МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5

1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x+3$, пятый член равен $(x^2+2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y+8x$ при условии

$$\begin{cases} |x-3y| \leqslant 3, \\ |3x-y| \leqslant 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 10$, $AN = 8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Т.к м/у 3 и 5 членами – 2 разницы прогрессии, а м/у 5 и 9 – 4 разницы прогрессии, то $4((x^2+2x)^2-3x-3)=2(3x^2-(x^2+2x)^2) \mid :2$

$2(x^4+4x^3+4x^2-3x-3)=3x^2-x^4-4x^3-4x^2$

$3x^4+12x^3+9x^2-6x-6=0 \mid :3$

$x^4+4x^3+3x^2-2x-2=0$

$x=-1$ – корень, т.к $(-1)^4+4(-1)^3+3(-1)^2-2(-1)-2=0$

$1-4+3+2-2=0$ – верно

=) по следствию из т.Безу:

$x^4+4x^3+3x^2-2x-2=(x+1)(x^3+3x^2-2)=0$

$x=-1$ – корень $x^3+3x^2-2=0$, т.к $-1+3-2=0$

=) по следствию из т.Безу:

$x^4+4x^3+3x^2-2x-2=(x+1)^2(x^2+2x-2)=0$

$x+1=0$ или $x^2+2x-2=0$

$x=-1$ $\quad D=4+8=12$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$

Данное ур-е необх и дост. для такой прогрессии =) $x=-1$; $x=-1+\sqrt{3}$; $x=-1-\sqrt{3}$ Ответ: $-1-\sqrt{3}$; $-1+\sqrt{3}$; -1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \le 3; \\ |3x-y| \le 1. \end{cases} \qquad \max(4y+8x) - ?$$

• При $(x,y) = \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$:

$$|x-3y| = \left|\frac{3}{4} - \frac{3\cdot 5}{4}\right| = \left|-\frac{12}{4}\right| = 3 \le 3 \text{ - верно}$$

$$|3x-y| = \left|\frac{3\cdot 3}{4} - \frac{5}{4}\right| = |1| = 1 \le 1 \text{ - верно}$$

$$4y+8x = 4\cdot\frac{5}{4} + 8\cdot\frac{3}{4} = 5+6 = 11$$

• Рассмотрим случаи:

1сл $\begin{cases} x \ge 3y; \\ 3x \ge y. \end{cases}$ => модули $|3x-y|$ и $|x-3y|$ раскрываются без изменений:

$$\begin{cases} x-3y \le 3. \ (1) \\ 3x-y \le 1. \ (2) \end{cases} \qquad x \ge 3y \overset{(2)}{\ge} 3(3x-1)$$

$$x \ge 9x-3$$

$$8x \le 3$$

$$x \le \frac{3}{8} \Rightarrow \cancel{\text{из}(1): 3y \le x-3}$$

$$\cancel{y \le \frac{x-3}{3} = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}.}$$

$$y \le 3x \le \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow 4y+8x \le 4\cdot\frac{9}{8} + 8\cdot\frac{3}{8} = \Rightarrow \cancel{4y+8x \le 4\cdot\left(-\frac{7}{8}\right) + 8\cdot\frac{3}{8} = -\frac{7}{2}+3 = -\frac{1}{2} < 11.}$$

$$= \frac{9}{2} + 3 = 7{,}5 < 11.$$

2сл $\begin{cases} x \ge 3y; \\ 3x \le y. \end{cases} \Rightarrow x \ge 3y \ge 9x$

$8x \le 0$ $x \le 0$, тогда $0 \ge x \ge 3y \Rightarrow$

$\Rightarrow y \le 0$, но тогда $4y+8x \le 0$ и значит $4y+8x < 11$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(2сл) $B = 13p^2$ и $A = 75q^2$

~~$mn(m+n-3) = 13p^2$~~

~~Л.Ч. ⋮ 2, т.к. gb~~

$(m+n)(m+n-9) = 75q^2$

Л.Ч. ⋮ 2, т.к. $(m+n)$ и $(m+n-9)$ – целые числа разной четности

$\Rightarrow 75q^2 \vdots 2 \Rightarrow q \vdots 2 \Rightarrow q = 2$, т.к. q-пр.

Пусть $m+n=k$, тогда

$k(k-9) = 300$

$k^2 - 9k - 300 = 0$

$D = 81 + 4 \cdot 300 = 1281 \neq S^2$, где $S \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow k \notin \mathbb{Z}$, но $k \in \mathbb{N}$ – противоречие

$\Rightarrow$ решений нет

Ответ: $(10;3)$; $(3;10)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = m^2+2mn+n^2-9m-9n = (m+n)(m+n-9)$

$B = m^2n+mn^2-3mn = mn(m+n-3)$.

1сл $A = 13p^2$

$(m+n)\cdot(m+n-9) = 13p^2$

Л.Р. $\vdots 2$, т.к два целых числа отл на 9 => одно из них $\vdots 2$ => $13p^2 \vdots 2$ => $p \vdots 2$ => $p = 2$, т.к p-пр.

$(m+n)(m+n-9) = 52$

Пусть $m+n=k$, $k>0$, т.к $m, n \in N$, тогда $k^2-9k-52=0$

$D>0$, по т. Виета

$k_1 = 13$; $k_2 = -4$ – не удовл усл

=> $m+n=13$.

$B = 75q^2$

$mn(m+n-3) = 75q^2$

$10mn = 75q^2$

$2mn = 15q^2$ Л.Р $\vdots 2$ => $15q^2 \vdots 2$ => $q = 2$, т.к q-пр

$2mn = 60$

$mn = 30$

=> $\begin{cases} m+n=13 \\ mn=30 \end{cases}$ => (10;3) и (3;10) – решения

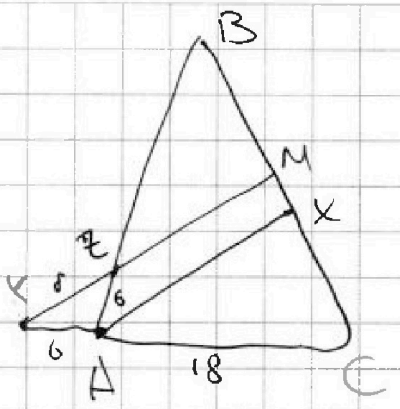
Из выкладок ясно, что оба решения подходят.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Дано: $AC=18$; $AZ=6$; $YZ=8$.

BC-? Решение

1) $\angle BAX=\angle XAC$, т.к AX-бисс

$\angle BAX=\angle YZA$, т.к $YM \parallel AX$

$\angle XAC=\angle MYC$, т.к $YM \parallel AX$

$\Rightarrow \triangle YZA$ - равнобедр $\Rightarrow AZ=AY=6$.

2) По т. Фалеса; т.к $AX \parallel YM$: $\frac{AC}{AY}=\frac{CX}{XM}=$

$=\frac{18}{6}=3$.

Пусть $CX=3a \Rightarrow XM=a$.

$BM=MC=4a$, т.к M-сер BC

По т. Фалеса, т.к $ZM \parallel AX$: $\frac{BZ}{AZ}=\frac{BM}{MX}$

$\frac{BZ}{6}=\frac{4a}{a} \Rightarrow BZ=24. \Rightarrow AB=30$.

3) По т. синусов $\triangle AZY$: $\frac{6}{\sin\angle ZYA}=$

$=\frac{8}{\sin(2\angle ZYA)} \Rightarrow 6\cdot 2\cdot \cos\angle ZYA=8$

$\cos\angle ZYA=\frac{2}{3}$.

По ранее доказанному: $\angle BAC=2\angle ZYA$

$\Rightarrow \cos\angle BAC=\cos(2\angle ZYA)=\cos^2\angle ZYA-\sin^2\angle ZYA=$

$=2\cos^2\angle ZYA-1=2\cdot\frac{4}{9}-1=-\frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

По т. косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC} =$$

$$= \sqrt{30^2 + 18^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)} = \sqrt{900 + 324 + 120} =$$

$$= \sqrt{1344} = 4\sqrt{84} = 8\sqrt{21}$$

Ответ: ~~$4\sqrt{84}$~~. $8\sqrt{21}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}-\sqrt{6-y}+5=2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4+5x^2+\sqrt{x}=y^4+5y^2+\sqrt{y} \end{cases}$$

ОДЗ: $x+1\geq 0$, $6-y\geq 0$, $6+5x-y^2\geq 0$, $x\geq 0$, $y\geq 0$

Пусть $x>y$, тогда $\sqrt{x}>\sqrt{y}$ и $x^4+5x^2>y^4+5y^2$, чего быть не может. Аналогично, если $y>x$.

$\Rightarrow x=y$.

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{6-x}+5=2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

Пусть $\sqrt{x+1}-\sqrt{6-x}=2\sqrt{(x+1)(6-x)}-5$ Возв в кв:

$$x+1-2\sqrt{(x+1)(6-x)}+6-x=4(x+1)(6-x)-20\sqrt{(x+1)(6-x)}+25$$

$$4(x+1)(6-x)-18\sqrt{(x+1)(6-x)}+18=0$$

Пусть $\sqrt{(x+1)(6-x)}=t$, тогда

$$4t^2-18t+18=0 \quad |:2$$

$$2t^2-9t+9=0$$

$D=81-4\cdot 2\cdot 9=9>0 \Rightarrow$ 2 корня

$t=\frac{9\pm 3}{4}$. $t_1=\frac{9+3}{4}=3$, $t_2=\frac{9-3}{4}=1{,}5$.

<u>1сл</u> $t=3 \Rightarrow \sqrt{(x+1)(6-x)}=3$

$$(x+1)(6-x)=9$$

$$6+5x-x^2=9$$

$$x^2-5x+3=0$$

$D=25-4\cdot 3=13>0 \Rightarrow$ 2 корня

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$. – оба знач удовл. ОДЗ

2сл $t = \frac{3}{2}$

$\sqrt{(x+1)(6-x)} = \frac{3}{2}$

$6 + 5x - x^2 = \frac{9}{4} \mid \cdot 4$

$24 + 20x - 4x^2 = 9$

$4x^2 - 20x + 15 = 0$

$D = 20^2 + 4 \cdot 4 \cdot 15 = 400 + 240 = 640 > 0 \Rightarrow$

2 корня

$x = \frac{20 \pm \sqrt{640}}{8} = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{10}$.

$\frac{5}{2} - \sqrt{10} < 0 \Rightarrow$ не удовл ОДЗ

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right); \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right); \left(\frac{5}{2}+\sqrt{10}; \frac{5}{2}+\sqrt{10}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Разобьем все способы раскраски на 2 случая: 2 белые симм. отн центр. узла и остальные.

(1 сл) 2 белые симм отн. центр узла, тогда способов: $\frac{81-1}{2}=40$, т.к всего узлов - 81., но ещё делим на 2, т.к 40 способов разбиваются на 20 пар, где способы в паре отл. поворотом на 90°.

=> 20 способов.

(2 сл) 2 белые клетки не симм. отн. центр. узла, способов выбрать: (C_{81}^2-40), но ещё делим на 4, т.к (C_{81}^2-40) способов разб. на четверки, в каждой четверке 4 поворота одного способа (т.к клетки не симм отн центра, то все способы в четверках различны) => способов - $\frac{C_{81}^2-40}{4}=\frac{81\cdot 80}{8}-\frac{40}{4}=810-10=800$.

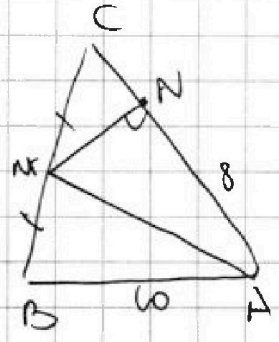
Всего способов: 800+20=820 Ответ: 820.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\angle MNA$ – пр, т.к AM – диаметр Ω.

Пусть $BM = MC = a$, тогда

$CN = CA - AN = 2a - 8$.

• $MN = \sqrt{MC^2 - CN^2} = \sqrt{a^2 - 4a^2 + 32a - 64} =$

$= \sqrt{-3a^2 + 32a - 64}$ по т. Пифагора в $\triangle CMN$.

• $AM = \sqrt{\frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{200 + 4a^2}{4}} = \sqrt{a^2 + 50}$

по формуле медианы

• По т. Пифагора в $\triangle AMN$:

$AN^2 + MN^2 = AM^2$

$64 - 3a^2 + 32a - 64 = a^2 + 50$

$4a^2 - 32a + 50 = 0 \quad |:2$

$2a^2 - 16a + 25 = 0$

$D = 16^2 - 4 \cdot 2 \cdot 25 = 256 - 200 = 56$

$a = \frac{16 \pm \sqrt{56}}{4} = 4 \pm \sqrt{13}$

Но если $a = 4 - \sqrt{13}$, то $BC + CA < AB$

$2(4 - \sqrt{13}) < 40$

$6 < 4\sqrt{13}$ – верно, т.к $\sqrt{13} > 3$. $\Rightarrow a = 4 - \sqrt{13}$ не подх

А значит $a = 4 + \sqrt{13}$.

$\Rightarrow BC = CA = 8 + 2\sqrt{13}$

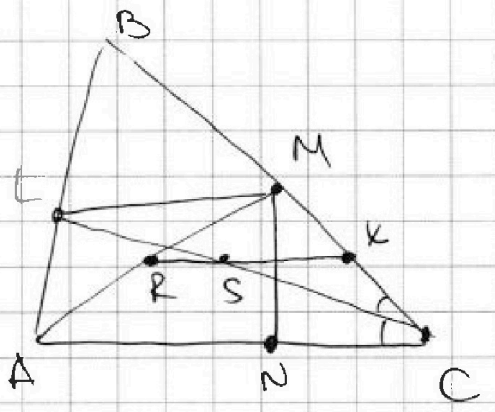
Ответ: $BC = CA = 8 + 2\sqrt{13}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$AB=10$; $AN=8$. $AC-?$ $BC-?$

Решение

1) Пусть R – сер $AM \Rightarrow R$ – центр Ω, пусть S – сер. $CL \Rightarrow S$ – центр ω.

$PQ \perp RS$, т.к PQ – рад. ось ω и $\Omega \Rightarrow$ рад. ось перп. линии центров.

Высота из B в $\triangle ABC \perp AC$ и $\parallel PQ$

$\Rightarrow PQ \perp AC \Rightarrow RS \parallel AC$.

2) Пусть $RS \cap BC = X$ ($RS \parallel AC \Rightarrow RS \nparallel BC$)

т.к $RS \parallel AC$, то X – сер MC.

RX – ср. линия $\triangle AMC \Rightarrow \angle MXS = \angle MCA = 2\angle XCS$.

$\Rightarrow \angle XSC = \angle MXS - \angle XCS = \angle XCS$

Т.к SX – ср. линия $\triangle LMC$, то $\angle XSC = \angle MLC = \angle MCL$. $\Rightarrow LM = MC = BM$, а значит $LC \perp AB$

$\Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедр с $BC = AC$.

3) Перерисуем картинку:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4+5x^2-\sqrt{y} = y^4-\sqrt{x}+5y^2 \end{cases}$$

$x^4+5x^2+\sqrt{x} = y^4+5y^2+\sqrt{y}$

$\Rightarrow x=y$

$x+1\geq 0$

$6-x\geq 0$

$6+5x-x^2\geq 0$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{6-x}+5=2\sqrt{6+5x-x^2}$

$\sqrt{x+1}=t \quad \sqrt{6-x}=s$

$t+s+5=2\cdot ts$

$x+1+6-x-2\sqrt{(x+1)(6-x)}=$

$=4(6+5x-x^2)-20\sqrt{\ }$

$24+20x-4x^2+18=$

$=18\sqrt{\ }$

$42+20x-4x^2=$

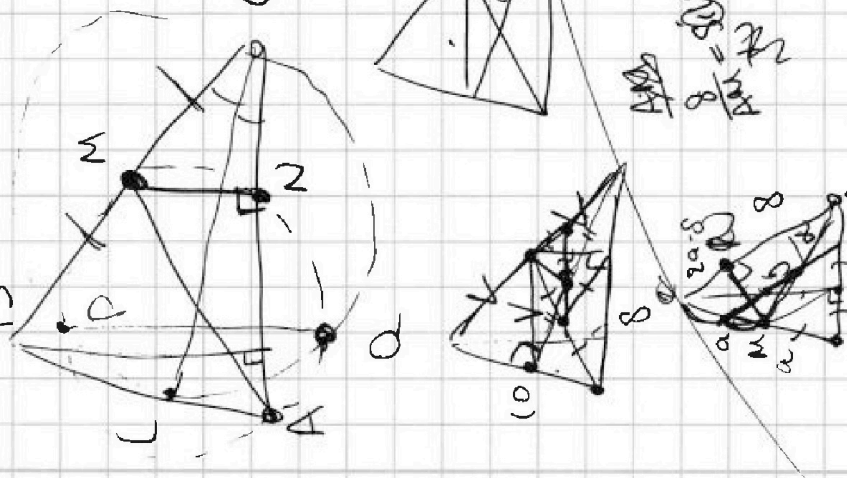
$=18\sqrt{6+5x-x^2}$

$42^2+400x^2+16x^4$

$+40\cdot 42x-160x^3$

$-336x^2$

$=18^2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3сл $\begin{cases} x \le 3y; \\ 3x \le y. \end{cases}$ Оба модуля раскроются с „-":

$\begin{cases} 3y - x \le 3; & (1) \\ y - 3x \le 1. & (2): \end{cases}$

(1): ~~$y \le 3x+1 \le 9y+1$~~

$8x \ge 3y - 3 \ge 3 \cdot 3x - 3 = 9x - 3$

$8x \le 3$

$x \le \frac{3}{8} \Rightarrow 3y \le x+3$

$y \le \frac{x}{3} + 1 = \frac{9}{8}.$

$4y + 8x \le 4 \cdot \frac{9}{8} + 8 \cdot \frac{3}{8} = 7,5. < 11$

4сл $\begin{cases} x \le 3y; \\ 3x \ge y. \end{cases}$ $|x-3y|$ раскроется с „-"

$|3x-y|$ раскроется без изм.

$\begin{cases} 3y - x \le 3 \ (1) \\ 3x - y \le 1 \ (2) \end{cases}$ ~~$2x+2y \le 4 \ | \cdot \frac{3}{2}$~~ ~~$3x+3y \le 6$~~

~~$y+3y$~~

~~$\Rightarrow y \le \frac{3}{2}$~~

$y \le \frac{x+3}{3}$

(1): ~~$3y \ge x \ge 3y$~~

4y

(2): $y \ge 3x - 1$

$\frac{x+3}{3} \ge 3x - 1$

$x + 3 \ge 9x - 3$

$8x \le 6$

$x \le \frac{3}{4} \Rightarrow y \le \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

$4y + 8x \le 4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 11.$

$\Rightarrow 4y + 8x \le 11$ и при $(x, y) = \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$: $4y + 8x = 11$

Ответ: 11

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \le 3 \\ |3x-y| \le 1 \end{cases} \qquad \max(4y+8x)?$$

$3x-y \le 1$, то $3x \ge y$

$y \ge 3x-1$

$y \ge \frac{x-3}{3}$

1 сл: $x \ge 3y \ge x-3$ $\quad x-3y \le 3$ $\quad x \le 3+3y$

$3x \ge y$ $\quad 3x-y \le 1$ $\quad y \ge 3x+1$

2 сл: $x \ge 3y \ge 3x$ $\quad x \le 3y+3$

$3x \le y$

$4y+8x \le 28y+24.$

$x \ge 9x$

$8x \le 3$

$8x \le 0$

$x \le 0$

$4 \cdot \frac{9}{8}+3 =$

$= \frac{9}{2}+3 = 7,5$

$x \ge 3y \Rightarrow y \le \frac{x}{3}$

$\Rightarrow 4y+8x \le 8y \le \frac{x}{3} \le \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

– нет

Равенство при $y = 3x = \frac{9}{8}$, $x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{9}{8}$.

$\frac{3}{8}$ и $\frac{1}{8}$. $= 3,5$

3 сл: $x \le 3y$ $\quad 3y \le 3+x$

$3x \ge y$ $\quad 3x \le y+1$

$8x \ge 0$ $\quad y \ge 3x-1$

$y \le 1+\frac{x}{3}$

$3x-1 \le 1+\frac{x}{3}$

$9x-3 \le 3+x$

$8x \le 6$

$x \le \frac{3}{4}$

$5+6 = 11$

$8x \le 0$ нет

$x \le 0$

4 сл: $3y \le x$ $\quad y \le 3x+3$

$3x \le y$ $\quad 3y \le x+3$

$y \le 3x+1$

$y \le \frac{9}{2}$

$18+12 = 30$!!!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\frac{4-3\sqrt{3}}{2}\cdot 6 + 3\sqrt{3} = 12-6\sqrt{3}$

$a = 3\sqrt{3}$ ✓

$a+2d=4$

$a+6d = 12-6\sqrt{3}$

$\frac{((\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1))^2}{3-2\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}-2}$

$$\begin{cases} a+2d = 3x+3 \\ a+2d = (x^2+2x)^2 = x^4+4x^3+4x^2 \\ a+6d = 3x^2 \end{cases}$$

1→2 $\quad 3x+3+2d = x^4+4x^3+4x^2 \quad (*)$

1→3 $\quad 3x+3+7d = 3x^2$

$d = \frac{3x^2-3x-3}{7} \longrightarrow (*)$: $\quad \frac{x^2-x-1}{2}$

$3x+3+\frac{6x^2-6x-6}{7} = x^4+4x^3+4x^2$

$21x+21+6x^2-6x-6 = 7x^4+28x^3+28x^2$

$7x^4+28x^3+22x^2-15x-27=0$ $\quad$ al'ЗО

$28\cdot 4 - 28\cdot 8 + 22\cdot 2\cdot 2 - 15\cdot 2 - 27$

$-28\cdot 4 + 22\cdot 4$

-24

$018 = 2$

$= h: 018\cdot 18$

mod 7

x	x^2-x-1
0	-1
1	-1
2	1
3	11
4	19
5	6

$7(x^2+2x)^2-3x-3) = 2(3x^2-3x-3)$

$x^2-x-1 \equiv 0$

$\cancel{7x^4+28x^3+22x^2-15x-15=0}$

$6x^4+24x^3+18x^2$ al'ТЗО :m

$828-81+018 = h/8\cdot 6 + 8/018\cdot 18 + ТЗ$ h: ЗОV2h

$3x^4+12x^3+9x^2-6x^2-6=0$

$x^4+4x^3+3x^2-2x-2=0$

$x=-1: (x+1)(x^3+3x^2-2)=0$

$(x+1)^2(x^2+2x-2)=0$ $\quad D=12$ $\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2} = -1\pm\sqrt{3}$

0 1 ✓ 3

$3(\sqrt{3}-1)^2 = 3(3-2\sqrt{3}+1) = 9-6\sqrt{3}+3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(\cancel{m+n-9})($

$mn(m+n-3)=1$

Если $\cancel{m\neq1, n\neq1, m+n-3\neq1}$, то

$(m+n)\cancel{(m+n-9)}=7$

$m=13p$

$n=1$

$m+n$

13

p

$m+n-3$ p — нет

p

p

$m+n-3$ 13 — нет

$\Rightarrow m=1$, или $n=1$ или $m+n-3=1$

$m+n=4$

$mn=13p^2$

$n(n-2)=13p^2$ $m(m-2)=13p^2$

нет нет

нет

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{9}{49}-\frac{40}{49}=-\frac{31}{49}$

$=\frac{4}{9}-\frac{5}{9}=-\frac{1}{9}$

$\frac{4}{3}a$ $\frac{8}{\sin2\alpha}=\frac{6}{\sin\alpha}$

$8=6\cdot2\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

$30^2+18^2+2\cdot30\cdot18\cdot\frac{1}{9}$

$900+324+120$

$\sqrt{1344}$

$1344 \mid 4$, $336 \mid 4$, 84

$112\cdot3\cdot4$

$56\cdot3\cdot4\cdot2$

$28\cdot3\cdot44$

$4^3\cdot3\cdot7$

$4\sqrt{84}$

$\frac{36\pm\sqrt{1096}}{2}=9\pm\sqrt{274}$

$9+\sqrt{274}$

$MN=\sqrt{a^2-4a^2+32a-64}$

$=\sqrt{50+a^2}$

$=\sqrt{2\cdot60+2\cdot2a^2}$

$D=36^2-$

$A-8\cdot25=1096$

$\sqrt{a^2+3b^2\cdot c^2}$

$\frac{3}{8}=\cos\beta$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5 (m,n) — ?

$A = m^2+2mn+n^2-9m-9n$

$B = m^2n+mn^2-3mn$

Одно $=13p^2$

другое $=75q^2$,

где $p,q\in P$.

$m^2+2mn+n^2-9m-9n=13p^2$

$m^2n+mn^2-3mn=75q^2$

$mn(m+n-3)=75q^2$

$mn(m+n-3)=75q^2$

$10mn=75q^2$

$(m+n-\frac{9}{2})^2+\frac{81}{4}=75q^2 \mid \cdot 4$

$(2m+2n-9)^2+81=300q^2$

очевидно $\Rightarrow q=2$

$(10;3)$

$m^2+n^2+2mn-9m-9n=A$

$mn=30$

$m+n=13$

$4A=4m^2+4n^2+8mn-36m-36n=$

$=(2m+2n-9)^2-81$

$4m^2+4n^2+81$

$(m+n-\frac{9}{2})^2-\frac{81}{4}=13p^2 \mid \cdot 4$

$(2m+2n-9)^2-81=52p^2$

$(2m+2n-18)(2m+2n)$

$(m+n-9)(m+n)=13p^2$

$(m+n-\frac{9}{2})^2+\frac{81}{4}=13p^2$

$(m+n-\frac{9}{2})(m+n-\frac{3}{2})$

$m^2+mn+nm+n^2$

$13p^2-\frac{81}{4}=(s-\frac{1}{2})^2=$

$=s^2-2s+\frac{1}{4}$

$\cdot 4$

$(2m+2n-9)^2-81=4\cdot 13p^2$

$\equiv 4$ $\equiv 4$

3 1 0

$m+n\pm 13$

$\begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9=p^2 \end{cases}$

$p=2$

$\begin{cases} m+n=p^2 \\ m+n-9=13 \end{cases}$

$p^2=22$ — нет

$m+n \Rightarrow m+n-9$

$\begin{cases} m+n=13p^2 \\ m+n-9=1 \end{cases}$ — нет

$\begin{cases} m+n=13p \\ m+n-9=p \end{cases}$ — нет

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!