



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \quad \checkmark 1.$$

$$b_{12} = 2-x$$

$$b_{18} = \sqrt{\frac{(25x+34)}{(3x+2)^3}}$$

$$b_{18} = b_{10} \cdot q^{17}$$

$$b_{10} = b_{10} \cdot q^9$$

$$b_{12} = b_{10} \cdot q^{11}$$

$$(25x+34)(3x+2) \geq 0, \quad b_{12} = b_{10} \cdot q^2, \quad b_{10} \geq 0, \quad q^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow b_{12} \geq 0 \Rightarrow 2-x \geq 0.$$

$$1) (25x+34) \leq 0, (3x+2) \leq 0.$$

$$\frac{b_{18}}{b_{12}} = q^8 = \frac{\sqrt{(25x+34)}}{(3x+2)^3} \cdot \sqrt{(25x+34)}$$

$$= \frac{\sqrt{(25x+34)}}{(3x+2)^3} \cdot \frac{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-(3x+2)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{\sqrt{-(3x+2)}}$$

$$b_{12} = b_{10} \cdot q^2 \Rightarrow 2-x = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{-(3x+2)}}$$

$$2-x = \sqrt{-(25x+34)}$$

$$4-4x+x^2 = -25x-34$$

$$x^2+21x+38=0$$

$$(x+2)(x+19)=0$$

$$x=-2$$

$$x=-19$$

Оба удовл. условию.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad (25x+34) \geq 0, \quad (3x+2) > 0,$$

$$\frac{b_{18}}{b_{10}} = q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 = \sqrt{3x+2}$$

$$b_{12} = b_{10} \cdot q^2 \Rightarrow 2-x = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$$

$$2-x = \sqrt{25x+34}$$

$$4-4x+x^2 = 25x+34$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x+1)(x-30) = 0$$

$$(x+1)(x-30) = 0$$

$$x = -1$$

$$x = 30$$

$$3x+2 \geq 0$$

- неверно, и.к. $-1 < 0$.

$$2-x \geq 0 \Rightarrow \text{не угод.}$$

Итого; находим $x = -2$ и $x = -19$.

Ответ: -2 ; -19 .



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x2

Помогите на вопрос ур-ние системы.
Помогите, какое значение принимает
левая и правая части:

$$|y+2| + 2|y-18|$$

1) $y < -2$ следует из
 $2-y+2 \cdot (18-y) = -2-y+36-2y = -3y+34 > 40$

2) $-2 \leq y \leq 18$ следует из
 $y+2+2 \cdot (18-y) = y+2+36-2y = 38-y \geq 20$

3) $18 < y$ следует из
 $y+2+2y-36 = 3y-34 > 20$

Левая часть ≥ 20 . Достижения при
 $y = 18$.

Правая часть: $z^2 \geq 0 \Rightarrow -z^2 \leq 0$

$$400 - z^2 \leq 400 \Rightarrow \sqrt{400 - z^2} \leq 20$$

Достижения достигается при $z = 0$

Левая часть ≥ 20 , правая ≤ 20 . Получаем,
 что равенство достигается только при
 $y = 18$ и $z = 0$. $\rightarrow$ Это и есть единств.

возможные значения этих пере-
 мейных. Теперь вернёмся к исходному
 уравнению.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Зная, что $y=18$, $z=0$ перепишем СД:

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} \leq \sqrt{3-x} \quad \text{и} \quad (x+6 \geq 0, 3-x \geq 0)$$

$$(18-3x-x^2) = (x+6)(3-x) \geq 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} - 7$$

возведем в квадрат:

$$(x+6) + (3-x) - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} = 4(x+6)(3-x) - 28\sqrt{(x+6)(3-x)} + 49$$

$$\sqrt{(x+6)(3-x)} = t$$

$$9 - 2t = 4t^2 - 28t + 49$$

$$4t^2 - 26t + 40 = 0$$

$$2t^2 - 13t + 20 = 0$$

$$(2t-5)(t-4)$$

$$t = 2,5$$

$$t = 4$$

$$(x+6)(3-x) = 2,5$$

$$(x+6)(3-x) = 4$$

$$-x^2 - 3x + 18 = 2,5$$

$$-x^2 - 3x + 18 = 4$$

$$-2x^2 - 6x + 36 = 5$$

$$x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$-2x^2 - 6x + 31 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 14 = 9 + 56 = 65$$

$$2x^2 + 6x - 31 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 2 \cdot 31 = 244 + 36 = 280 = 4 \cdot 71$$

$$x_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{71}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{71}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{65}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{71}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{65}}{2}$$

$$-6 < \frac{-3 - \sqrt{71}}{2} < \frac{-3 + \sqrt{71}}{2} < 3$$

$$-6 < \frac{-3 - \sqrt{65}}{2} < \frac{-3 + \sqrt{65}}{2} < 3$$

$$-12 < -3 - \sqrt{71} < -3 + \sqrt{71} < 6$$

$$-12 < -3 - \sqrt{65} < -3 + \sqrt{65} < 6$$

$$\sqrt{71} < 9 = \sqrt{81}$$

$$\sqrt{65} < 9 = \sqrt{81}$$

оба выполнены

Ответ: $x = \frac{-3 + \sqrt{65}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{71}}{2}, y = 18, z = 0$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3.

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\text{Пусть } \cos x = t.$$

$$p \cdot (4t^3 - 3t) + 6 \cdot (2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0$$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0 \quad |:4$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t+1)^3 = 0$$

$$(t+1)^3 = (1-p)t^3$$

$$t+1 = \sqrt[3]{1-p} t$$

$$t \cdot (1 - \sqrt[3]{1-p}) = -1$$

$$t = -\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

$$\cos x = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

Условию ур-ние имеет решение, только выполняются условия: $-1 \leq \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \leq 1$

$$\frac{-1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \leq 1 \Rightarrow \frac{-1 + 1 + \sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \leq 0 \quad \frac{\sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \leq 0$$

+ - + + -

0 1 2 p p ∈ [0; 1]



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-1 \leq \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

$$0 \leq \frac{-1 + 1 + \sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}} = \frac{\sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

+ - +

0 1 p

$$p \in (-\infty; 0), [1; +\infty).$$

тогда есть 2 условия:

$$p \in (0; 1] \text{ и } p \in (-\infty; 0), [1; +\infty).$$

Получаем, что $p \neq 1$

$$-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \leq 1 \quad 0 \leq \frac{1 + 1 + \sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

$$0 \leq \frac{2 + \sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

+ - +

-7 0 p

$$p \in (-7; -7], p \in (-\infty; -7], (0; +\infty).$$

$$\text{иногда, } p \in (-7; +\infty), p \in (-\infty; -7], [1; +\infty).$$

$$\cos x = \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } p \in (-\infty; -7], [1; +\infty), x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

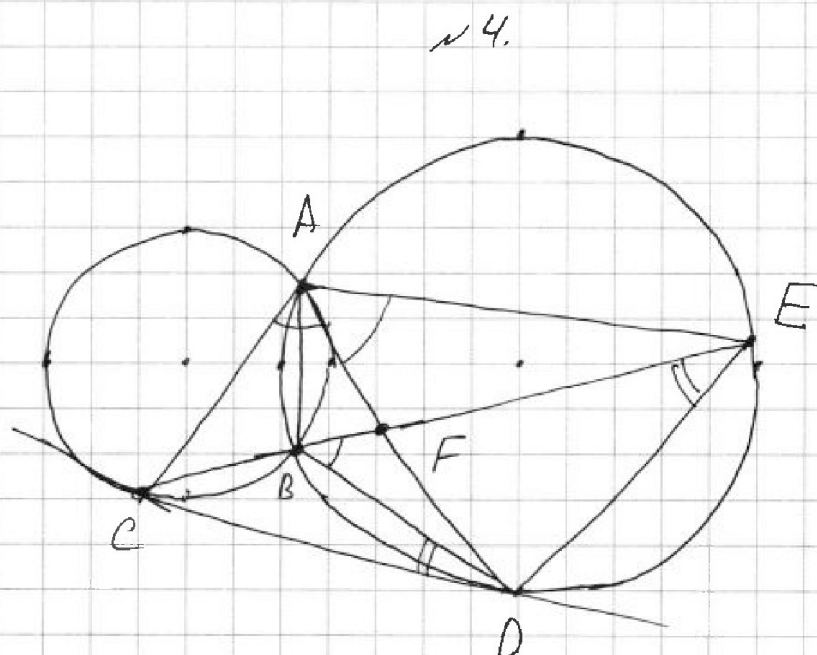


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что AF — биссектриса.

$\angle FAE = \angle DBE$ из вписанных,

$\angle CAB = \angle BCD$, $\angle DAB = \angle CDB$ (из касания).

$$\angle FAE = \angle DBE = \angle BCD + \angle CDB = \angle CAB + \angle DAB = \angle CAD = \angle CAF.$$

Тогда, $\angle CAF = \angle FAE$. $\frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{7}{20}$ (поул.)

Также заметим, что $\triangle CDB \sim \triangle CED$

$$(\angle CDB = \angle DEC, \angle C - \text{общий}) \Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{ED}{BD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{BD}{BC}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

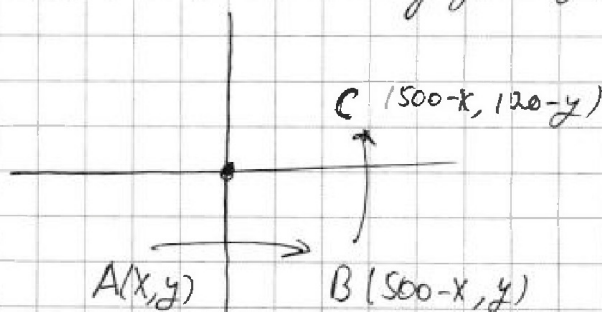
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Поймем, что все закрашенное мн-во удовлетворяет каким-то двум условиям, но оно удовлетворяет и ширькому.

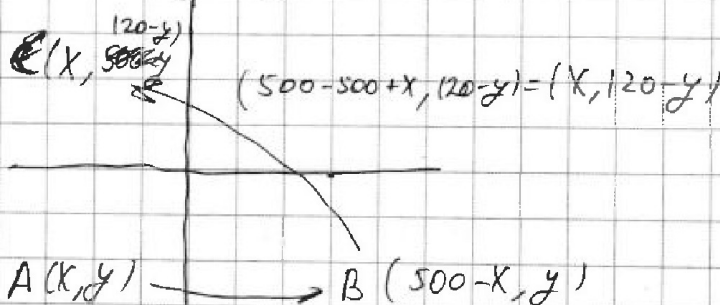
1) Эта симметрия относительно двух центральных осей.



$A \rightarrow B$ относительно $|$, $B \rightarrow C$ относительно $—$.

То тогда ~~точка~~ ^{квадрат} C центрально симметрична A .
(по координатам)

2) $|$ симметрия и центральная.



$A \rightarrow B$ относительно $|$, $B \rightarrow C$ относительно центра.

A и C симм. относительно $—$.

3) $—$ симметрия и центральная аналогичен 2).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

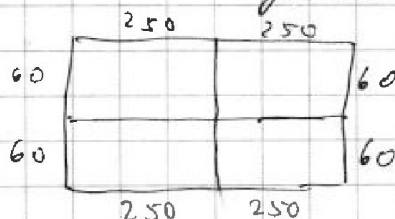
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда, у нас мы-во удовлетворяем либо
одной из-во симметрии, либо сразу
и двум. Посчитаем кол-во мы-в, удовле-
творяющих сразу 3 симметриям.

Заметим, что такая конструкция сим-
метрично задаётся 2 клетками в угловом прямо-
угольнике 250×60 .



Из симметрии в каждом из них ровно 2,
расположения аналогичны $\Rightarrow$ задаётся по одной.

Тогда мы-во C_{15000}^2 (кол-во способов
выбрать 2 клетки из прямоуг. 250×60 !)

Кол-во мы-в, симм. относительно 1: C_{30000}^4

C_{30000}^4 (4 клетки в левой половине прямоуг.)

относительно 2: C_{30000}^4 (4 клетки в правой половине)

относительно центра: C_{30000}^4 (4 клетки в левой и правой)

поэтому, например, если разделим прямоуг.

пополам: Число, $3 \cdot C_{30000}^4 - 2 \cdot C_{15000}^2$

(Мы знаем посчитали 3 симметрии $\Rightarrow$ вычитаем 2 раза).

Ответ: $3 \cdot C_{30000}^4 - 2 \cdot C_{15000}^2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 1000$$

$$c^2 + 3c - 990 = 0$$

$$(c - 30)(c + 33) = 0$$

$$c_1 = 30$$

$$c_2 = -33$$

$$a = 31$$

$$a = -32$$

$$b = 39$$

$$b = -24$$

$$(31; 39; 30)$$

$$(-32; -24; -33)$$

$$2) a < b < c$$

$$b < c \rightarrow a < c \Rightarrow \begin{cases} b - c < 0 \\ a - c < 0 \\ b - c > a - c \end{cases}$$

~~Итого~~
~~уменьшаемое~~

Снова получаем лишь 1 вариант разложения:

$$b - c = -1$$

$$(b - c) - (a - c) = b - a = p^2 - 1 \quad \text{X3}$$

$$a - c = -p^2 \quad \text{Взяв же, получили члор } p = 3$$

$$b = c - 1 \quad a = c - 9$$

$$(c - 9)^2 + c - 1 = 1000$$

$$c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000$$

$$c^2 - 17c - 920 = 0$$

$$(c - 40)(c + 23) = 0$$

$$c_1 = 40$$

$$c_2 = -23$$

$$a = 31$$

$$a = -32$$

$$b = 39$$

$$b = -24$$

$$(31; 39; 40)$$

$$(-32; -24; -23)$$

Ответ: $(31; 39; 30), (31; 39; 40), (-32; -24; -33),$
 $(-32; -24; -23)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{Z}, a < b; \overset{\sqrt{b}}{b-a} \nmid 3; (a-c)(b-c) = p^2,$
 $a^2 + b = 1000.$

Во-первых, ~~$a \neq b$~~ , $b \neq c$, $c \neq a$, иначе
 $(a-c)(b-c) = 0$ — противоречие.

Во-вторых, не можем иметь ситуа-
 ции: $a < c < b$. Т.к. $(a-c)(b-c) < 0$ —
 противоречие. Тогда, либо
 $c < a < b$, либо $a < b < c$.

1 случай: $c < a < b \Rightarrow a-c > 0$
 $b-c > 0$
 $(a-c)(b-c) = p^2$
 $b-c > a-c$, т.к. $b > a$
 тогда, либо $a-c = 1$ ~~$b-c = p^2$~~ ~~$a-c = p$~~ ~~$b-c = p$~~

Тогда из этих условий следует единствен-
 ный вариант разложения на множители:

$a-c = 1, b-c = p^2$
 $b-c - (a-c) = b-a = p^2 - 1.$

$b-a \nmid 3 \Rightarrow p^2 - 1 \nmid 3$. Но по мод. 3: $0^2 \equiv 0$
 $1^2 \equiv 1$
 $2^2 \equiv 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p \nmid 3$. Т.к. p — простое, то $p = 3$.

$a = c+1, b = c+9.$

$(c+1)^2 + c+9 = 1000$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

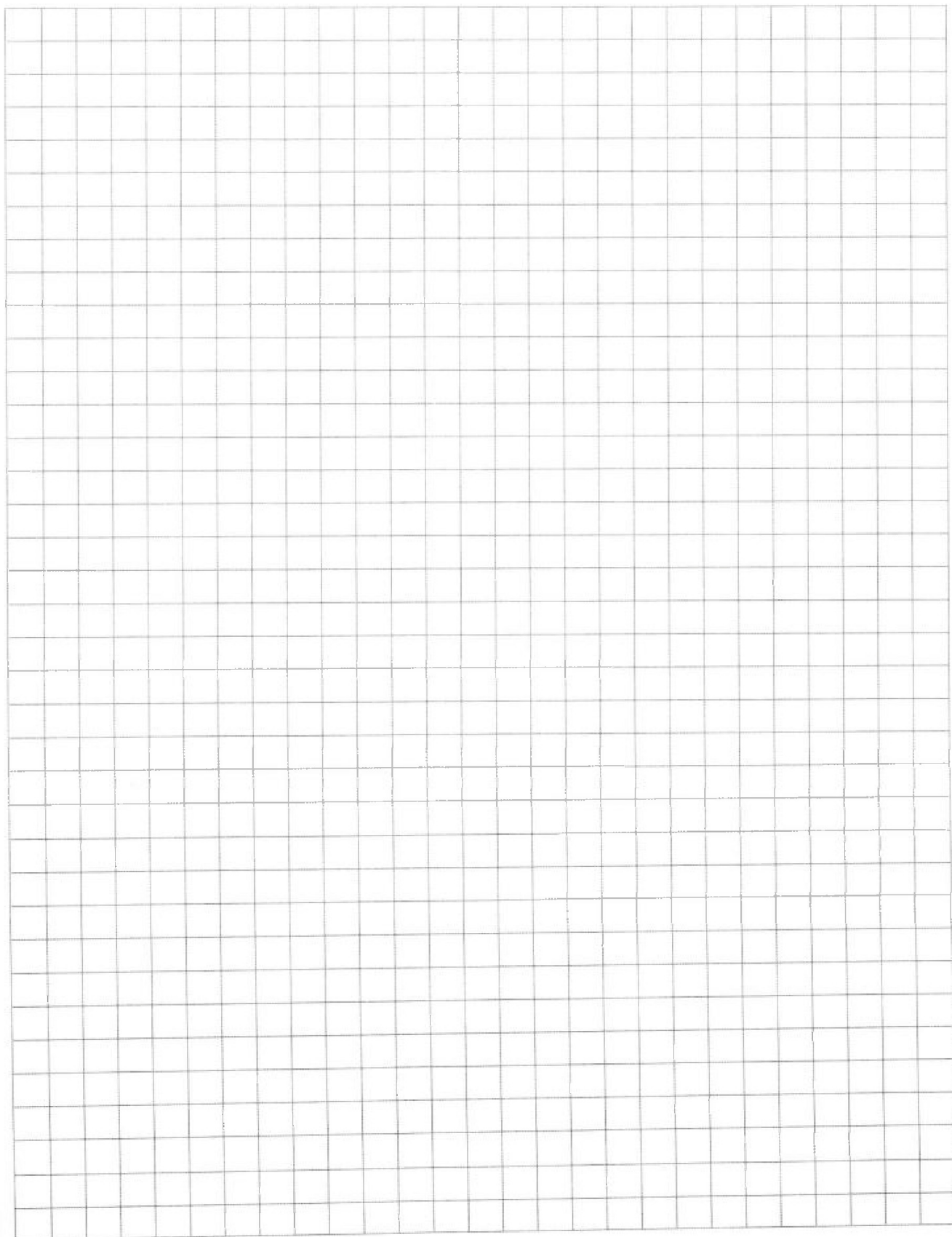
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{BE}{CE} = \frac{CF}{FE} = \frac{1}{20}$$

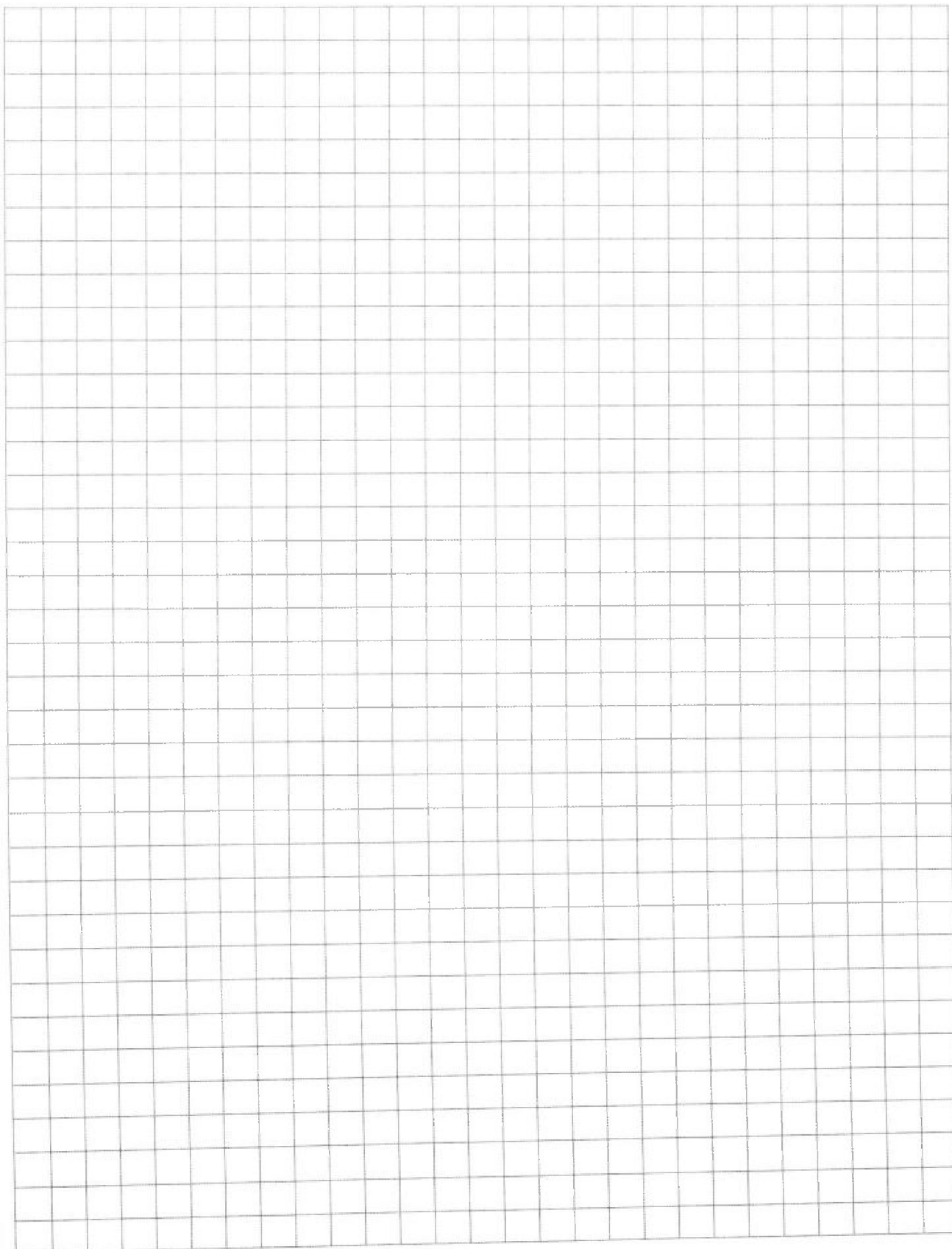


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.

$\frac{ED}{CD} = ?$

$\frac{CF}{FE} = \frac{7}{20}$

$\angle CAF = \angle FAE$

$CB \cdot BE = CD^2$

$\triangle CDB \sim \triangle CED$

$\frac{CE}{CD} = \frac{CD}{CB} = \frac{ED}{BD}$

$\frac{CD}{CB} = \frac{ED}{BD}$

$\frac{AC}{AE} = \frac{7}{20}$

$CD^2 = CP \cdot CA$

$ED \cdot CB = CD \cdot BD$

$\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{CB}$

$CD = \sqrt{BC \cdot CE}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0.$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \cos x - 2 \sin^2 x \cdot \cos x =$$

$$= (2 \cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2 \cos x \cdot (1 - \cos^2 x) =$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$p \cdot (4t^3 - 3t) + 6 \cdot (2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0.$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$(t+1)^3 = (p-1)t^3$$

$$t+1 = \sqrt[3]{p-1} t$$

$$(t+1)^3 = (1-p)t^3$$

$$t+1 = \sqrt[3]{1-p} t$$

$$t + \sqrt[3]{p-1} t = -1.$$

$$t(1 + \sqrt[3]{p-1}) = -1. 0 \leq 1 + \sqrt[3]{p-1} \leq 1$$

$$t = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}. -1 < \sqrt[3]{p-1} \leq 0$$

$$0 < p \leq 1. \quad p \in (-\infty; -7] \cup (0; +\infty)$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

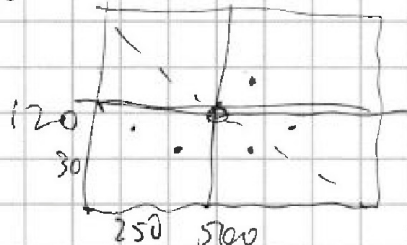
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-16 \div 4 = 64 \quad 6. \quad 4$$

~5



$$250 \cdot 30 = 7500$$

Открытая площадь симметрична:

$$C^2_{7500}$$

$$-x^2 - 3x + 18 = 2,5$$

$$-2x^2 - 6x + 36 = 5$$

$$2x^2 + 6x - 31 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 2 \cdot 31 = 284$$

$$x_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{71}}{4} = \frac{-3 + \sqrt{71}}{2}$$

Симметричная относ.

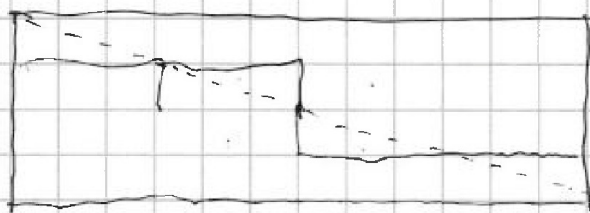
$$C^4_{75000}$$

Симметричная относ.

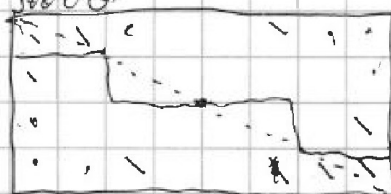
$$C^4_{150000}$$

$$\frac{500 \cdot 120}{2} =$$

$$= 500 \cdot 60 = 30000$$



$$C^4_{30000}$$

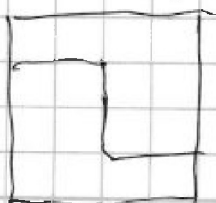
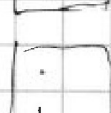
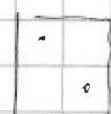
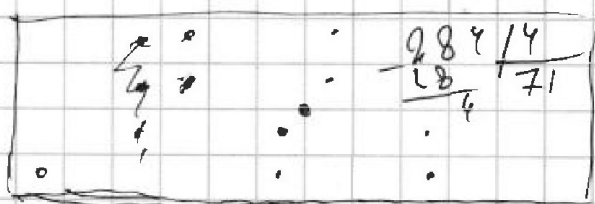


Если задан 2 условия $\Rightarrow$ удовлетворяет и 3.

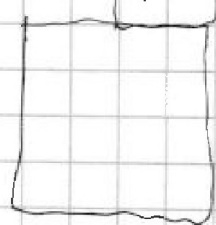
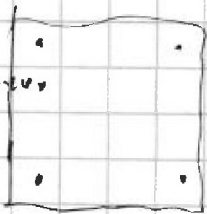
$$C^4_{30000} + C^4_{150000} + C^4_{150000} - 2 \cdot C^2_{7500} =$$



$$C^4 =$$



$$500 \cdot 120 = 60000$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

$$b - a \nmid 3$$

$$(a - c) \mid (b - c) = p^2; p - \text{простое.}$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$(a - c) \mid (b - c) = p^2.$$

$$\text{Если } a \leq c \leq b, \text{ то } a - c \leq b - c \text{ — тоже.}$$

иногда можно

$$c \leq a \leq b, \text{ тогда } a < b < c$$

$$a < b \Rightarrow a - c < b - c.$$

$$c < a < b:$$

$$a - c = 1 \quad a - c \neq p$$

$$b - c = p^2 \quad b - c \neq p \quad \text{т.к. } a \neq b.$$

$$a = c + 1$$

$$b = c + p^2.$$

$$c + p^2 - c - 1 \nmid 3.$$

$$p^2 - 1 \nmid 3.$$

$$c^2 \equiv 0$$

$$1^2 \equiv 1 \Rightarrow p \mid 3 \Rightarrow p = 3.$$

$$2^2 \equiv 1$$

$$3 \quad a = c + 1$$

$$b = c + 9$$

$$(c + 1)^2 + c + 9 = 1000$$

$$c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 1000$$

$$c^2 + 3c - 990 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 990 = 9 \cdot (4 \cdot 110 + 1) = 9 \cdot 441 = (3 \cdot 21)^2.$$

$$c_1 = \frac{-3 + 63}{2} = 30.$$

$$c_2 = \frac{-3 - 63}{2} = -\frac{66}{2} = -33.$$

$$a < b < c$$

$$c - a = 1$$

$$c - b = p^2.$$

$$\text{или}$$

$$a - c < b - c$$

$$b - c = 1$$

$$a - c = -p^2$$

$$b - c - a + c = -1 + p^2 = p^2 - 1 \Rightarrow \Rightarrow p = 3.$$

$$a = c - 9$$

$$b = c - 1$$

$$(c - 9)^2 \nmid 1.$$

$$920 \nmid 10$$

$$92 \cdot 10$$

$$92 \nmid 46 \cdot 20.$$

$$23 \cdot 40.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_{10} = \sqrt{(25x+34)/(3x+2)}$$

$$b_{12} = 2-x$$

$$b_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$b_{10} \cdot q = b_{17} \quad b_{18} = q^8$$

$$b_{18} = b_{10} \cdot q^{17}$$

$$q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(25x+34)/(3x+2)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$q^2 = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$$

$$b_{12} = b_{10} \cdot q^2$$

$$2-x = \frac{1}{\sqrt{3x+2}} \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{25x+34}$$

$$2-x = \sqrt{25x+34}$$

реш. 2 слух.!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+2}$$

$$|y+2| + 2|y-16| = \sqrt{(20-2)(20+2)}$$



На одной странице можно оформить только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(y+2) + 2(18-y)$$

$$1.) y < -2.$$

$$-2-y + 2(18-y) =$$

$$= -2-y + 36-2y = -3y+34 \geq 40.$$

$$2.) -2 \leq y \leq 18.$$

$$y+2 + 2(18-y) =$$

$$= y+2+36-2y = -y+38 \geq 20.$$

$$3.) 18 < y : y+2 + 2y-36 = 3y-34 \geq 20.$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 3 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\sqrt{400-z^2} \leq 20. \text{ Т.к. } z^2 \geq 0$$

$$-z^2 \leq 0$$

$$400-z^2 \leq 400$$

$$\sqrt{400-z^2} \leq 20.$$

Р-во достигается при $z=0, y=18.$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} - 7$$

$$x+6 + 3-x - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} = 4(x+6)(3-x)$$

$$9 - 2\sqrt{\dots} = 4x^2 + 28x + 43 \quad 4x^2 + 28x + 43 = 0$$

$$9 - 2t = 4t^2 + 28t + 43 \quad D = 4 + 4 \cdot 9 \cdot 4 = 37 \cdot 4$$

$$4t^2 - 26t + 40$$

$$4t^2 - 26t + 40 = (2t-5)(t-4)$$

$$(x+6)(3-x)$$

$$-x^2 - 3x + 18 = 4$$

$$x^2 + 3x - 18 = 4$$

$$x^2 + 3x - 14 = 0.$$

$$D = 9 + 4 \cdot 14 = 65.$$

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{65}}{2} \quad x_2 = \frac{-3-\sqrt{65}}{2} > -6.$$

$$\begin{array}{l} 3+\sqrt{65} < 12 \\ \sqrt{65} < 9 \\ -\frac{3+\sqrt{65}}{2} < 3 \\ \sqrt{65}-3 < 6 \\ \sqrt{65} < 9 \end{array}$$