



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- 1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

- 3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .
- 5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
- 6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 820$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть y_i - i -й член прогрессии, тогда

$$y_4 = y_1 \cdot k^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \quad y_{10} = y_1 \cdot k^9 = x+4$$

$$y_{12} = y_1 \cdot k^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}, \text{ где } k - \text{знаменатель прогрессии}$$

$$\frac{y_{12}}{y_4} = k^8 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)^4}{15x+6}} = (x-3)^2$$

Если $15x+6 \neq 0$, то $y_4 = y_{12} = 0 \Rightarrow y_{10} = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 15x+6 = 0 = x+4$ - решений нет

$$y_{12} = y_{10} \cdot k^2 \Rightarrow \sqrt{(15x+6)(x-3)} = (x+4) \sqrt{(x-3)^2}$$

$$(15x+6)^2 (x-3)^2 = (x+4)^4 (x-3)^2 \quad x \neq 3, \text{ так как}$$

тогда y_4 в знаменателе под корнем 0.

$$|15x+6| = (x+4)^2$$

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 16 = 15x + 6 \\ x^2 + 8x + 16 = -15x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \text{ I} \\ x^2 + 23x + 22 = 0 \text{ II} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ по т. Виета из I} \\ x = 5 \\ x = -1 \text{ по т. Виета из II} \\ x = -22 \end{cases}$$

$x = -22$ не подходит, так как
 тогда $y_4 > 0$ $y_{12} > 0$, но $y_{10} < 0$

Ответ: -1; 5

$x = 2$ не подходит,
 так как тогда
 ~~$y_4 = 0$~~ y_{12} - корень
 из стр. числа



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p \quad \text{N } 3$$

$$\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x + 6 \cos x - 3(\cos^2 x - \sin^2 x) = p$$

$$\cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x + 6 \cos x - 3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x = p$$

$$\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x + 6 \cos x - 3 \cos^2 x + 3 - 3 \sin^2 x = p$$

$$\cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) + 6 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 = p$$

$$\cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^2 x + 6 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 = p$$

$$\cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = p - 4$$

$$(\cos x - 1)^3 = p - 4$$

$$E(\cos x) = [-1; 1]$$

$$E(\cos x - 1) = [-2; 0]$$

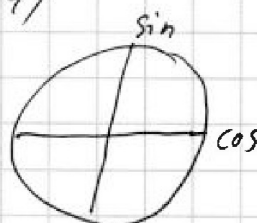
$$\cancel{E} E((\cos x - 1)^3) = [-8; 0]$$

$$p \in [-4; 4]$$

$$\Leftarrow = E(p - 4)$$

$$\cos x - 1 = \sqrt[3]{p - 4}$$

$$\cos x = \sqrt[3]{p - 4} + 1$$



$$x = \pm \arccos(\sqrt[3]{p - 4} + 1) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } p \in [-4; 4]; x = \pm \arccos(\sqrt[3]{p - 4} + 1) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

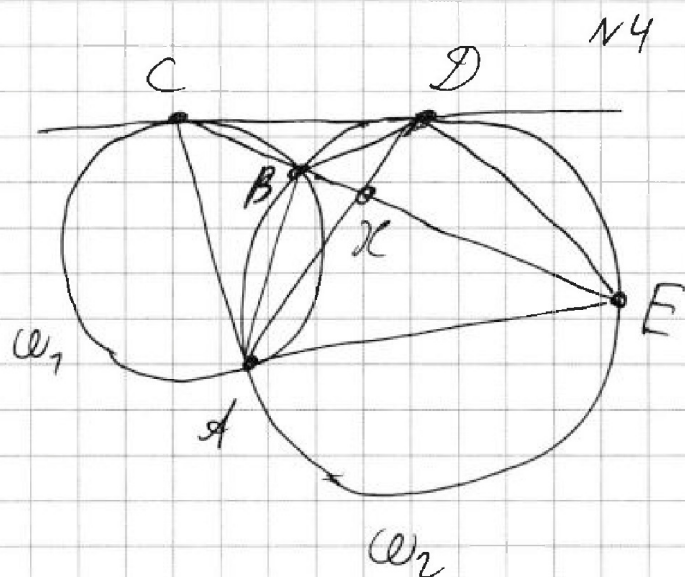


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $CE \cap AD = K$

$$\angle DCB = \angle CAB, \angle CDB = \angle ADB$$

$$\angle DBE = \angle CDB + \angle DCB$$

$$\angle DBE = \angle DAE$$

$$\angle DEE = \angle CDB + \angle DCB = \angle CAD \Rightarrow$$

$\Rightarrow CK$ — биссектриса $\triangle CAE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{CK}{KE} = \frac{9}{25} = \frac{AC}{AE}$$

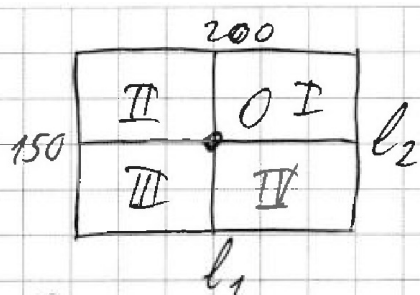


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



l_1, l_2 - ^{N5} средние линии
прямоугольника
O - центр прямоугольника

Римскими цифрами обозначены области
прямоугольника ограниченные его границей
и средними линиями.

Множество обладает симметрией отн. $l_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для любой точки в I и IV есть образ

в II и III $\Rightarrow$ в I и IV 4 клетки, а их образ

в II и III выбираются однозначно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ количество способов $C_{100 \cdot 150}^4 = C_{15000}^4$

Множество обладает симметрией отн. l_2 .

В этом случае рассуждения аналогичны
для пар областей I, II и III, IV и

количество способов $C_{200 \cdot 75}^4 = C_{15000}^4$

Множество обладает симметрией отн. O $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для любой точки из I однозначно определен
образ в III и для любой точки в II однознач-
но определен образ в IV $\Rightarrow$ в I и II 4 клетки и



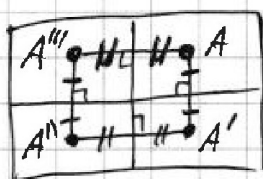
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда количество способов $C_{75 \cdot 200}^4 = C_{15000}^4$

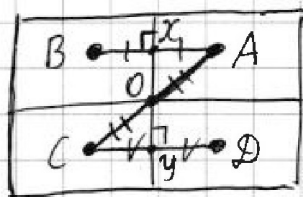
Множество обладает симметрией отн. ℓ_1 и $\ell_2 \Rightarrow$ для любой точки в I есть образ в II и IV, а также есть образ образов в III:



Тогда 8 точек представляют две группы по 4, которые задают вершины прямоугольника, тогда в каждой области по 2 точки и зная 2 точки в I остальные 6 восстановимся однозначно. $\Rightarrow$ количество способов $C_{100 \cdot 75}^2 = C_{7500}^2$

Также в этом случае есть и симметрия отн. O.

Множество обладает симметрией отн. ℓ_1 и O. Тогда для каждой точки в I есть образ в II и III, а для образа в III есть образ в IV:



$\triangle AXO \cong \triangle CYO$ по 2 углам и стороне $\Rightarrow XO = YO \Rightarrow ABCD$ - прямоугольник и получаем

ту же ситуацию, что в предыдущем случае (опять есть 3 симметрии) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ количество способов C_{7500}^2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Множество обладает симметрией относительно v_2 и 0 аналогично v_1 и 0 $\Rightarrow C_{7500}^2$

Множество обладает 3 симметриями также ситуация $\Rightarrow C_{7500}^2$

По формуле включений-исключений ответ на задачу:

$$3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2$$

Ответ: $3 \cdot C_{15000}^4 - 2 \cdot C_{7500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p - \text{простое}$$

$a > b \Rightarrow a-c > b-c \Rightarrow$ есть 2 случая
или равны $a-c$ и $b-c$

$$\text{I } a-c = p^2 \quad b-c = 1$$

$$\text{II } a-c = -1 \quad b-c = -p^2$$

Решим I случай:

$$a = p^2 + c, \quad b = c + 1$$

$$a \not\equiv b \pmod{3} \Rightarrow$$

$$p^2 + c \not\equiv c + 1 \pmod{3} \Rightarrow$$

$$p^2 \not\equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p = 3$$

$$a = 9 + c, \quad b = c + 1$$

$$a + b^2 = 9 + c + c^2 + 2c + 1 = c^2 + 3c + 10 = 820$$

$$c^2 + 3c - 810 = 0$$

$$\begin{cases} c = -30 \\ c = 27 \end{cases} \text{ по т. Виета}$$

$$\in \mathbb{Z} \text{ и } c = 27, a = 36, b = 28$$

$$c = -30, a = -21, b = -29$$

Решим II случай:

$$a = c - 1, \quad b = c - p^2$$

$$a \not\equiv b \pmod{3} \Rightarrow c - 1 \not\equiv c - p^2 \pmod{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 \not\equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p = 3$$

$$a = c - 1, \quad b = c - 9$$

$$a + b^2 = c - 1 + c^2 - 18c + 81 = c^2 - 17c + 80 = 820$$

$$c^2 - 17c - 740 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = -20 \\ c = 37 \end{cases} \text{ по т. Виета}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$c = -20, a = -27, b = -29$$

$$c = 37, a = 36, b = 28$$

$$\text{Answer: } (-27; -29; -30), (36; 28; 27), \\ (36; 28; 37), (-27; -29; -20)$$



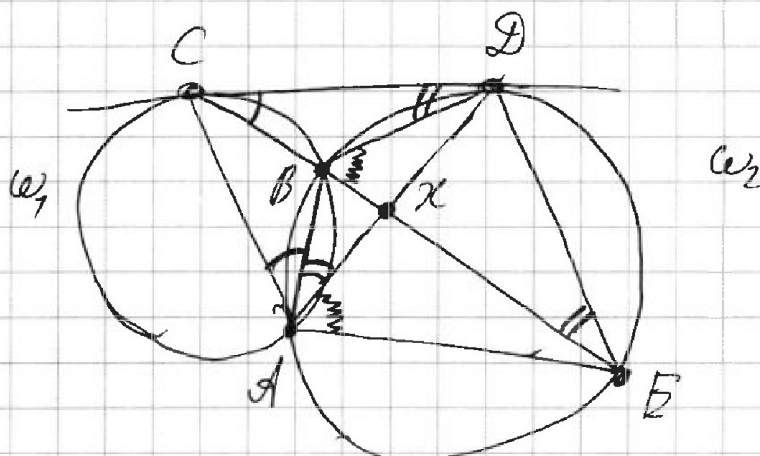
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

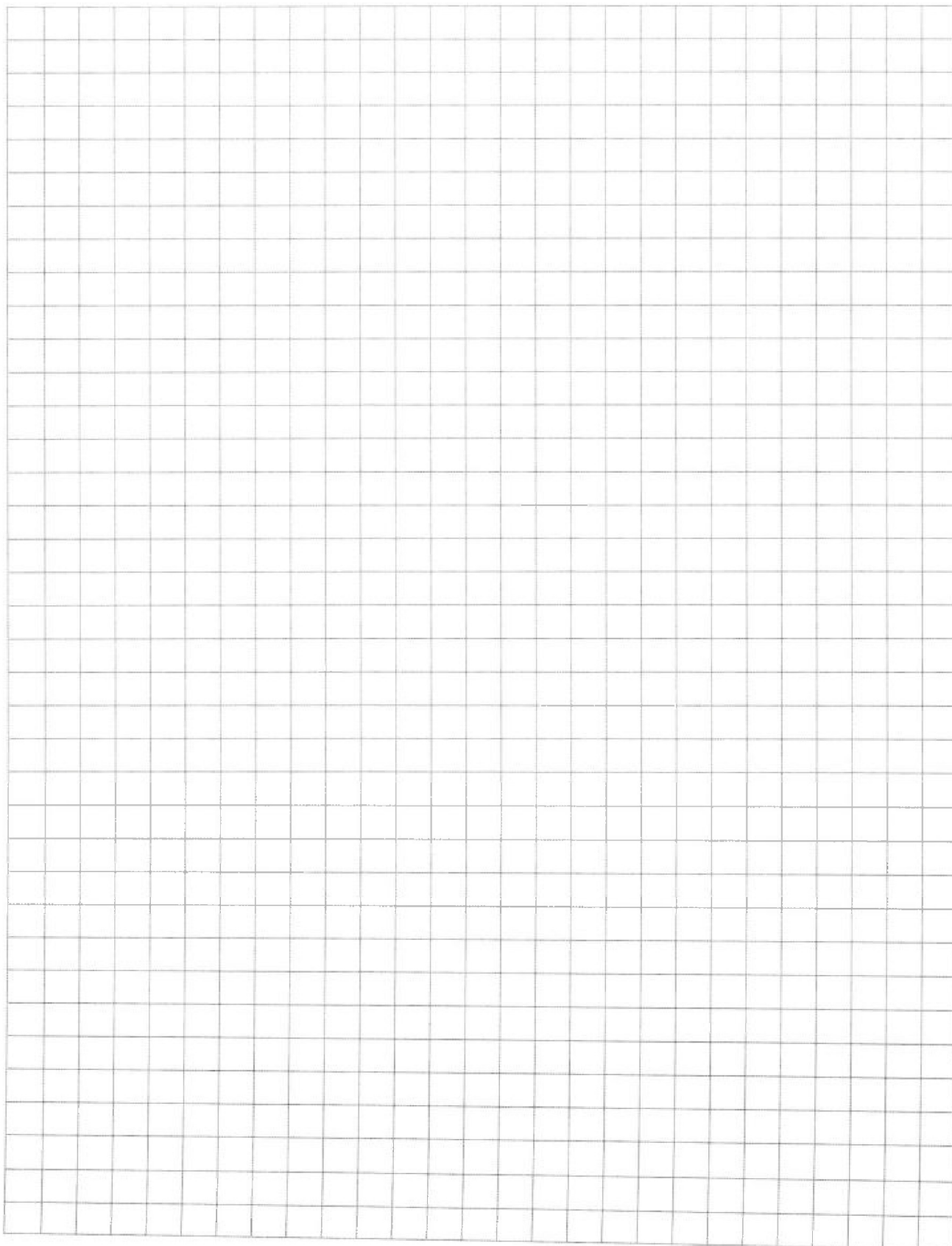
5
☒

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



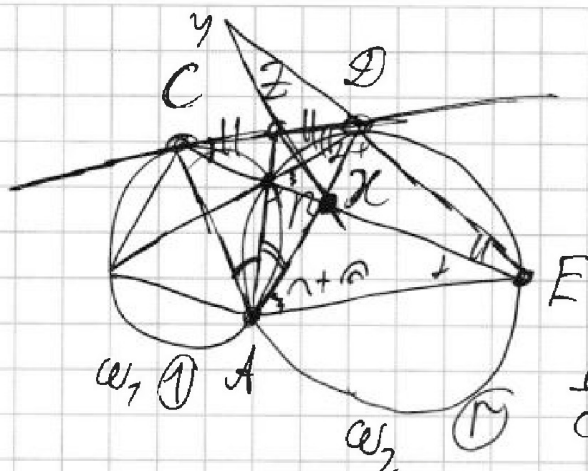


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{ED}{CD} = ?$$

$$CD^2 =$$

$$= CB \cdot CE$$

$$\frac{CK}{KE} = \frac{9}{25} \quad CD = \frac{CB \cdot CE}{CD}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{DB}{BC} \quad \frac{ED}{DC} = \frac{ED \cdot CB}{CB \cdot CE}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{\sin \angle DCE}{\sin \angle DEC} = \frac{\sin \angle CAB}{\sin \angle DAB} = \frac{AD}{AC} = \frac{14}{15}$$

$$1 = \frac{S_{ACB}}{S_{ADB}} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin \angle CAB}{AB \cdot AD \cdot \sin \angle DAB} = \frac{AC \cdot \sin \angle CAB}{AD \cdot \sin \angle DAB}$$

AX - биссектриса $\Rightarrow$

$$AD \rightarrow 2 + \alpha$$

$$AE \rightarrow 10 - \alpha - \alpha - \alpha - \alpha - 2$$

$$\frac{CK}{KE} = \frac{AC}{AE} = \frac{9}{25}$$

$$2 + \alpha \neq 10 - \alpha - \alpha - \alpha - 2$$

$(\Rightarrow)$

$$10 = 2 + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + 2$$

$$AC \rightarrow AD$$

$$AD \rightarrow AE \quad \frac{AD}{AC} \rightarrow \frac{AE}{AD}$$

нов. соотношение

$$|z| \leq 15$$

$$x \geq -7$$

$$x + 3z \leq 5$$

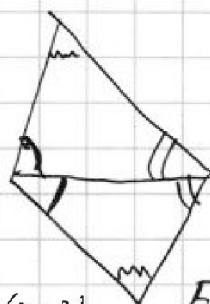
$$3z \leq 5 - x$$

$$3z \leq 12$$

$$z \leq 4$$

$$y \geq x^2 + 2x - 2$$

$$y \geq 49$$



$$AD = AC \cdot t$$

$$AE = AD$$

$$\frac{DY}{YE} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{EX}{XC} \cdot \frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DY}{YE} = 1$$

$$\frac{25}{9} = \frac{DY}{YE} = 1$$



1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p \quad p: \exists \text{ хотя бы } 1 \text{ решение}$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 2\cos x$$

$$\cos 2x \cos x + 6\cos x - \sin 2x \sin x - 3\cos 2x = p$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x + 6\cos x - 2\sin^2 x \cos x - 3(\cos^2 x - \sin^2 x) = p$$

$$\cos^3 x - \sin^2 x \cos x + 6\cos x - 2\sin^2 x \cos x - 3\cos^3 x + 3\sin^2 x = p$$

$$-2\cos^3 x + 6\cos x - 3\sin^2 x \cos x + 3\sin^2 x = p$$

$$-2\cos^3 x + 6\cos x - 3\cos x(1 - \cos^2 x) + 3\sin^2 x = p$$

$$-2\cos^3 x + 6\cos x - 3\cos x + 3\cos^3 x + 3 - 3\cos^2 x = p$$

$$\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x + 3 = p$$

$$\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = p - 4$$

$$(\cos x - 1)^3 = p - 4$$

$$\cos x \in [-1; 1]$$

$$\cos x - 1 \in [-2; 0]$$

$$(\cos x - 1)^3 \in [-8; 0] \exists p - 4$$

$$(a-b)^3 = (a-b) \cdot$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) =$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 -$$

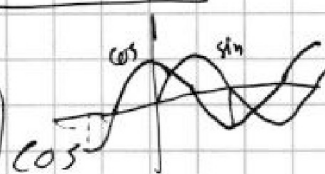
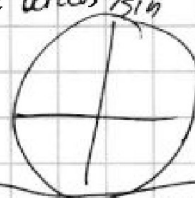
$$-6a^2 + 2ab^2 - b^3 =$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\cos x - 1 = \sqrt[3]{p-4}$$

$$\arccos y = \arccos \frac{y}{\sin}$$

$$\cos x = \sqrt[3]{p-4} + 1$$



$$x = \arccos(\sqrt[3]{p-4} + 1) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \sqrt[3]{p-4} + 1 \geq 0$$

$$x = -\arccos(-1 - \sqrt[3]{p-4}) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \sqrt[3]{p-4} + 1 < 0$$

$$3 + 5 + 4 + 4 = 8 + 8 = 16$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y_1 \quad y_4 = k^3 y_1 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$y_{12} = k^{11} y_1 = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$k^8 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)}{(x-3)^3}} = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)}{15x+6}} = (x-3)^2$$

$$k^8 = (x-3)^2 \Rightarrow k^2 = 4(x-3)^2$$

$$(x+4)^4 \sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$(x+4)^2 \sqrt{(x-3)^2} = (15x+6)(x-3)$$

$$(x+4)^2 (x-3) = (15x+6)(x-3)$$

$$x^2 + 7x + 16 = 15x + 6$$

$$(x+4)^4 (x-3)^2 = (15x+6)^2 (x-3)^2$$

$$(x+4)^4 = (15x+6)^2$$

$$(x+4)^2 = |25x+6|$$

$$\begin{cases} 15x+6 \geq 0 \\ x^2 + 8x + 16 = 15x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x+6 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x+6 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x+6 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -22 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -22 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$[-1 -22 \ 5]$$

$$y_{10} = k^9 y_1 = x+4$$

$$k^8 = 16 \quad k^2 = 2$$

$$(x-4)^2 = 16$$

$$\sqrt{(6-15)(-4)} = 9.4$$

$$(x-3)^2$$

$$\begin{cases} 15x+6=0 \\ x+4=0 \end{cases}$$

$$x = -4$$

$$x = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$D = 49 - 40 = 9$$

$$x = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{-23 \pm 27}{2}$$

$$x^2 + 8x + 16 = -6 - 15x$$

$$x^2 + 13x + 22 = 0$$

$$D = 23^2 - 88 =$$

$$= 529 - 88 = 441 =$$

$$= 27^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Sigma = 3+4+5+5+4+4+6 = 20+8+3 = 31$$

$$\begin{array}{r} 3249 \mid 9 \\ 361 \end{array}$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$1) a > b$$

$$2) a - b \not\equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a \not\equiv b$$

$$3) (a-c)(b-c) = p^2 = ab - ac - bc + c^2$$

$$4) a + b^2 = 820$$

$$p^2 = c^2 + ab - c(a+b)$$

$$(p-c)(p+c) = ab - c(a+b)$$

$$\begin{array}{r} 820 \mid 2 \quad 235 \\ 410 \mid 2 \quad 711 \\ 205 \mid 5 \quad 13 \\ 41 \end{array}$$

$$I: a > c \quad b > c$$

$$II: c > a \quad c > b$$

$$a - c \vee b - c$$

$(\Rightarrow)$

$$a \vee b$$

$$\Rightarrow a - c = p^2 \quad b - c = 1 \quad I$$

$$a - c = -1 \quad b - c = -p^2 \quad II$$

$$a - c = p = b - c$$

$$\Downarrow$$

$$a = b \quad X$$

$$c - a = c - b$$

$$\Downarrow$$

$$a = b \quad X$$

$$820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 41$$

$$a \not\equiv b \pmod{3}$$

$$820 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\begin{cases} a \geq 1, b \geq 0 \\ a \geq 0, b \neq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{I} \quad a - c = p^2, \quad b - c = 1, \quad a > b, \quad a \not\equiv b \pmod{3}, \quad a + b^2 = 820$$

$$a = c + p^2 \quad a + b^2 = c + p^2 + (c+1)^2 = c + p^2 + c^2 + 1 + 2c = 820$$

$$b = c + 1$$

$$p^2 \not\equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p = 3$$

$(\Rightarrow)$

$$a \not\equiv b \pmod{3}$$

$$c = \frac{-3 \pm \sqrt{3249}}{2}$$

$$c, \quad a = c + 9, \quad b = c + 1$$

$$a + b^2 = c + 9 + c^2 + 2c + 1 =$$

$$= c^2 + 3c + 10 = 820$$

$$c^2 + 3c - 810 = 0$$

$$\Delta = 9 + 810 \cdot 4 = 9 + 40 + 3200 = 3249$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

I: $c, a=c+9, b=c+1$

$$c = \frac{-3 \pm \sqrt{3249}}{2}$$

$$c = \frac{-3 \pm 3 \cdot 79}{2} = \frac{-3 \pm 57}{2}$$

$c = -30$	$c = 27$
$a = -21$	$a = 36$
$b = -29$	$b = 28$

$$3249 = 9 \cdot 361$$

$$9 \cdot 19^2 = 3^2 \cdot 19^2$$

$$29^2 - 21 = 820 \checkmark$$

$$29^2 + 36 = 820 \checkmark$$

$$29^2 = 841$$

$$20^2 = 784$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 13} \\ 2 \overline{) 13} \\ 10 \overline{) 13} \\ 13 \overline{) 13} \\ 14 \\ 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 19} \\ 19 \overline{) 19} \\ 177 \overline{) 19} \\ 171 \\ 0 \\ 28 \\ 28 \\ 57 \end{array}$$

$$90 + 11$$

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 19 = \\ 2 \cdot 30 + 27 \cdot 2 \\ = 52 \end{array}$$

II $a-c=-1, b-c=-p^2, a>b, a \not\equiv b \pmod{3}, a+b^2=820$

$$a=c-1$$

$$b=c-p^2$$

$$a \not\equiv b \pmod{3} \Leftrightarrow c-1 \not\equiv c-p^2$$

$$\begin{array}{l} -1 \not\equiv -p^2 \pmod{3} \Rightarrow p \neq 3 \\ 1 \not\equiv p^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 119 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$240 = 2 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 2$$

$$a=c-1, b=c-9$$

$$a+b^2=c-1+c^2+81-18c=820$$

$$c = \frac{17 \pm 57}{2}$$

$$c^2 - 17c + 80 = 820$$

$$c^2 - 17c - 740 = 0$$

$$\Delta = 17^2 + 4 \cdot 740 =$$

$$= 2800 + 160 + 289 =$$

$$= 3089 + 160 = 3249 =$$

$$= 3^2 \cdot 19^2$$

$$c = 37$$

$$c = -20$$

$c = 37$	$c = -20$
$a = 36$	$a = -21$
$b = 28$	$b = -29$