



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0, \text{ где } x_1 \neq 0 \text{ и } x_2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$D > 0 \Rightarrow D = 32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2 \Rightarrow 36 - 4t^2 > 0$$

$$36 > 4t^2 \Rightarrow t^2 < 9$$

Поскольку произв. корней $> 0 \Rightarrow$ по т. Виета

произв. корней = свободному члену $\Rightarrow 9t^2 - 9 > 0$

$$\Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow 1 < |t| < 3 \Rightarrow t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

При таком t $D > 0$ и $9t^2 - 9 > 0 \Rightarrow$ уст. раб.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19\rho^4 =$$

$$= (a^2 + ab + 3a) + (b^2 + ab + 3b) = a(3 + a + b) + b(3 + a + b)$$

$$= (a + b)(3 + a + b) = 19\rho^4$$

$$\rho \text{ и } 19 - \text{прост. числа, } \Rightarrow a + b = 19^m \cdot \rho^{m'}$$

$$3 + a + b = 19^n \cdot \rho^{n'} \Rightarrow n + m = 1; n' + m' = 4$$

$$\text{Если } n \neq 0, m \neq 0 \Rightarrow (3a + b) - (a + b) \vdots \rho \Rightarrow 3 \vdots \rho$$

$$\Rightarrow \rho = 3, \text{ но мы 1 из условия будем } 19 \text{ и } 3 \Rightarrow$$

$$\text{она } \vdots 57 \Rightarrow \text{она } \geq 57 \Rightarrow \text{гр. будем } \leq 3^3, \text{ мы ост.}$$

$$\text{мы } 3\rho, \text{ но } 57 - 3 > 22 \Rightarrow n = 0 \text{ или } m = 0$$

$$\Rightarrow \text{какая-то степень} = \rho^4, \text{ а гр. } 19, \text{ мы } 19\rho^4 > 113.$$

$$\text{Если } a + b = 19 \Rightarrow a + b + 3 = \rho^4 = 22, \text{ но } \sqrt[4]{22} \notin \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a + b = \rho^4 \Rightarrow a + b + 3 = 19 \Rightarrow a + b = 16, \Rightarrow \rho = 2.$$

$$\begin{cases} a + b = 16 \\ 2a = 28 \end{cases} \Rightarrow a = 14$$

$$\begin{cases} a + b = 16 \\ a - b = 12 \end{cases} \Rightarrow b = 16 - a = 2. \Rightarrow \underline{a = 14, b = 2}$$

$$AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = BC^2, \text{ так } DC = AB, \text{ а } AC = \frac{BC}{2} = 27$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = 2AC \Rightarrow 4AC^2 + AC^2 - 2 \cdot 2AC \cdot AC \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 6^2$$

$$8AC^2 = 6^2 \Rightarrow 2AB^2 = 6^2 \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{6^2}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

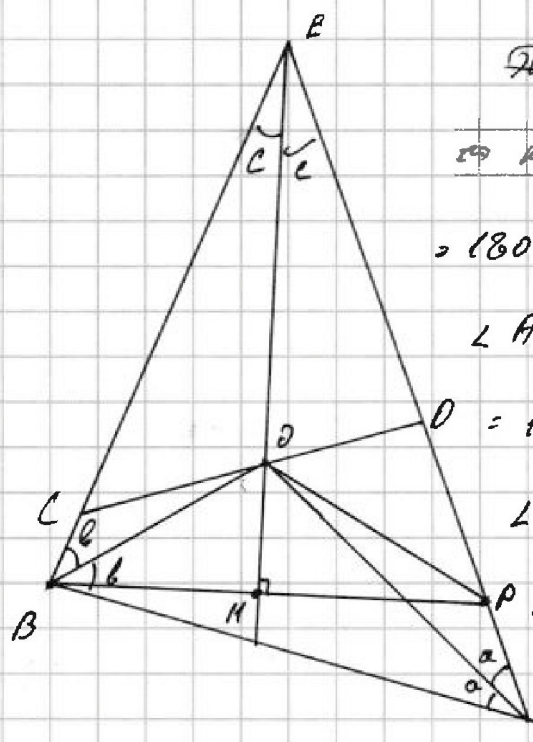
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Предполож., что $\angle EAB < \angle EBA$

т.к. $ABEP$ - вписан $\Rightarrow \angle ABE + \angle ADE$

$= 180^\circ$; $\angle BAD + \angle BED = 180^\circ$, т.

$\angle ADC + \angle CDE = 180^\circ$ и $\angle ECD + \angle BCD$

$= 180^\circ$, т.к. они смежные. $\Rightarrow$

$\angle EBA = \angle EDC$; $\angle ECD = \angle BAB$.

AO - биссектр. $\angle BAD$; BO - биссектр.

$\angle EBA$, т.к. O - центр впис.

Провед. $BP \perp EO$ $\Rightarrow \triangle BEP$ - равноб., т.к. EO - и бис.

и высота $\Rightarrow \triangle BOP$ - равноб., т.к. для него EO -

и бис. и $\perp$ межд. и высота. $\Rightarrow \angle OBP = \angle OPB$

$\angle BOH = \angle COH - \angle COB = \angle EOP - \angle ECD + \angle EBO =$

$= \angle EEO + \angle CEO + \angle EBO - \angle ECD = \alpha + \beta = \angle POH$

$\Rightarrow \angle POD = \angle HOP - \angle POH = \angle EDC + \angle EEO - \angle POH =$

$= 2\beta - \beta - \alpha + \alpha = \beta \Rightarrow \angle EDO = \angle DOC + \angle OPD \Rightarrow$

$\angle OPD = 2\beta - \beta = \beta \Rightarrow OP = DP$. т.к. $\triangle BEP$ - равноб.

$\Rightarrow EB = EP = ED + DO = 12 \Rightarrow$ в любом случ. $ED + DO = 12$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пти в камую берёвку из любой может попасть
эт маршрут. $\Rightarrow$ это граф с 1 нодой связи и
без циклов, т.е. такие почти линейные структуры
или несколько раз и поочередно новых маршрутов
 $\Rightarrow$ это дерево. В дереве на n верш. ровно
 $n - 1$ дорога, т.е. всегда будут верш. с степ.
верш. $= 1$ и можно её уда и соедин. с кем-то верш.
и дорог. на 1 $\Rightarrow$ в конце мы придём к графу
 $\Rightarrow$ пусть всего n городов. $\Rightarrow$ число дорог
 $= n - 1$ и $2 \frac{5+6+7+8+(n-4)}{2} =$
 $2n - 2 = 23 + n \Rightarrow \boxed{n = 25}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 / ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Если~~ $\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-12y-11} = 2$

Или $\sqrt{-121} = 0 \Rightarrow |x-y-1| \leq 1$, т.к. $x, y \in \mathbb{Z}$

целым, $\Rightarrow |x-y-1| = 0$ или $|x-y-1| = 1$.

Если $|x-y-1| = 0 \Rightarrow x-y-1 = 0 \Rightarrow x = y+1$.

$$\Rightarrow \sqrt{2y+2-2y-y^2+2y-1-y^2} + \sqrt{1} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{-2y^2-2y+1} = 1 \Rightarrow -2y^2-2y+1 = 1$$

$$\Rightarrow -2y^2-2y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ или } -2y-2 = 0 \Rightarrow y = -1$$

~~Но или $x = -1$ и $x = 0 \Rightarrow 2x - 2y - x^2 - y^2$~~

~~Если $\Rightarrow x = 0$ и $y = -1$; $x = 1$ и $y = 0$~~

Если $|x-y-1| = 1 \Rightarrow |x-y-1| = \pm 1$

Если $x-y-1 = -1 \Rightarrow x=y$, но тогда

$$2x-2y-x^2-y^2 = -2x^2 < 0 \Rightarrow \text{какого к.м.м.б.}$$

$$\Rightarrow x-y-1 = +1 \Rightarrow x = y+2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2y+4-2y-y^2-4y-4-y^2} + \sqrt{1-1} = 2$$

$$\sqrt{-2y^2-4y} = 2 \Rightarrow -2y^2-4y = 4$$

$$y^2+2y+2 \geq 0 \Rightarrow \text{но н.в.м.б. } y = -1 \Rightarrow (y+1)^2 = -1 \Rightarrow$$

$$y = \emptyset \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ и } y = -1; x = 1 \text{ и } y = 0}$$

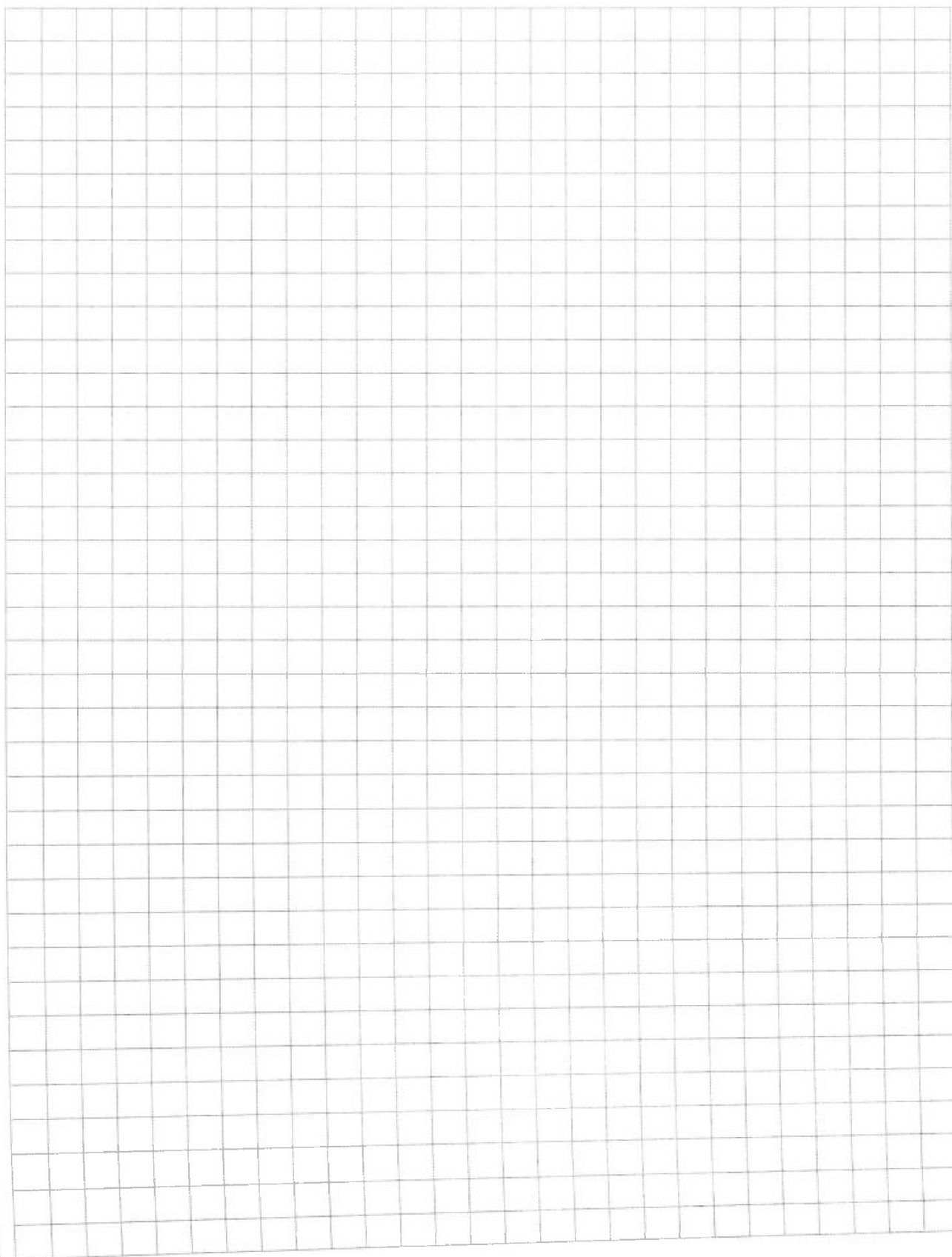


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





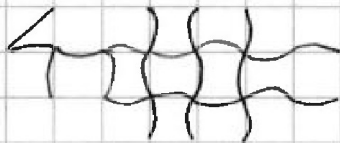
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пл-м-м



$$|x - y - 1| = 0$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 = 1$$

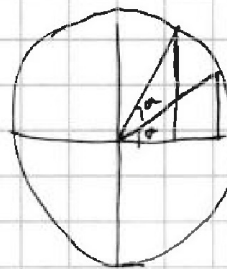
$$x = y + 1$$

$$2y + 2 - 2y - y^2 + 2y + 1 - y^2 = 1$$

$$2y = 2y^2 \quad y = y^2$$

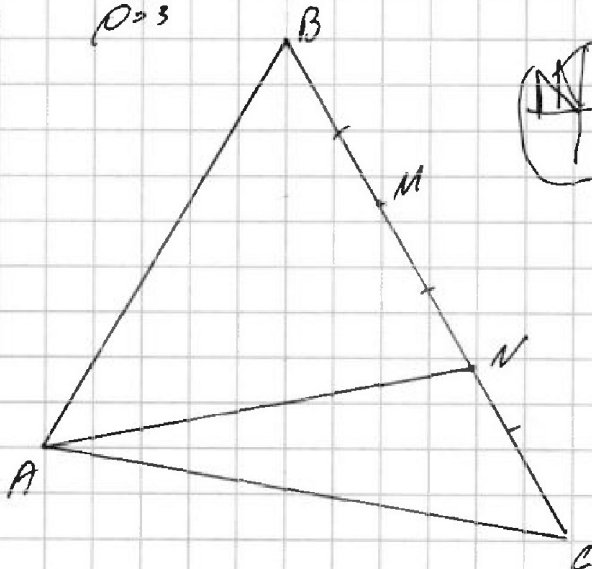
$$(x_1 - x)(x_2 - x) = 0$$

$$x_1 x_2 - x(x_1 + x_2) + x^2$$



САН

$\rho = 3$



$$(a-b)^2 + 4ab + 3a + 3b$$

$$4ab + 3a + 3b + 12^2$$

$$a(4b+3) + 3b + 12^2$$

2

$$a(3+a+b) + b(3+a+b)$$

$$(a+b)(3+a+b) = \rho \rho^*$$

19^0 ρ^*

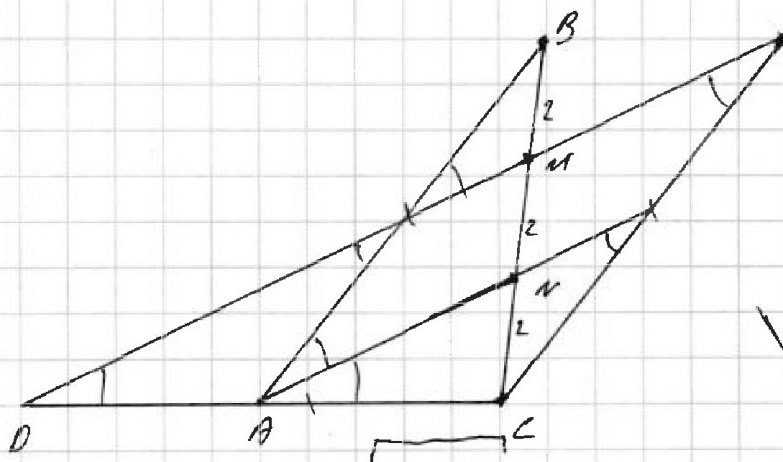
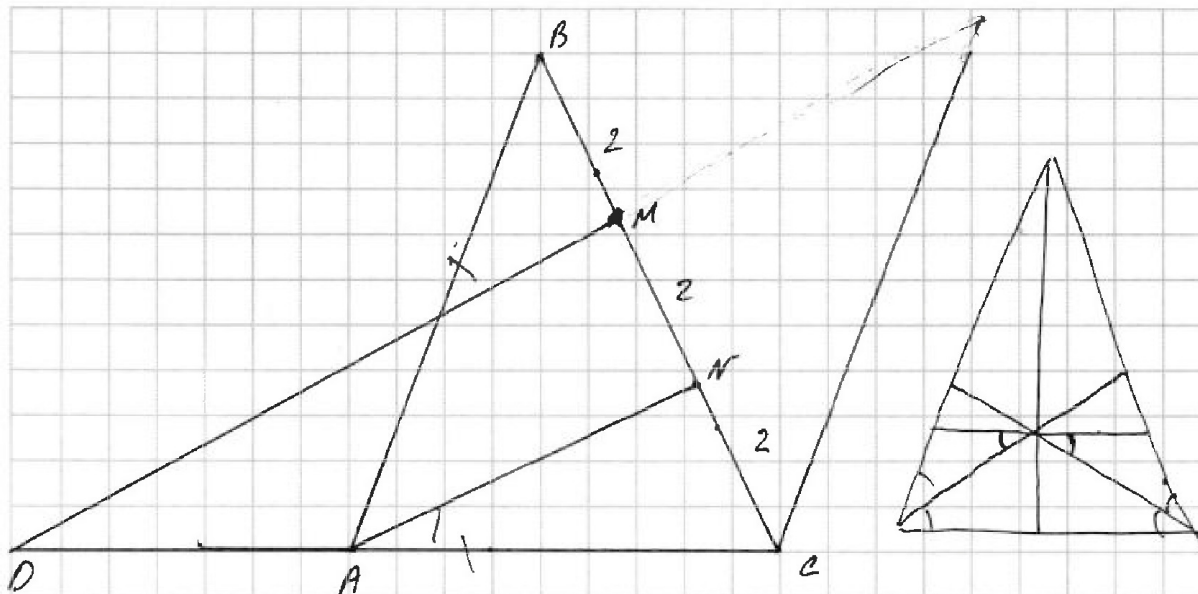


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$6 + 4 + 5 + 8$$

21

—

☐	☐	☐	☐
^	^	^	8
☐	☐	☐	☐
^	^	^	11-10
☐	☐	☐	☒
^	^	^	11-10

$$5-2-1 \quad 6-5-4 \quad 7-8-7$$

$$11-10-$$

$$11! \cdot 8$$

$$11-4$$

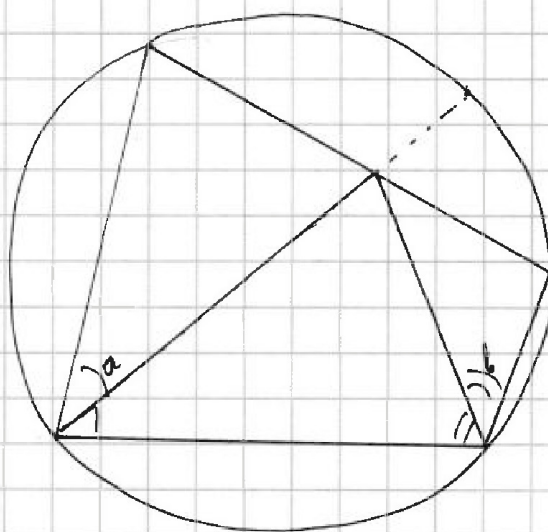
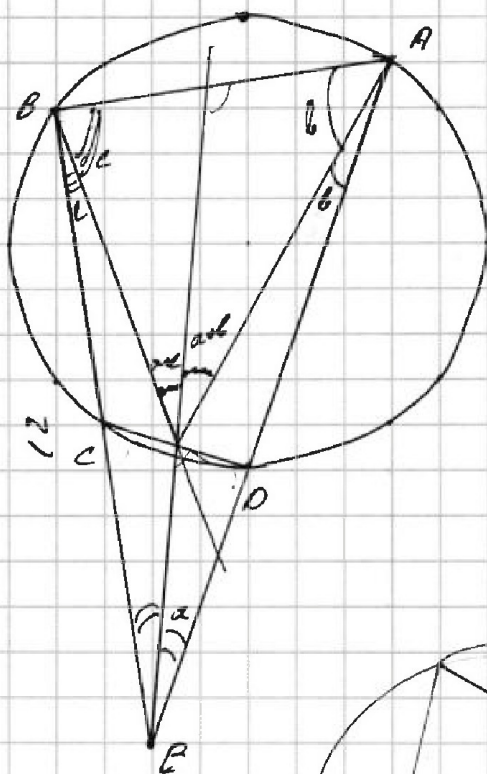


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



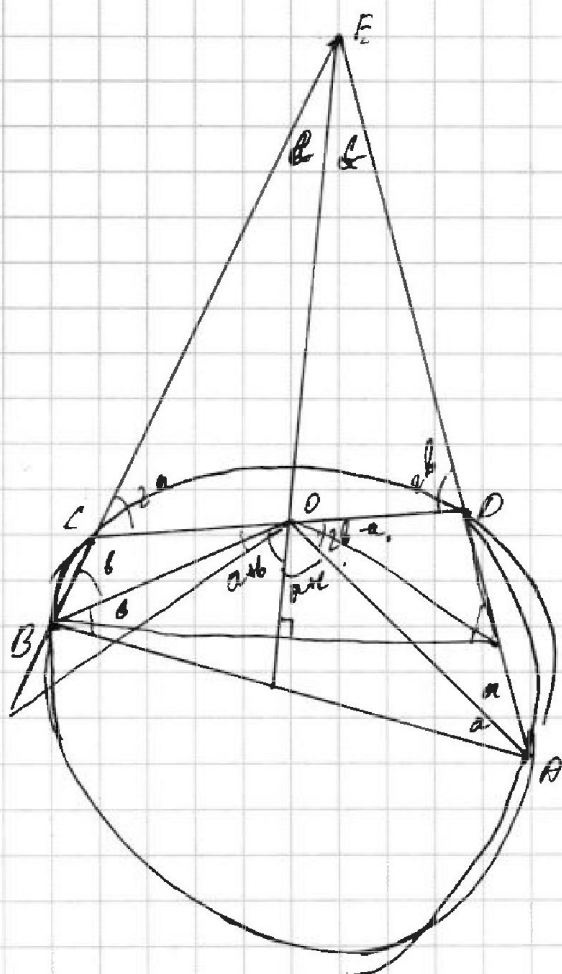


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$360 - (90 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + 180 - \alpha)$$

$$b + c - a$$

$$b + a - c$$

$$2b + a + c$$

