



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -22:$$

$$e_4 = \sqrt{\frac{-324}{-25^3}} = \frac{18}{25^{\frac{3}{2}}} = \frac{18}{125}.$$

$$e_{10} = -18$$

$$e_{12} = \sqrt{-324 - 25} = 18 \cdot 5 = 90$$

$$\frac{e_{12}}{e_{10}} = 5^2 = 25 \text{ — невозможно}$$

Ответ: 5; -1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если $x < -\frac{6}{15}$, то $\sqrt[3]{(15x+6)(x-3)} = (-15x-6)^{\frac{3}{2}} \cdot (3-x)^{\frac{3}{2}}$

$$\sqrt[3]{\frac{(x-3)^3}{(15x+6)}} = \frac{(x-3)^{\frac{3}{2}}}{(15x+6)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(3-x)^{\frac{3}{2}}}{(-15x-6)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(3-x)^{\frac{3}{2}}}{(-15x-6)^{\frac{1}{2}}} \cdot (x+4) = \frac{(-15x-6)^{\frac{3}{2}} \cdot (3-x)^{\frac{3}{2}}}{(x+4)^3} \cdot \frac{(x+4)^3 \cdot (-15x-6)^{\frac{1}{2}} \cdot (3-x)^{\frac{1}{2}}}{(3-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(x+4)^4 = (-15x-6)^2$$

$x < -\frac{6}{15}$

$$-15x-6 < 0, -15x-6 > 0.$$

$$(x+4)^2 = -15x-6$$

$$x^2 + 23x + 22 = 0$$

$$x^2 + 23x + 22 = 0$$

$$(x+22)(x+1) = 0$$

$$x = -1 \quad \text{— не подходит.}$$

$$x = -22.$$

Проверим: $x = 5$.

4-ый член $\sqrt{\frac{9}{8}}$ решать 9-ый член $\sqrt{9 \cdot 2}$

знаем $\sqrt{\frac{9 \cdot 2}{9}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

$$a_1 \cdot d^5 = \sqrt{\frac{9}{8}} \cdot 2^5 = \sqrt{9} = 3 \quad \text{— модх.}$$

$$x = -1: \quad a_1 = \sqrt{\frac{-9}{-64}} = \frac{3}{8} \quad a_{10} = 3 \quad a_{12} = \sqrt{-9 \cdot 4} = 6 \quad d = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$$

$$a_1 \cdot d^9 = \frac{3}{8} \cdot 8 = 3 = a_{10} \quad \text{— модх}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

$$\cos x = t, -1 \leq t \leq 1$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3$$

$$f'(t) = 0$$

$$f'(t) = 0 \quad 12t^2 - 12t + 3 = 0$$

$$D = 12^2 - 3 \cdot 12 \cdot 4 = 0$$

$$t = -\frac{12}{24}$$

$f'(t) \neq 0$ - ~~неудовлетворяющая~~ ^{лишь только} возрастающая функция. при $t = -\frac{1}{2}$, $f'(t) = 0$ при $t = \frac{1}{2}$

2) $f(t)$ - ~~неудовлетворяющая~~ ^{лишь только} возрастающая ф-ия $\Rightarrow$ на промежутке $[-1; 1]$ принимает каждое

значение от $f(-1)$ до $f(1)$ по спуску.

тогда урав-е $f(t) = p$ на промежутке $[-1; 1]$ имеет корни, когда

$$p \in [f(-1); f(1)] \quad f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$$

$$p \in [-10; 4]$$

$$f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4$$

$$\text{Ответ: } [-10; 4] \quad \text{Область } [-10; 4]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

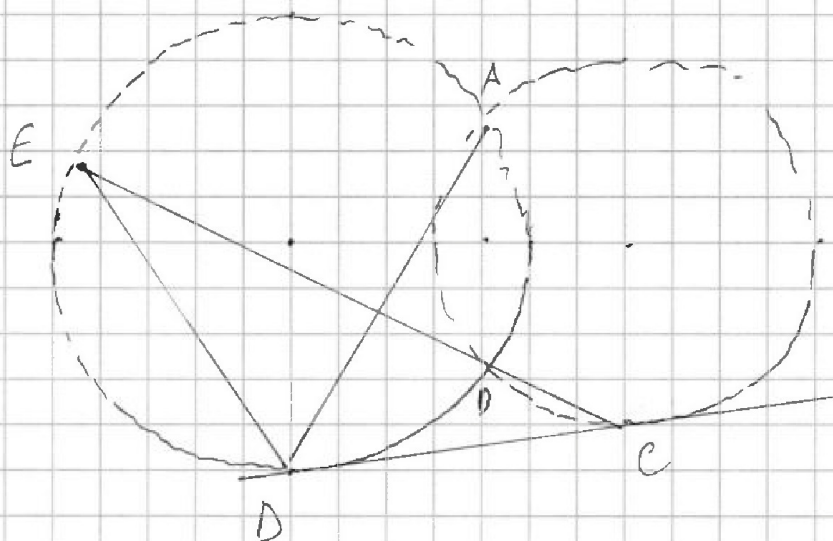
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{150 \cdot 200}{2} \text{ возможных точек способов } C_{15000}^1$$

$$= 15000$$

Аналогично для найдем кол-во способов B+D: 15000 возможных точек в нижней части, для каждой линии задает верхнюю, C_{15000}^1

имеет от другой стороны половину точек, равное кол-во в обеих.

Найдем C+D: рассмотрим 4 точки так, чтобы они не были совпадают в 1-ой половине прямой, симметричные относительно центра, ищем: $30000 \cdot 29996 \cdot 29994 \cdot 29992$

Найдем D: 1 клетка задает 1 симметричных об, тогда способов $30000 \cdot 29996$ В каждой из 2-х частей 4-х углов. по две точки, тогда случаев $\frac{7500 \cdot 7499}{2} = C_{7500}^2$

$$(A+B+C+D) = (A+D) + (B+D) + (C+D) - D.$$

$$A+B+C+D = 30000 \cdot 29996 \cdot 29994 \cdot 29992 = 3C_{15000}^2 + 3C_{7500}^2 - 2C_{7500}^2$$

$$3C_{15000}^2 - 3C_{7500}^2$$

$$3C_{15000}^2 - 2C_{7500}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$CE = \sqrt{CH_3^2 - EH_3^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Если $\angle C$ лежит на дуге-се внешней угла, то $\angle K \parallel AN_2$

$$\angle C = \frac{120}{2} = 60^\circ$$

$$\angle H_3CE = \angle H_2AK = 60^\circ$$

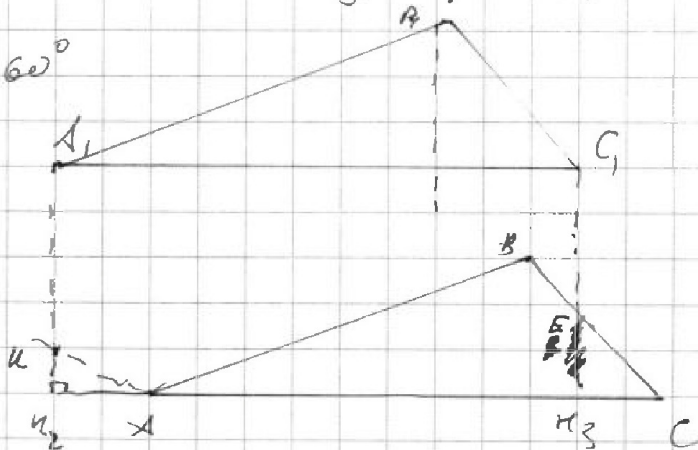
$\Rightarrow \angle C \Rightarrow E$ лежит на C ,

$\Rightarrow B, E$ - высоты

треугольника ABC

треугольника $\triangle ABC$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}; 2$



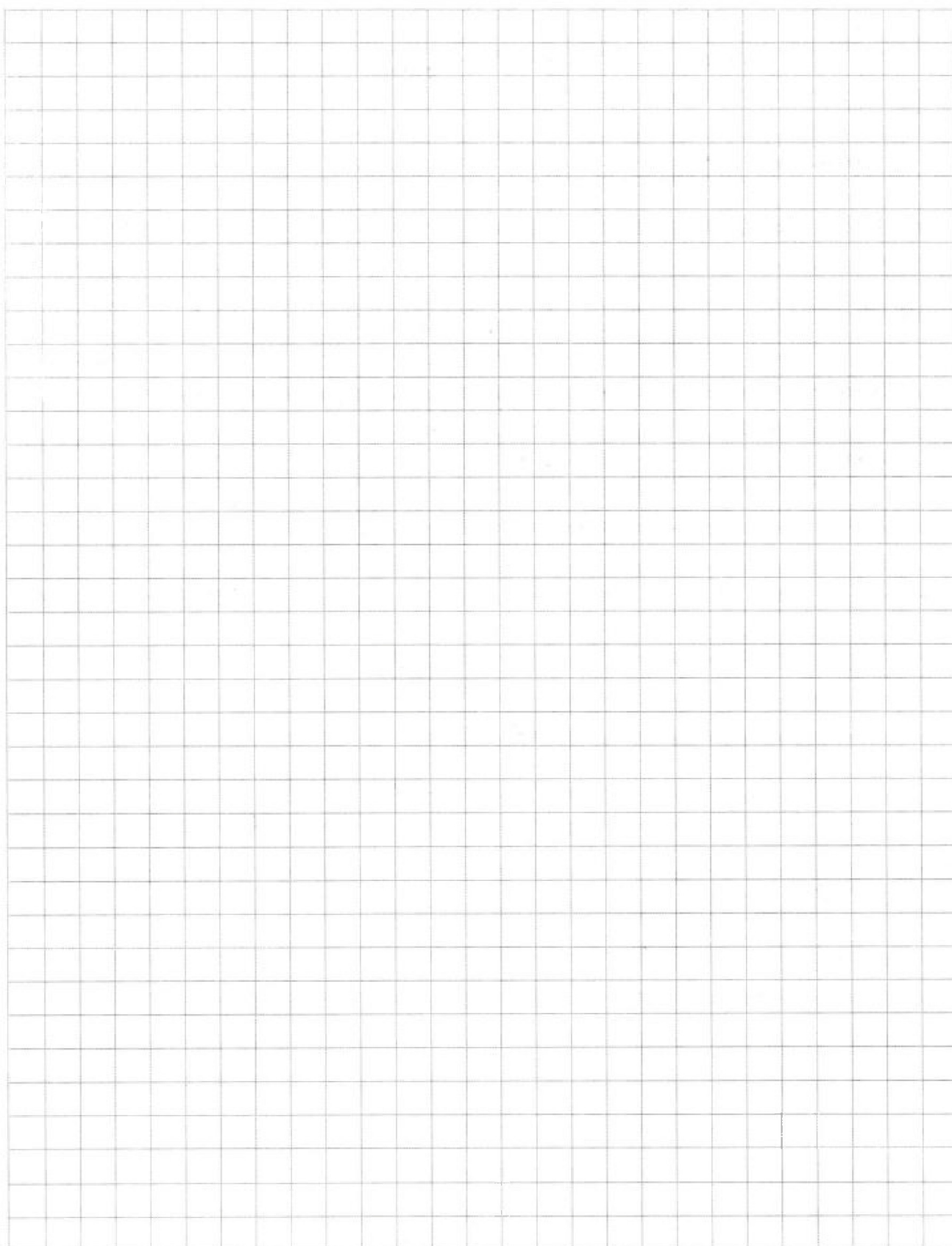


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



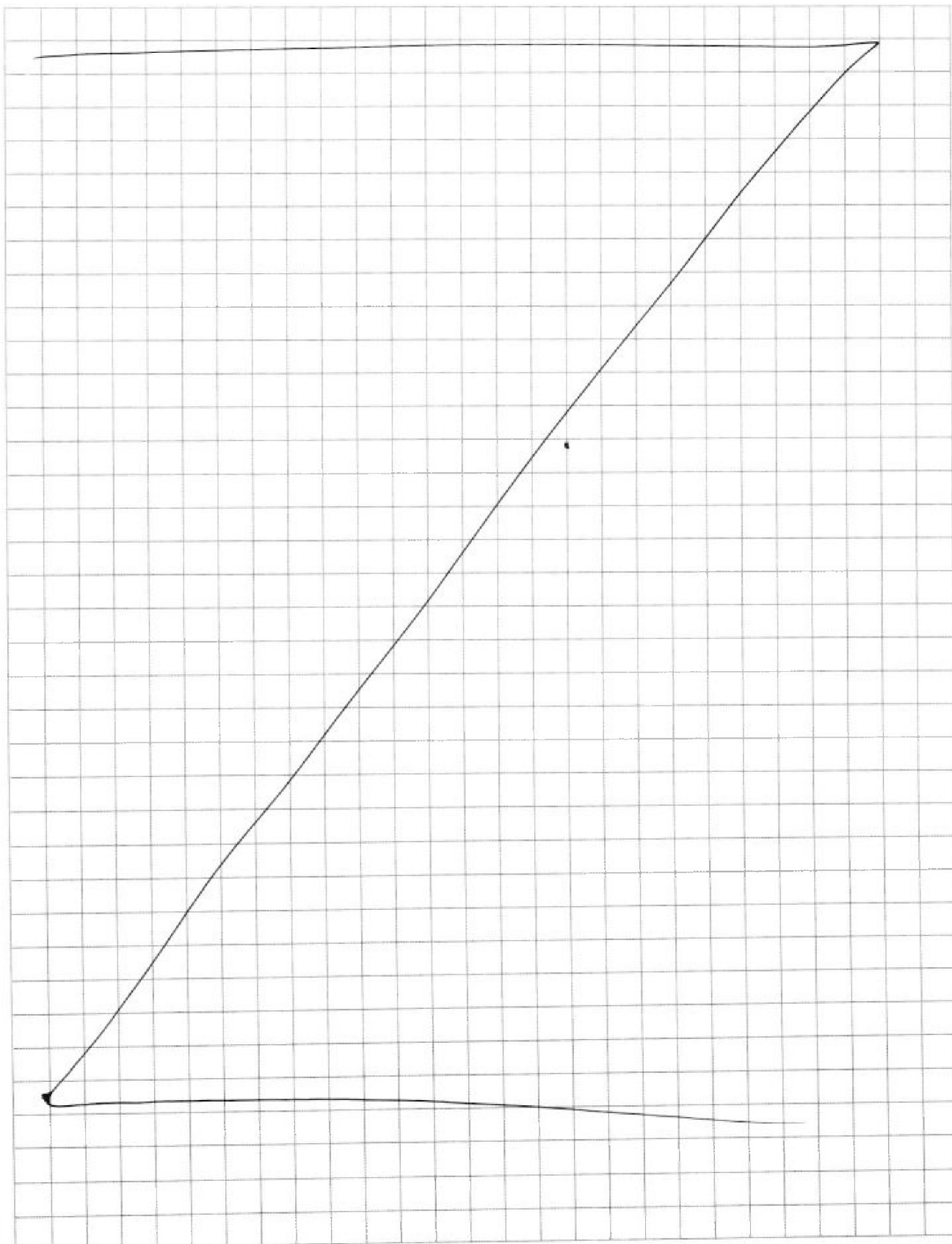


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



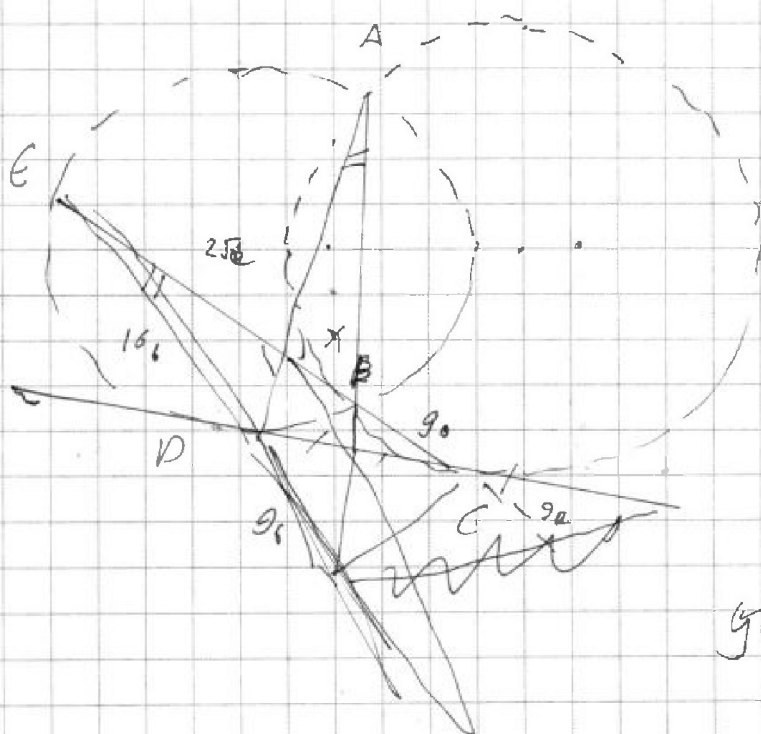


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a+b^2=20$$

$$c^2 = 2c(a+b) + ab$$

$$y \cdot y = 20$$

$$-3y + 90 = \sqrt{\dots}$$

$$20 - 35$$

$$50 - y =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$u, \sqrt{25 \cdot 200} \div 4$$

X	X
•	X

4.

4.

Дели только

целое

только!

$$\frac{75 \cdot 100}{2}$$

$$75 \cdot 10$$

$$\frac{75 \cdot 10 \cdot 7499}{2}$$

$$C^2_{7499}$$

$$\frac{1}{2} C^4_{15000} + C^4_{10000} - C^2_{7500}$$

$$\frac{C^4_{32000} \cdot 30000 \cdot 29996}{2}$$

X	X
•	X

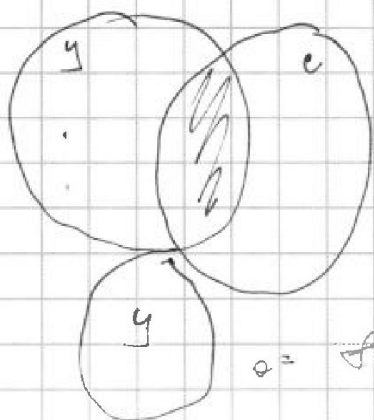


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

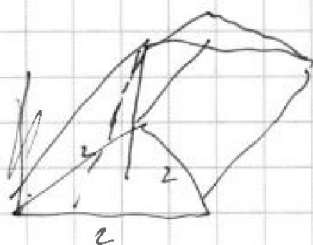
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

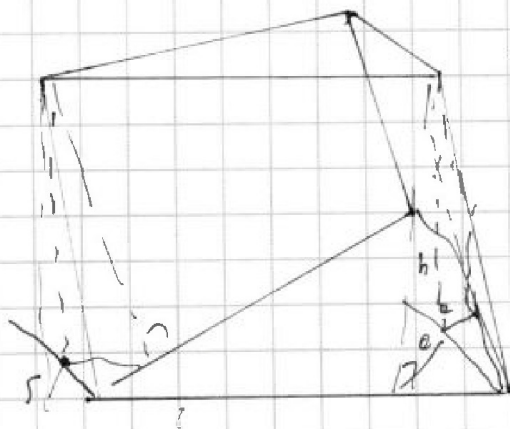
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 20 - b^2$$



b



$$c = 10 - b^2$$

$$(a; b) \rightarrow 20 - b^2 - b$$

$$15 - a; \quad \frac{1 - b^2 - b}{3}$$

$$(a; 20 - a) \quad ; 3$$

$$(a; 15 - a) \quad ; 3$$

$$(a; b)$$

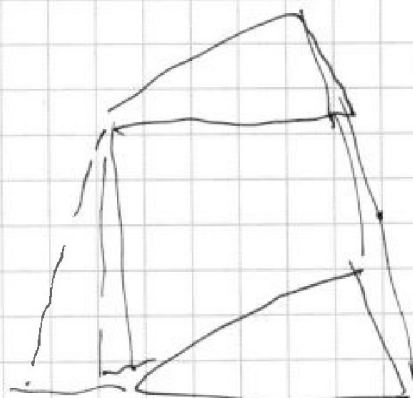
$$(15 - a; 15 - b)$$

$$a + b = 20$$

$$ab = \frac{100}{4}$$

$$c^2 = cb - ca + ab$$

$$c^2 = c(a + b) + ab = c^2$$



$$\begin{array}{ccc} a & b^2 & ab \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$a + b^2 = 10$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ \times 1 & 0 & \\ -1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$c^2 = cb - ca$$

$$c^2 = c(a + b)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$x+4 - \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = 3(x+4) \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} - (x+4)$$

$$\frac{x+4}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = \frac{\sqrt{15x+6} \cdot (x-3)^{\frac{3}{2}}}{(x+4)^3}$$

$$\frac{(x+4)^4}{(15x+6)^{\frac{1}{2}} (x-3)^{\frac{3}{2}}} = (15x+6)^{\frac{3}{2}} (x-3)^{\frac{3}{2}}$$

$$(x+4)^4 = (15x+6)^2$$

$$(x+4)^2 = \pm \sqrt{15x+6}$$

$$12t^2 - 12t + 3 = 0$$

$$D = 144 - 144 = 0$$

$$\frac{12}{24} = \frac{1}{2} \quad -4 - 6 - 1 + 3 = p < 0$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 16 = 15x + 6 \\ x^4 + 4 \end{cases}$$

$$\cos(3x) = \cos(2x+x)$$

$$= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$$

$$= 2\cos^2 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

