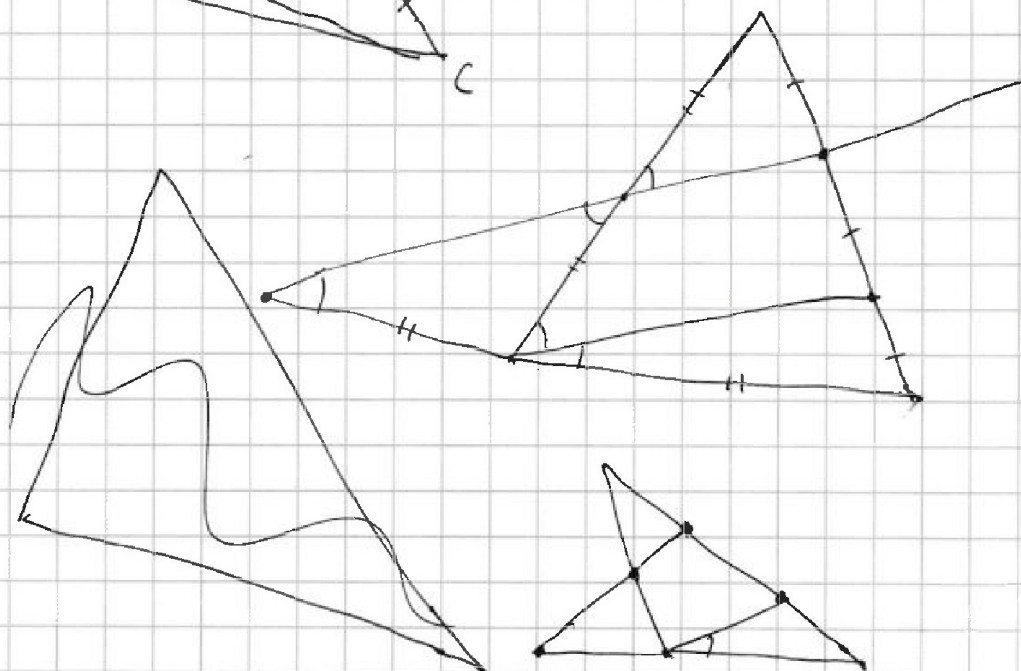
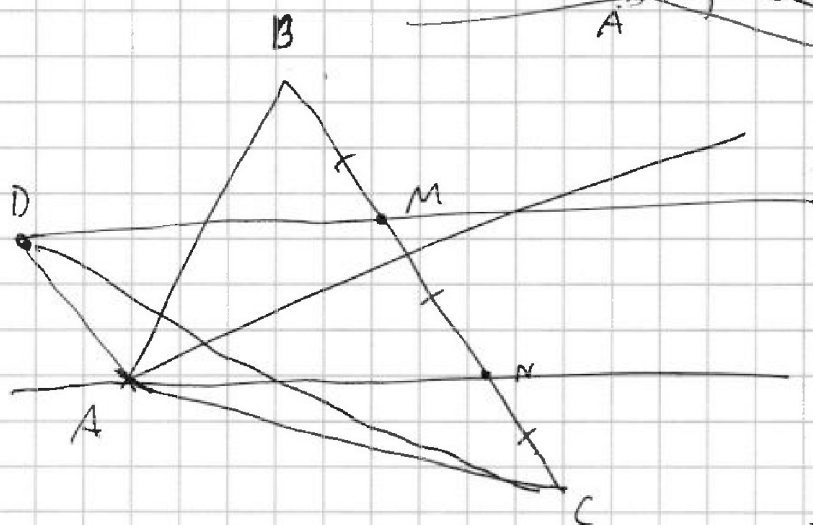
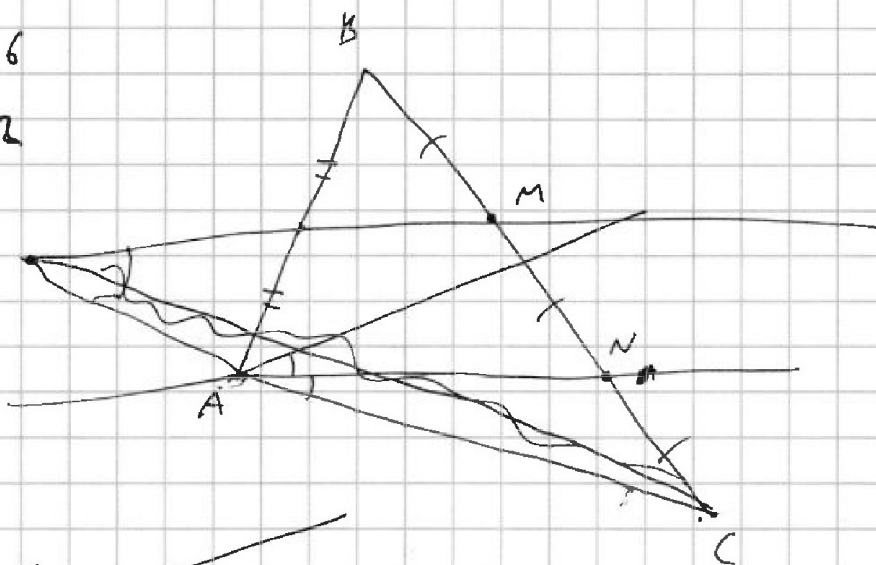
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b=16$$

$$a-b=12$$

$$a=14$$

$$b=2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

0 0¹¹ 0¹⁰ 0⁹

0⁸ 0⁷ 0⁶ 0⁵

0⁴ 0³ 0² 0¹

$$(C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4 \cdot 4) \quad \text{1111}$$

$$4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 \cdot 4$$

