МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\dfrac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-\sqrt{5-x-3z}+6=2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20|+2|y-35|=\sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$\cos 3x+6\cos x=3\cos 2x+p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED:CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9:25$, считая от вершины C.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$ такие, что:

   - $a>b$,
   - число $a-b$ не кратно 3,
   - число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a+b^2=820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

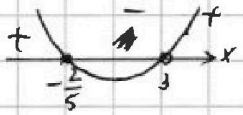
1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

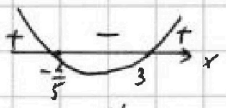
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, $b_{10} = x+4$; $b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$

ОДЗ: ① $\frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0$



② $(15x+6)(x-3) \geq 0$ =>



!! $x \in (-\infty; -\frac{2}{5}] \cup (3; +\infty)$

Т.к.:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = b_1 \cdot q^3 \quad (1) \\ x+4 = b_1 \cdot q^9 \quad (2) \\ \sqrt{(15x+6)(x-3)} = b_1 \cdot q^{11} \quad (3) \end{cases}$$

т.к. b_1 – 1-ый член геом. прогресс.

q – „шаг" геом. прогресс.

(3):(1) =>

$$\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)} \cdot \sqrt{(x-3)^3}}{\sqrt{15x+6}} = q^8$$

$\sqrt{(x-3)^4} = q^8$; $(x-3)^2 = q^8$, соотв. $q^4 = |x-3|$

~~$q^4 \geq 0$ (всегда) т.к. $x \neq 3$, $x \geq 3$.~~

соотв. ~~$q^4 = |x-3|$~~

(3):(2): $\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = q^2$ ~~$q^2 \geq 0$ соотв. $x+4 \neq 0$, $x \neq -4$~~

$$\frac{(15x+6)(x-3)}{(x+4)^2} = |x-3|$$

тогда:

① $x-3 \geq 0$, т.е. $(x-3)\left(\frac{15x+6}{(x+4)^2} - 1\right) = 0$.
$(x > 3)$
$x \neq 3$

$x \neq 3$ (из ОДЗ); если $x = -4$, то $b_1 \cdot q^9 = 0$ невозможно. (тогда $x = -4$ и, основ., $x = -\frac{2}{5}$)

тогда:

$15x+6 = x^2 + 8x + 16$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-2)(x-5) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right.$, раз $x > 3$, то

$x = 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

② $x-3<0$

$x<3 \Rightarrow (x-3)\left(\frac{15x+6}{(x+4)^2}+1\right)=0$

$x\neq 3$; $15x+6+x^2+8x+16=0$

$x^2+23x+22=0$

$(x+22)(x+1)=0$

сооб. $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-22 \end{array}\right.$

проверим по усл. x: раз 3, нет

если $x=5$: $b_4=\frac{9}{2\sqrt{2}}$ ✓

$b_{10}=9$

$b_{12}=9\sqrt{2}$

если $x=-1$: $b_4=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ ✓

$b_{10}=3$

$b_{12}=3\sqrt{2}$

если $x=-22$, то: $b_4>0$

$b_{10}<0$

$b_{12}>0$

заметим что раз b_4, b_{10}, b_{12} стоят на "чётных" местах (т.е. 4-ый член, 10-ый член, 12-ый член), то они должны быть одн знака

сооб $x\neq -22$

Ответ: $-1; 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

рассмотрим второе выражение:

$\sqrt{225-z^2} \geq 0$ явно. При этом, из ОДЗ:

$225 - z^2 \geq 0$; $z^2 \leq 225$. т.е.

max значение: $\sqrt{225-z^2} \leq 15$

$\parallel$
15

соотв:

(V) → всегда выполн. не всегда выполн.

$0 \leq |y-20| + 2|y-35| \leq 15$

$y=20$, $y=35$:

$|y-20|$: $-$ $+$ $+$ y; $|y-35|$: $-$ $-$ $+$; 20, 35; ① ② ③

① $y \leq 20$, тогда: $-y+20-2y+70 \leq 15$

$3y \geq 75$; $y \geq 25$ (не подх.)

② $20 \leq y \leq 35$: $y-20-2y+70 \leq 15$

$50-y \leq 15$

$y \geq 35$ → только если $y=35$

③ $y \geq 35$: $y-20+2y-70 \leq 15$

$3y-90 \leq 15$

$3y \leq 105$; $y \leq 35$ ⇒ только при $y=35$.

соотв, $y=35$, тогда: $|35-20| + 2\underbrace{|35-35|}_{0} = \sqrt{225-z^2}$

$15 = \sqrt{225-z^2}$; соотв, $z=0$.

подставим z и y в первое выражение: (ОДЗ: $x \geq -7$, $x \leq 5$)

$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$; $2\sqrt{x+7}\sqrt{5-x}$

$((x+7)(5-x)$: $5x - x^2 + 35 - 7x$; $-x^2 - 2x + 35)$

пусть $\sqrt{x+7} = t$, $\sqrt{5-x} = p$;

$(t - p + 6 = 2tp)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

шаг: возводим в квадрат → нам нужно x.

$$\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{5-x}\right)^2 = \left(2\left(\sqrt{x+7}\sqrt{5-x}-3\right)\right)^2$$

$$x+7+5-x-2\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{5-x} =$$

$$= 4\left((x+7)(5-x)-6\sqrt{x+7}\sqrt{5-x}+9\right)$$

пусть $\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{5-x}=t$, $(t\geq 0)$

$$12-2t = 4(t^2-6t+9)$$

$$6-t = 2t^2-12t+18$$

$$2t^2-11t+12=0$$

$$D = 121-8\cdot 12 = 25$$

$$t_{1,2} = \frac{11\pm 5}{4}, \quad t_1 = 4, \quad t_2 = \frac{3}{2}$$

пусть: $\sqrt{x+7}\sqrt{5-x}=4$,

$$-x^2-2x+35=16$$

$$x^2+2x-19=0$$

$$D_1 = 1+19=20$$

$$x_{1,2} = -1\pm\sqrt{20}$$

$-1-\sqrt{20}<-7$

$-1+\sqrt{20}<5$

$\sqrt{20}<6$

$20<36$ (!)

$$\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{5-x}=\frac{3}{2}$$

$$\cancel{-x^2-2x+35=\frac{9}{4}}$$

$$\cancel{-4x^2-8x+140=9}$$

$$\cancel{4x^2+8x-131=0}$$

или равно $\frac{3}{2}$, т.к.

$$\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{5-x}\right)^2 = \left(2\cdot\frac{3}{2}-6\right)^2$$

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{5-x}=-3, \quad \sqrt{5-x}-\sqrt{x+7}=3.$$

$$-x^2-2x+35=\frac{9}{4}, \quad -4x^2-8x+140=9,$$

$$4x^2+8x-131=0$$

$$D_1 = 16+4\cdot 131 = 4(4+131) = 4\cdot 135$$

$$x_{1,2} = \frac{-4\pm 2\sqrt{135}}{4}$$

$$x_{1,2} = -1\pm\frac{\sqrt{135}}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

привести:

$-1-\frac{\sqrt{135}}{2}>-7$

$-\frac{\sqrt{135}}{2}>-6$ $\quad -\sqrt{135}>-12$

$\sqrt{135}<12$

$135<144$ (V)

$-1+\frac{\sqrt{135}}{2}<5$ $\quad \frac{\sqrt{135}}{2}<6$

$\sqrt{135}<12$ (V)

Ответ: $z=0;\ y=35;$ $\begin{cases} x=-1\pm\frac{\sqrt{135}}{2} \\ x=-1\pm \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\cos 3x + 6\cos x - 3\cos 2x = p$ ← ур-ние имеет хотя бы одно решение.

$\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x = \cancel{\cos x(\cos^2 x}$

$= \cos x(2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cdot \cos x = \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2(1-\cos^2 x)\cdot\cos x$

пусть $\cos x = t$; $(t \in [-1;1])$

$\cos 3x = t(2t^2-1) - 2(t-t^3) = 2t^3 - t - 2t + 2t^3 = 4t^3 - 3t$

$3\cos 2x = 6t^2 - 3$; $6\cos x = 6t$, тогда:

$4t^3 - 3t + 6t - 6t^2 + 3 = p$; $p = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$

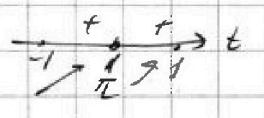
$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$; $f'(t) = 12t^2 - 12t + 3$

$f'(t) = 3(4t^2 - 4t + 1)$

$f'(t) = 3(2t-1)^2$

заметим, что $f'(t) \geq 0$ (всегда), тогда:

$f(t)$ всегда возрастает



тогда: $f(t)(\min) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$ $p \in [-10;4]$

$f(t)(\max) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4$;

т.е. $4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = -10$;

$4t^3 - 6t^2 + 3t + 13 = 0$;

	4	-6	3	13
-1	4	-10	13	0

$t = -1$

$\cos x = -1$

$4t^2 - 10t + 13 = 0$

$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$D_1 = 25 - 13 \cdot 4 < 0$

или: $4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = 4$

$4t^3 - 6t^2 + 3t - 1 = 0$;

1	4	-6	3	-1
	4	-2	1	0

$t = 1$; $\cos x = 1$

$x = 2\pi k, k \in Z$

$4t^2 - 2t + 1 = 0$

$D < 0$

т.е. $\cos x = p$; $\left(x = \pm\arccos p + 2\pi n, n \in Z\right.$ ← если $p > 0$

$\left(x = \pm(\pi - \arccos p) + 2\pi m, m \in Z\right.$ ← $p < 0$

Ответ: $p \in [-10;4]$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

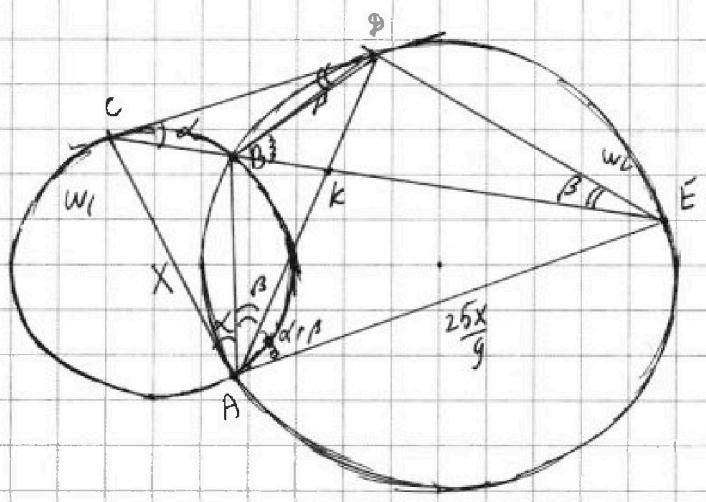
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Дано:
окр. ω_1 и ω_2
$\omega_1 \cap \omega_2$: т. A и т. B,
касат. CD => т. C ∈ ω_1,
т. D ∈ ω_2
т. B ближе к CD
$CB \cap \omega_2$ = т. B и т. E
$AD \cap CE$ = т. K
$\frac{CK}{KE} = \frac{9}{25}$

$\frac{ED}{CD}$ - ?

Решение:



· пусть $\angle DCE = \alpha$, раз CD - касат., то по св-ву углов между хордой и касат.: $\angle CAB = \angle DCE = \alpha$

· пусть $\angle CDB = \beta$, то тогда по св-ву касат. и хорды: $\angle DEB = \beta$

· BDEA - впис. в окр. четырёхуг. Тогда:

$\angle BED = \angle BAD = \beta$ (опир на $\cup BD$);

· $\angle DBE = 180° - \angle DBC$ (смежные); соотв. $\angle DBE = \alpha + \beta$

$\angle DBE = \angle DAE = \alpha + \beta$ (опир на $\cup DE$) соотв. $\angle CAD = \angle DAE$ - AK - бис. в $\triangle CAE$ соотв.

$\frac{AC}{CK} = \frac{AE}{KE}$, $\frac{AC}{AE} = \frac{9}{25}$, $\angle BDA = \angle BEA$ (опир на $\cup BA$)

пусть $AC = X$, $AE = \frac{25X}{9}$

соотв. $\triangle CAD \sim \triangle DAE$: $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE}$,

$AD^2 = AC \cdot AE$ => $AD^2 = X \cdot \frac{25X}{9}$, $AD = \frac{5X}{3}$,

тогда $\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD}$, $\frac{CD}{DE} = \frac{X \cdot 3}{5X}$, $\frac{ED}{CD} = \frac{5}{3}$

Ответ: $\frac{5}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a>b \\ (a-b)\vdots 3 \\ (a-c)(b-c)=p^2, \text{ где } p\text{ - просто} \\ a+b^2=8020 \end{cases}$$

$p\neq 1$ (выд $a\neq b$)

раз p - просто, то:

а $(a,b,c)\in\mathbb{Z}$ (по усл), то:

① $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases}$ $\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$

тогда: $b>a$, неверно

$a=b$ ✗

подходит.

$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow a-b=(p-1)(p+1).$

раз $a-b\vdots 3$, то: $(p-1)(p+1)\vdots 3$.

если $p=3k$, то: $(3k-1)(3k+1)\vdots 3$ (✓)

если $p=3k+1$, то: $(3k+1-1)(3k+1+1)\vdots 3$

$3k(3k+2)\vdots 3$ → неверно

если $p=3k+2$ то: $(3k+1)3(k+1)\vdots 3$ → нет.

соотв. $p\vdots 3$. При этом оно просто $\Rightarrow p=3$.

$\begin{cases} a-b=8 \\ a+b^2=8020 \end{cases}$ $b^2+\cancel{a}-\cancel{a}+b=8020-8$

$b^2+b=8012$

$b^2+b-8012=0$

$D=1+4\cdot 8012=32049=57^2$

$b_{1,2}=\frac{-1\pm 57}{2}$, $b_1=28$; $a_1=36$

$b_2=-29$; $a_2=-21$

1) если $b_1=28$, $a_1=36$, то: $c=b-1=27$,

2) если $b=-29$, $a=-21$, $c=-30$ $b>a$ (✗)

подходит, $a\neq b$

② $\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a-c=-p \\ b-c=-p \end{cases}$ $\begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases}$

т.к.

$a-c-b+c=p^2-1$, $(a-b)=p^2-1$ → те же рассуждения.

т.к. $p=3$, $\begin{cases} b-c=-9 \\ a-c=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} a-b=8 \\ a+b^2=8020 \end{cases}$ ⇒ те же знач.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

т.е. $b_1 = 28$, $a_1 = 36$
$b_2 = -29$, $a_2 = -21$

тогда: $a_1 = 36$, $b_1 = 28$, $c_1 = a+1 = 37$
$a_2 = -21$, $b_2 = -29$, $c_2 = -20$.
Тройки вида (a, b, c):

Ответ:
$(36, 28, 27)$; $(-21, -29, -30)$
$(36, 28, 37)$; $(-21, -29, -20)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Дано:
призма $ABCA_1B_1C_1$
$\triangle ABC$ – равносторон.
$AB = BC = AC = 2$
$S_{AA_1C_1C} = 4$
$S_{AA_1B_1B} = 5$
$S_{CC_1B_1B} = 5$

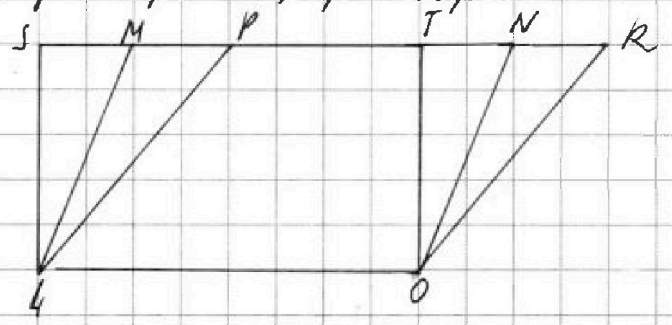
h – ?

Решение:

если бы призма была прямая, тогда

$AA_1C_1C = AA_1B_1B = CC_1B_1B$ – прямоуг.
соотв, тогда и площади были бы равны.

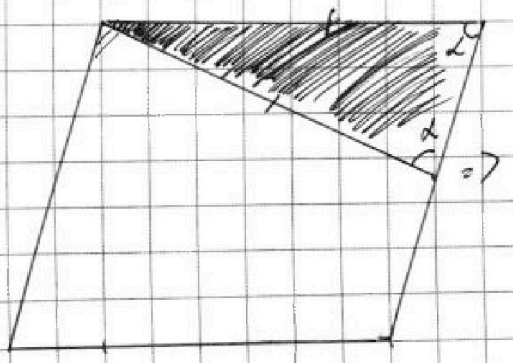
рассмотрим параллелограмм:



пусть есть прямоуг. $LSTO$. тогда площади
паралл. $LMNO$ и $LPRO$ – оказываются бы равны
S_{LSTO}, ведь $S_{MLNO} = S_{LPRO} = TO \cdot LO$.
соотв, если бы AA_1C_1C, AA_1B_1B и CC_1B_1B были бы
~~паралле~~ параллелограм, то $S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} = S_{CC_1B_1B}$.
т.е. ABC не паралл. $A_1B_1C_1$

соотв, призма – наклонная: $ABC \parallel A_1B_1C_1$,
тогда было бы неправильно, что $\triangle A_1B_1C_1$ – равносторон.
наклонная

чтобы найти, бы призма це $ABC \parallel A_1B_1C_1$, мы определим
часть (посмотрим на одну из граней):

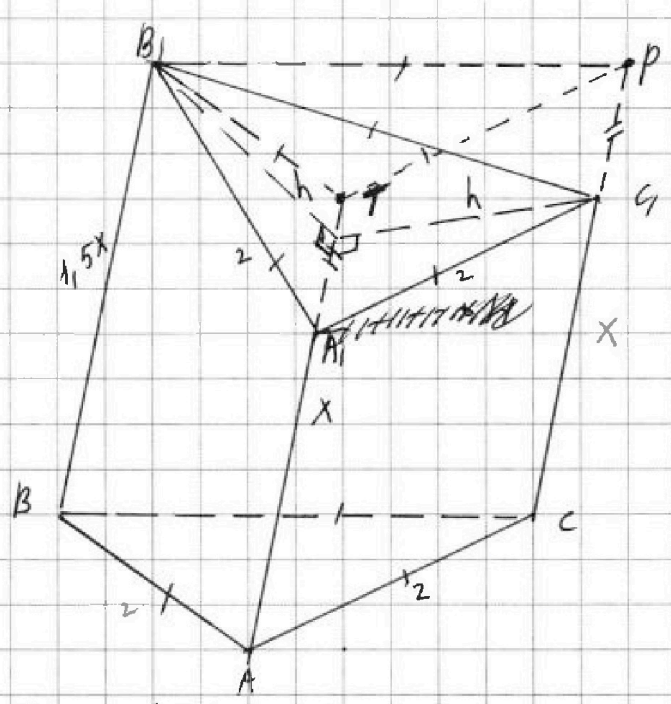


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

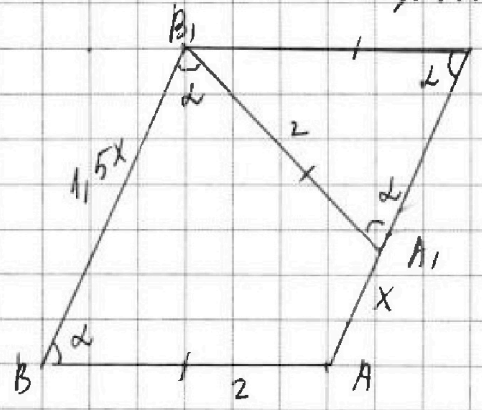
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



← симметрично.

т.е. AA_1B_1B, B_1C_1CB — трапеции равнобокие ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$; $A_1B_1 = AB = B_1C_1 = BC$)

а AA_1C_1C — паралл. ($A_1C_1 \parallel AC$; $A_1C_1 = AC$)



$S_{AA_1C_1C} = h \cdot AA_1$ (левая часть верна в САТ: ATB_1B)

$S_{AA_1B_1B} = \frac{AA_1+BB_1}{2} \cdot h$

$\frac{2AA_1}{AA_1+BB_1} = \frac{4}{5}$

$10AA_1 = 4AA_1 + 4BB_1$

$6AA_1 = 4BB_1$; пусть $AA_1 = x$

$BB_1 = 1,5x$

~~Пусть AA_1 ...~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

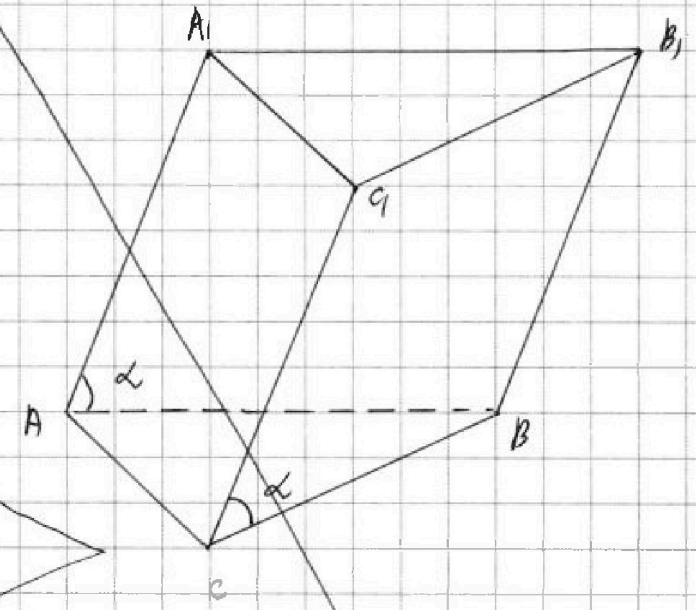
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Дано:
призма $ABCA_1B_1C_1$
$\triangle ABC$ - равносторон. (сторон. = 2)
$S_{AA_1C_1C} = 4$
$S_{AA_1B_1B} = 5$
$S_{CC_1B_1B} = 5$

h - ?

Решение:
ясно, что призма неправильная (стороны площадь боковых граней были 2 он равны).

Если основания призмы параллельны



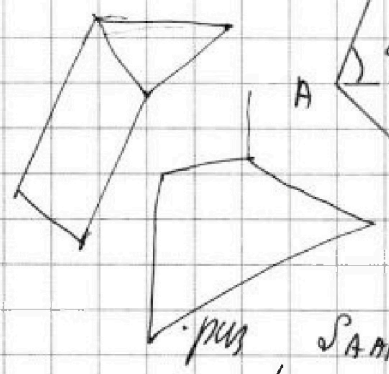
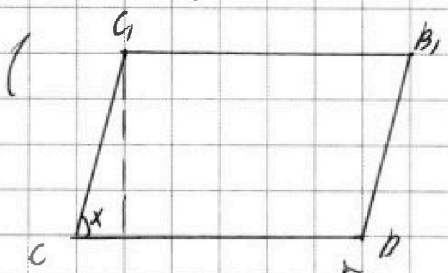


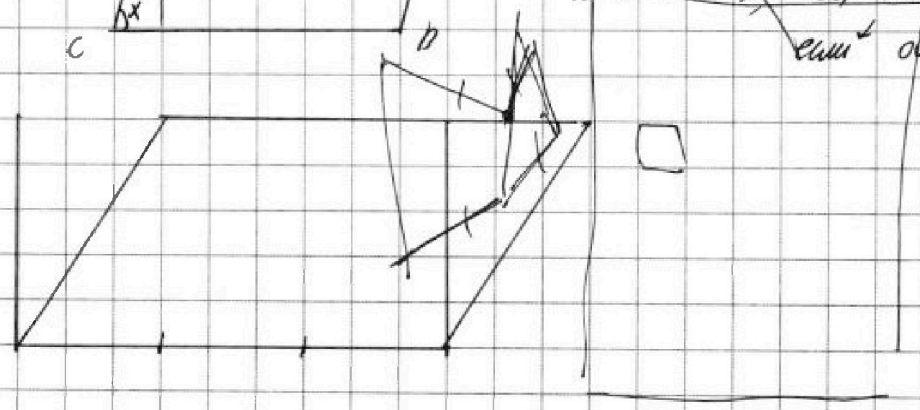
рис. $S_{AA_1B_1B} = S_{CC_1B_1B}$; $\angle A_1AB = \angle C_1CB = \alpha$



все боковые стороны - паралл.
пусть угол $\angle C_1CB = x$, тогда:
$S_{пар.} = h \cdot BC = \sin x \cdot CC_1 \cdot BC$

~~$BC = AB = AC$, $CC_1 = BB_1 = AA_1$~~

если боковые параллель



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(a-b)\,\vdots\,3.$

$a+b^2=802.$

$\cancel{(a-c)(a-b)}$

$(a-c)(b-c)=p^2$

$\cancel{a-c=1}$

$\cancel{b-c=p^2}$

$\cancel{\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases}}$

$\cancel{a-c=b-c}$

$\cancel{a=b}$

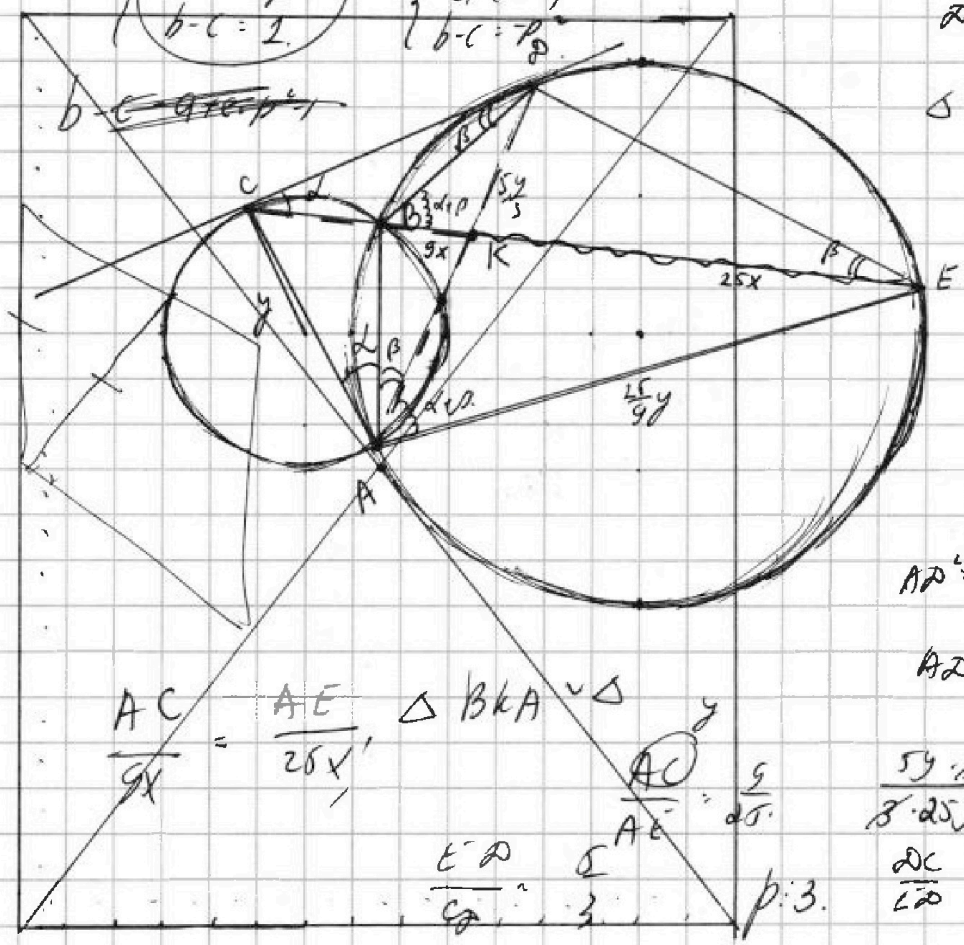
$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$

$\cancel{b-c=a+c=p^2-1}$

$x=-\frac{6}{\sqrt{5}}=-\frac{2y}{5\sqrt{5}}$

$\frac{DC\cdot 9x\sin\alpha}{2\cdot ED\cdot 25x\sin\beta}=\frac{9}{25}$

$\frac{ED}{DC}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$



$\triangle ADC\sim\triangle ACD:$

$\frac{AD}{AE}=\frac{DC}{ED}=\frac{AC}{AD}.$

$AD^2=AE\cdot AC.$

$AD^2=y\cdot\frac{25y}{9}.$

$AD=\frac{5y}{3}.$

$\frac{AC}{9x}=\frac{AE}{25x},$ $\triangle BKA\sim\triangle$

$\frac{AC}{AE}=\frac{9}{25}.$

$\frac{ED}{CD}=\frac{5}{3}.$

$p\vdots 3.$

$\frac{5y\cdot 9}{3\cdot 25y}=\frac{DC}{ED}=\frac{9}{5y}.$

$\frac{DC}{ED}=\frac{3}{5}.$

$\cancel{a-c-b+c=p^2-1.}$ $\vdots 3.$

$a-b=p^2-1,$ $a-b=(p-1)(p+1).$ $\vdots 3$ $\vdots ?$

$\cancel{A3}$ (2-4) (V). (p:3).

$b^2+b=802-p^2$

$\cancel{b(b+1)=802-p^2}$

$\cancel{3-5}$ $\begin{cases} a-b=p^2-1 \\ a+b^2=802 \end{cases}$

$b^2+b=802+1-p^2,$

$p-1\vdots 1$ $p=2$

$p+1=2.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$y = 35$

$t z = 0$

$\sqrt{t} - \sqrt{p} = 2\sqrt{tp}$

$t + p - 2\sqrt{tp} = 4tp$

$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} =$

$= \alpha\sqrt{35-2x-x^2}$

$5 - x -$

$x + 7 + 5 - x -$

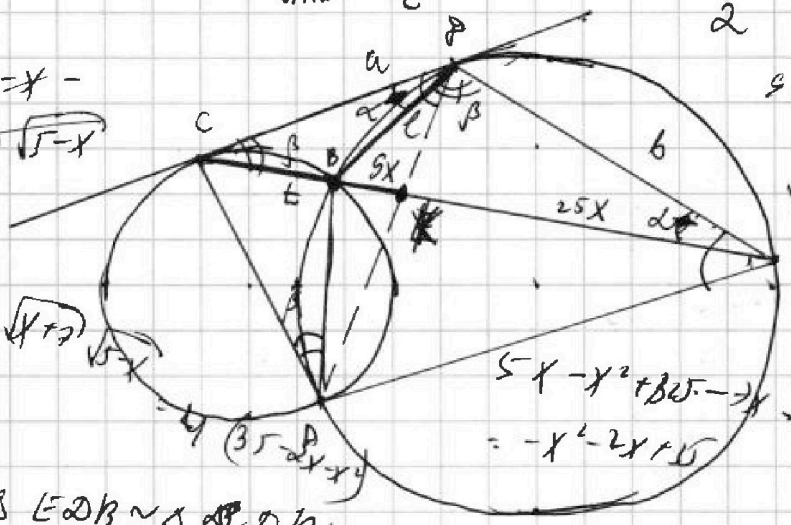
$- 2\sqrt{x+7}\sqrt{5-x}$

$12\alpha - 2\sqrt{x+7}\sqrt{5-x}$

$= 4(35 - 2x - x^2)$

$\frac{tp}{t} = \frac{l}{\sin\alpha}$ $\quad S_{ABCE} = \frac{9}{34} S_{\triangle CDE}$

$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{l}{t}$ $\quad \frac{a \cdot 9x \cdot \sin\beta}{2} = \frac{9}{34} S_{\triangle CDE}$



$5 - x \geq 0$

$x \leq 5$

$x \geq -7$

$x \in [-7; 5]$

$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} =$

$= 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$

$x + 7 + 5 - x -$

$- 2\sqrt{x+7}\sqrt{5x} = 4\sqrt{35-2x-x^2}$

$5 - x - x^2 + 35 - 2x =$

$= -x^2 - 2x + 40$

$\triangle DCB \sim \triangle EDB$:

$\frac{a}{b} = \frac{t}{l} = \frac{DB}{EB}$

$\triangle EDB \sim \triangle CDB$:

$\frac{b}{a} =$

$a - b \geq 2ab$

$12 - 2t = 4t^2$

$CD^2 = t \cdot 34x^2$

$y \leq 50$

$0 \leq -y + 20 - y + 20 \leq 15$

$0 \leq -2y + 40 \leq 15$

$20 \leq y \leq 35$

$4t^2 + 2t - 6 = 0$

$2t^2 + t - 6 = 0$

$D = 1 + 12 \cdot 4 = 49$

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{4}$

$\frac{b \cdot 25 \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{25}{34} S_{\triangle CDE}$

$3 \geq 25$

$\frac{50}{75} \leq 3y$

$\frac{50}{75}$

$\frac{50}{15}$

$0 \leq y - 20 - y + 20 \leq 15$

$0 \leq 50 - y \leq 15$

$y \geq 35$

$y \leq 50$

$0 \leq \sqrt{225 - z^2} \leq 15$

t_1

$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ / $\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{l}{t}$

$a \cdot \sin\beta \cdot \frac{2}{\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$

① $0 \leq |y - 20| + 2|y - 35| \leq 15$

$0 \leq y - 20 + 2y - 70 \leq 15$

$0 \leq 3y - 90 \leq 15$

$y \geq 30$

① $y \geq 35$

$y = 35$

$3y \leq 105$

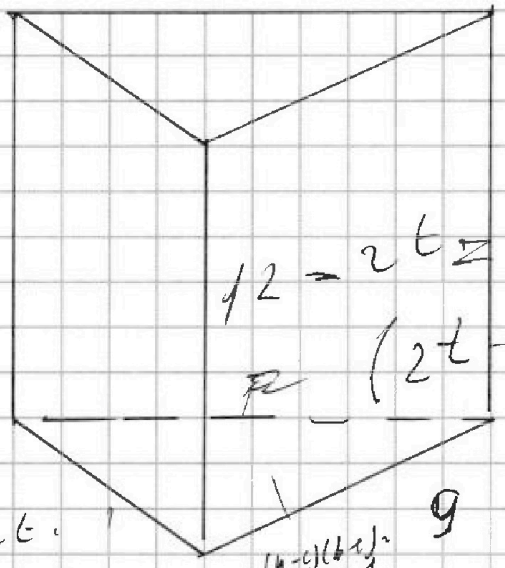
$y \leq 35$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$12 - 2t =$

$= (2t-6)^2$

9

$3+5=8$ $+5=13$ ± 4

$3+5$ $30+28$

$a>b$ $a+b=820$

$(a-b)\vdots 3$

$(a-c)(b-c)=p^2$

$ab-ac-cb+c^2$

$ab-c(a+b)$

$ab-c(a+b)$

$12-2t$

$=4t^2-24t+36$

$6-t=t^2-12t+18$

$2t^2-11t+12=0$

$(a-c)(b-c)=9$

$a=$

$(t-4)(2t-1)$

$16+4\cdot 31=$

$t^2-11t+12$

$4(4+31)$

$4\cdot 35$

$10+4=a$ $\sin\alpha=\frac{h}{x}$ $\sin\alpha\cdot x\cdot 2=5$

$x^2+2x-19=0$

(1) $a-b=3k+1$

(2) $a-b=3k+2$ $(a-c)(b-c)=p^2$

$a=3k+1+b$ $3k+1+b+b^2=820$

$ab-c(a+b)+c^2=p^2$

$(3k+1+b)b-c(3k+1+2b)+c^2=p^2$

$(820-b^2-c)(b-c)=p^2$

$820b-820c-b^3+b^2c-bc+c^2=p^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$225 - z^2 \geq 0$

$z \in [-15; 15]$

$x \geq -7$

~~$y - 2x +$~~

$y - 2x - x^2 + z \geq 0$

$A \in [-1; 1]$

$5 - x - 3z \geq 0$

$y + z \geq x^2 + 2x$

$5 \geq x + 3z$

$y + z + 1 \geq (x+1)^2$

$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$

$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 3(4t^2 - 4t + 1) \geq 0$

$= 3(2t-1)^2 \geq 0$

$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$

$-y + 20 - 2y + 30 = \sqrt{225 - z^2}$

$-3y + 50 = \sqrt{225 - z^2}$

$4t^3 - 3t + 6t = 6t^2 - 3t + p$

$\sqrt{225 - z^2} = 50 - 3y$

~~$\sqrt{225 - z^2}$~~

~~$\cos 4x(2\cos^2 x$~~

$3(2\cos^2 x - 1)$

$= 3(2t^2 - 1)$

$-4 - 6 - 3 + 3 = -10$

$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 4x + p$

$4 - 6 + 3 + 3 = 4$

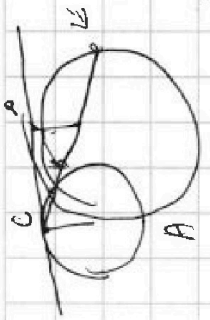
$f(x) = (\cos 3x + 6\cos x - 3\cos 4x)'$

$f(x) = -\sin 3x \cdot 3 - 6\sin x + 3 \cdot 2 \cdot \sin 4x =$

$= 6\sin 4x - 6\sin x - 3\sin 3x =$

$= 3(2\sin 4x - 2\sin x - \sin 3x)$

$2 \cdot 5 = 10$



$\cos 3x$ $\cos(x + 2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x =$

$= \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2\sin^2 x \cdot \cos x =$

$= \cos^3 x - \cos x \cdot \sin^2 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x =$

$= \cos^3 x - 3\sin^2 x \cdot \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x)\cos x =$

$= \cancel{\cos 3x} + \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x =$

$= 4\cos^3 x - 3\cos x$

6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$-\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$

$a-b=p^2-1$

$p\neq 1$

$a-b=(p-1)(p+1) \Rightarrow p\vdots 3$

$a-b\vdots 3$

$a\vdots 3$, $c\vdots 3$

$a-c=-1$

$b-c=-p^2$

$-\begin{cases} a-b=p^2-1 \\ a+b=820 \end{cases}$

$a\equiv_3 1$, $c\equiv_3 1$

$b-1\equiv_3 1$

$b\equiv_3 2$

$a=3k-2$

$b=3k$

$a=3k$, $b=3k-1$, $p=3t$

$3k-2+9k^2=820$

$9k^2+3k-822=0$

$3k^2+k-274=0$

$D=1+4\cdot 3\cdot 274=3289$

$9k^2-3k+1=820$

$9k^2-3k-819=0$

$3k^2-k-273=0$

$D=1+273\cdot 3\cdot 4=3277$

$a=3k-1$; $b=3k-2$

$3k-1+9k^2-12k+4=820$

$9k^2-9k-817=0$

$D=9^2+4\cdot 9\cdot 817=9(9+4\cdot 817)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(a-c)(b-c)=p^2$ $p\neq 1$

$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$

$a-b=p^2-1$ $p=5$ $p=3$

$a-b=(p-1)(p+1)$

$a-b=8$ $a=8+b$

$8+b+b^2=820$

$b^2+b-812=0$

$D=1+812\cdot 4=3249=57^2$

$D_1=\frac{-1\pm 57}{2}=-28/-29$

$b=p^2-1=c$

$a-1=c$

$57-1=56/28$

$a=30$ $b=-29$ $8+b$

$-2=4$ $-29+8$

$-21-1=c$ $c=-22$

$b=28$ $a=36$ $c=27$

$a+b=0$

$-7-x+12$ $-3+c$

$x+z+5-x-3z=$ $3(4-z)$

$12-3z$

$2\sqrt{y-2x-x^2+z}=(1+\sqrt{y-2x-x^2+z})^2-1-y+2x+x^2+z$

$2\sqrt{t}=(\sqrt{t}-1)^2+t+1=y-2x-x^2+z+1$

$t=2\sqrt{t}+1$

$-t+\sqrt{t}-1$

$y=35$ $z=0$

$y=8$

$y=55$

$y=35$

$y=35$

$y=35

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ ■ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

$b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-5)^3}}$ $\quad 60 \quad -3y \le 15$

$b_1 \cdot q^{n} = x+y$ по ч.

$y-20 \quad -2y+20$

$-80-y$

$b_1 \cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-5)}$

$q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-5)}}{x+y} = \frac{12}{96} - \frac{21}{96}$

$\frac{81}{2^3}$

$\frac{(15x+6)^4(x-5)}{(x+y)^2} = q^4$, $\quad \frac{(15x+6)^2(x-5)^2}{(x+y)^4} =$

$(t-4)(2t-3)$

$\frac{(15x+6)(x-5)}{(x+y)^2} = (x-5)$

$2t^2-3t-8t+12$

$2t^2-11t+12$

$x \ge 5$

$\sqrt{81} \cdot 2 = 9\sqrt{2}$

$x \ne 5$

$\sqrt{\frac{81}{23}} = \frac{9}{\sqrt{23}} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$

$(x-5)\left(\frac{15x+6}{(x+4)^2} - 2\right) = 0$

$(x+4)^2 = x^2+8x+16$

$t-p+6 = 2tp$

$15x+6 = x^2+8x+16$

$x^2-7x+10=0$

$(x-5)(x-2)=0$

$x^2+2x+16-35=0$

$x^2+2x-19=0$

$x-3<0$

$15x+6 = -x^2-8x-16$

$x^2+23x+22=0$

$(x+1)(x+22)=0$

$x=-22$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$3+4+5+5+4+4+6 =$

$= 20+8+3 = 31$

$b_4 = b_1 \cdot q^3$, $b_{10} = b_1 \cdot q^9$

$b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = b_1 \cdot q^{11}$

$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x$ ер.

$\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x =$

$= \cancel{\cos x \cdot (2\cos^2 x - 1)} = \cos x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 3x = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x$

$3(2\cos x - \cos 2x) = 3(2\cos x - 2\cos^2 x + 1$

$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = \sqrt{\frac{a}{b^3}} = b_1 \cdot q^3$

$\begin{cases} 15x+6 = a \\ x-3 = b \end{cases}$ $x+4$

$15x - x + 6 + 3 = 14x + 9$

$15x+6 - 14x + 3 \cdot 4 =$

$= x$

$b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$

$b_1 \cdot q^9 = x+4$

$b_1 \cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$

$\cancel{15x+45 = 15(x+}$

$15x - 45 = 15(x-3)$

$15x - 45 + 45 + 6 = 51 + 15x - 45$

$\frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0$, $(15x+6)(x-3) \geq 0$

$x_1 = -\frac{6}{15} = -\frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 3}$

$\sqrt{(x-3)^4} = (x-3)^2$

$\cancel{x \in [-\frac{2}{5}}$

$x \in (-\infty; -\frac{2}{5}] \cup (3; +\infty)$

$q^8 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}\sqrt{(x-3)^3}}{\sqrt{15x+6}}$

$q^4 = |x-3|$

$q^8 = (x-3)^2$

$q = (x-3)^{\frac{2}{8}} = (x-3)^{\frac{1}{4}}$

$q \cdot \sqrt[8]{(x-3)^2}$