



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 4t^2 - 4 = 0$$

$$D = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2$$

разл.

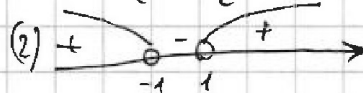
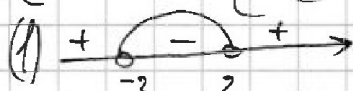
$$2 \text{ корня в } \mathbb{R} \Rightarrow D > 0$$

$$\text{произведение} > 0 \Rightarrow 4t^2 - 4 > 0 \text{ (по теор. Виета)}$$

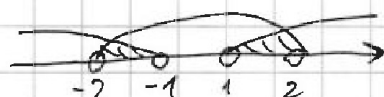
$$\begin{cases} 16 - 4t^2 > 0 \quad | :4 > 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \quad | :4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 - t^2 > 0 \quad | :(-1) \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - 4 < 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (t-2)(t+2) < 0 \quad (1) \\ (t-1)(t+1) > 0 \quad (2) \end{cases}$$



$$(1) \text{ и } (2) \quad t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$



Ответ: $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2

$$\begin{cases} a+b=40 \\ a^2-2ab+b^2+15a-15b=17p^5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=40 \\ (a-b)^2+15(a-b)=17p^5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=40 \\ (a-b)(a-b+15)=17p^5 \end{cases}$$

$$(a-b)(a-b+15)=17p^5$$

Т.к. p - простое, то рассматривается на простые или 1- p

Различные варианты

произведения, где a, b, p -

целые, справа делится на 17, бОльшие числа слева

ведь $15p^5$

$$(a-b)(a-b+15)=17p^5$$

один из этих чисел четное, если $(a-b)$ - нечетное, то $(a-b+15)$ - четное.

все произведение четное

$17p^5$ - четное.

Из 17-нечет $\Rightarrow p^5$ - четное. 2 - единственное четное простое $\Rightarrow p=2$

$$(a-b)(a-b+15)=17 \cdot 32$$

Пусть $a-b=t$

$$t^2+15t-544=0$$

$$D=225+4 \cdot 544=2901=49^2$$

$$t = \frac{-15 \pm \sqrt{2901}}{2} = \left[\frac{49-15}{2}, \frac{-49-15}{2} \right] = \begin{bmatrix} 17 \\ -32 \end{bmatrix}$$

Откуда: $a=4, b=36$

$$\begin{cases} a+b=40 \\ a-b=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=40 \\ a-b=-32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=57 & a=28.5 \\ 2a=8 & a=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=28.5 \\ b=11.5 \end{cases} \vee \begin{cases} a=4 \\ b=36 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

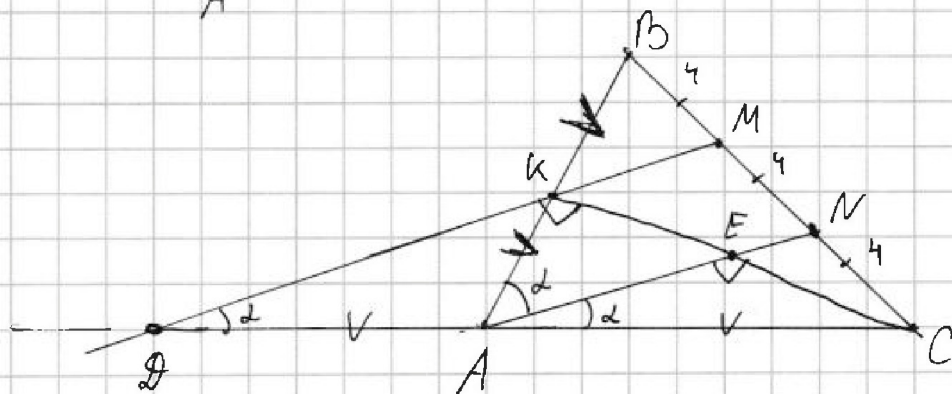
~3

$$\angle CAN = 2 \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{4} \quad (\angle MDC = 2 \text{ соств.})$$

$$BC = 12$$

$$BM = MN = NC = 4$$

Рассуждая $DM \parallel AN$ и $BM = MN$ $\Rightarrow$ KM -
- сред линия
для $\triangle ABN$
 $\Rightarrow$
 $BK = AK$



Рассуждая теорему Менелая для $\triangle ABC$ и сек. DM : $\frac{CM \cdot BK \cdot AD}{BM \cdot AK \cdot DC} = 1$

$$\frac{4 \cdot \frac{AD}{8}}{DC} = 1$$

$$DC = 2AD$$

$$AD = \frac{DC}{2} \text{ (знаем)}$$

$$\text{и } AC = \frac{DC}{2}$$

$$\text{Значит } AD = AC$$

$$\text{Рассуждая } DC = AB, \Rightarrow \frac{DC}{2} = \frac{AB}{2} = AD = AC = AK$$

В $\triangle AKE$, AK - медиана, но раз $AK = AD = AC$, $\leftarrow$

$\triangle AKE$ - равноб ($AK = AC$) $\leftarrow$
в нем AE - высота

$\Rightarrow$
 AE - бисс

$$\Rightarrow \angle BAN = 2.$$

$\triangle DKE$ - равноб

$$\angle DKE = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AEC = 90^\circ$$

($DM \parallel AN$, соств.)

Напишем теорему кос. для $\triangle ABC$:

$$AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 2\alpha = BC^2$$

$$AB^2 + \frac{AB^2}{4} - 2 \cdot AB \cdot \frac{AB}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 144$$

$$AB^2 + \frac{AB^2}{4} + \frac{AB^2}{4} = 144$$

$$\frac{3}{2} AB^2 = 144$$

$$AB^2 = 96$$

$$AB = 4\sqrt{6} \quad \text{Ответ: } 4\sqrt{6}$$

Т.к. BB_1 - сеч., то $\frac{AB_1}{EB_1} = \frac{AB}{BE}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
4 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~6

Раз из любых 2 деревьев существует маршрут, при этом единственный, значит соседние деревья соединены только одной дорогой, а граф из всех деревьев должен получиться деревом.

Рассмотрим наши деревья. Суммарное кол-во дорог выходящих из них это $3+4+5+7=19$. Из дорог из них уходит на соединение наших-то ^{рассматриваемых} деревьев с другими. одной оставшейся. Эти дороги должны быть, иначе рассматриваемые деревья не будут соединены, и в них нельзя будет попасть. Через другие не рассматриваемые (побочные) деревья тоже не выйдет, ведь там только 1 дорога - соединение с главными (рассматриваемыми) деревьями. Остаток $19-3=16$ дорог. При оставшейся главной дереву соединены одной дорогой с самой главной деревней, значит считаем еще 3 дороги. $16-3=13$ дорог осталось, они ведут в побочные деревья из всех главных, при этом не повторяются, иначе нарушится единственность маршрутов. Получается всего побочных деревьев 13 и плюс 4 главные деревья, итого $13+4=17$ деревьев на острове.
Ответ: 17 деревьев.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
6 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

Продолжение. Случай 2: $\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=1 \quad | \cdot (-1) \\ 1-|x+y-2| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-2y=-1 \quad | +1+1 \\ |x+y-2|=1 \end{cases}$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \rightarrow$ Координаты целые и ^{то} по аналогичным причинам. Единственный способ получить 1 это $0+1=1$

$\begin{cases} x+y-2=1 \\ x+y-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$

~~$\begin{cases} x-1=0 \\ y-1=1 \\ x-1=1 \\ y-1=0 \\ x-1=1 \\ y-1=1 \\ x-1=0 \\ y-1=0 \end{cases}$~~

$\begin{cases} (x-1)^2=0 \\ (y-1)^2=1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x-1)^2=1 \\ (y-1)^2=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x-1=0 \\ y-1=1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=2 \\ x=0 \\ y=1 \end{cases}$

Все пары (x,y) : $(1,2), (1,0), (2,1), (0,1)$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$x+y=3 \checkmark \quad x+y=1 \checkmark \quad x+y=3 \checkmark \quad x+y=1 \checkmark$

Пары для случая 2: $(1,2), (2,1), (0,1), (1,0)$

Ответ: $(0,2), (2,0), (1,2), (2,1), (0,1), (1,0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒СТРАНИЦА
5 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$. Раз $x, y \in \mathbb{Z}$, то под корнями только целые числа, сами корни всегда ≥ 0 , а если подкоренное будет число > 2 , то сам корень > 1 и сумма никак не сложится ведь корни ≥ 0

Получается под корнями только числа 0 и 1, при этом не одновременно под двумя корнями.

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \quad | \cdot (-1) \\ 1-|x+y-2| \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-2x+y^2-2y=0 \quad | +1+1 \\ |x+y-2|=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2x+1+y^2-2y+1=2 \\ x+y-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=2 \\ x+y=2 \end{cases}$$

квадраты ≥ 0
 Если сами квадраты равны 0
 Под квадратами цел. числа

$$\begin{cases} (x-1)^2=1 \\ (y-1)^2=1 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \\ y-1=1 \\ y-1=-1 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=0 \\ y=2 \\ y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 2+2 \neq 2 \\ 0+0 \neq 2 \\ 2+0=2 \\ 0+2=2 \end{matrix}$$

единственный способ получить 2 из суммы двух цел. квадратов это $1+1=2$
 $0+2$ не подойдет ведь $\sqrt{2}$ не цел.
 остальные варианты сгруппированы.

Для случая 1 возможные пары $(0; 2)$ и $(2; 0)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \quad | :2 \\ 1-(x+y-2)=1 \end{cases} \begin{cases} -x^2+x-1-y^2+y-1=-2 \\ |x+y-2|=0 \end{cases} \begin{cases} -(x-1)^2-(y-1)^2=-2 \\ x+y-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=2 \\ x+y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-1=1 & x-1=-1 \\ y-1=1 & y-1=-1 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ x=0 \\ y=2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$1) (0; 2) \text{ и } (2; 0)$$

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y-1=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=1 \\ 1-(x+y-2)=0 \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2-2x-2y=-1 \quad | +2 \\ |x+y-2|=1 \end{cases} \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=1 \\ \begin{cases} x+y-2=1 \\ x+y-2=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases} \end{cases}$$

$$2) (1; 2) \text{ и } (2; 1)$$

$$\begin{cases} (a-b)(a-b+15)=17p^5 \\ a+b=40 \end{cases} \quad \begin{array}{r} 17p^5 \\ 15p^5 \\ \hline 2p^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b \quad a-b+15 \\ \hline 17p^4 \\ -17p^4 \\ \hline 17p^3 \\ -17p^3 \\ \hline 17p^2 \\ -17p^2 \\ \hline 17p \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 15 \\ \hline 2 \\ 108 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$x_a) \begin{cases} a-b=17p \\ a+b=40 \\ 2a=40+17p \\ a=20+p \\ b=3 \end{cases}$$

$$x_b) \begin{cases} a-b=-17p \\ a+b=40 \\ 2a=40-17p \\ a=20-8.5p \\ b=20+17p \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} a-b=17p^2 \\ a+b=40 \\ 2a=40+17p^2 \\ p^2=2 \quad a=54 \quad b=22 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2

$$a+b=40$$

$$\frac{OD+OE}{OE} = \frac{OC}{CE} + 1$$

$$8! \cdot 4!$$

$$a+b=40$$

$$\frac{OD}{OE} = \frac{OC}{CE}$$

$$\frac{OD}{AB} = \frac{CE}{12}$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5$$

$$3! \cdot 2! \cdot 2!$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

$$\frac{AE_1}{AE} = \frac{BE_1}{BE}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$$

$$6$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$$



$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8$$

$$1 \ 2 \ 3$$

$$\frac{8!}{3!}$$

$$\frac{3}{2} AB^2 = 144$$

$$12 \cdot 8 = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 3 \cdot 2^3 \cdot 2^3$$

$$244$$

$$244$$

$$244$$

$$244$$

$$244$$

$$244$$

$$244$$

$$244$$

$$244$$

$$244$$

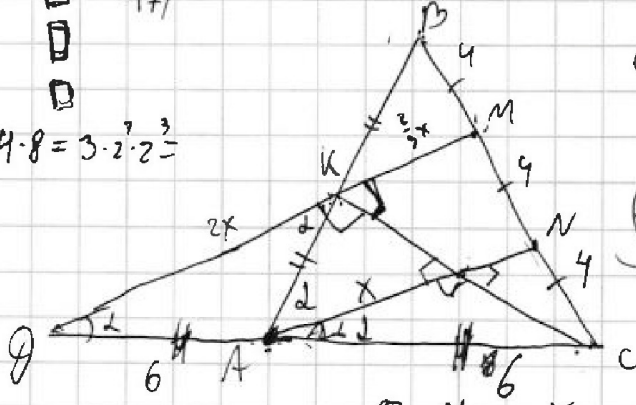
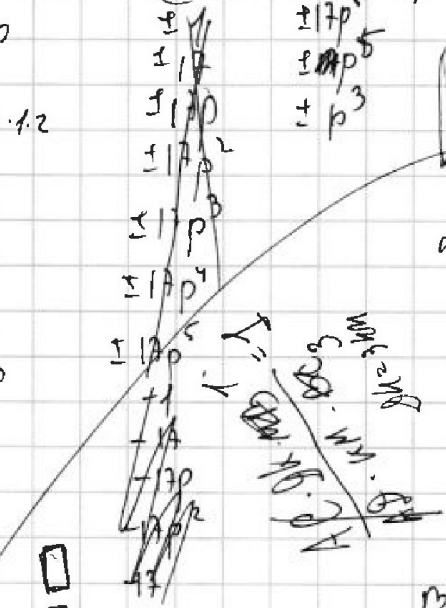
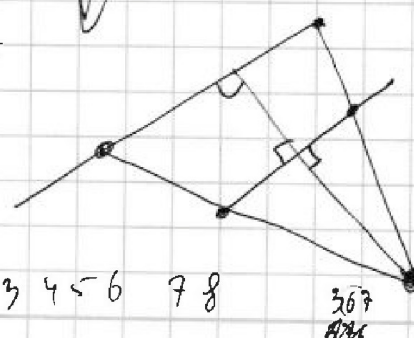
$$244$$

$$244$$

$$244$$

$$244$$

$$244$$



$$CD=AB$$

$$AB=2R$$

$$\cos \alpha = \frac{OD}{OE} = \frac{OC}{CE} = \frac{x}{AC}$$

$$y^2 + 4y^2 + 2 \cdot y \cdot 2y \cdot \cos \alpha = 144$$

$$5y^2 + 4y^2 = 144 \quad 36$$

$$y=6$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8$$

$$3 \ 6 \ 7$$

$$367$$

$$367$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solutions and diagrams on grid paper.

Top left: A series of boxes for marking tasks, with tasks 1, 2, and 3 marked with an 'X'.

Top right: A diagram of a cone with a circular base and a point E above it. Points A, B, C, D are marked on the base. A line segment connects E to the center of the base.

Middle left: A large circle with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z marked on its circumference. Inside the circle, there are several lines and angles marked.

Middle right: A diagram of a circle with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z marked on its circumference. Inside the circle, there are several lines and angles marked.

Bottom left: A diagram of a circle with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z marked on its circumference. Inside the circle, there are several lines and angles marked.

Bottom right: A diagram of a circle with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z marked on its circumference. Inside the circle, there are several lines and angles marked.

Handwritten calculations and notes:

- $1^2 + 15 + 17 - 32 = 0$
- $g = 225 + 17 \cdot 32$
- $t = -153$
- $7 - 3 = 4 \text{ см.}$
- $3 - 1 = 2$
- $4 - 1 = 3$
- $5 - 1 = 4$
- $3 - 3 = 0$
- $7 - 1 = 6$
- $5 - 1 = 4 + 4$
- $4 - 1 = 3$
- $4 - 3 = 1$
- $7 - 1 = 6$

