



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

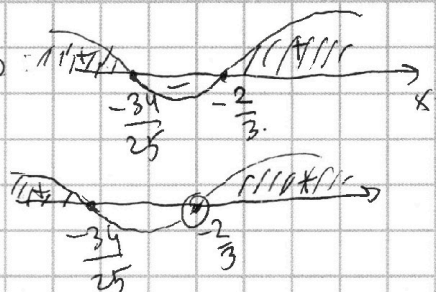
1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для начала найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \geq 0 \rightarrow \text{метод интервалов} \\ \frac{25x+34}{(3x+2)^3} \geq 0 \rightarrow \text{метод интервалов} \\ 3x+2 \neq 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

Теперь отметим тот факт, что $2-x \geq 0$, т.к. пусть q - знаменатель прогрессии, а $2-x = x_{12}$, $\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = x_{10} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_{12} = q^2 x_{10}$ $\begin{cases} q^2 \geq 0 - \text{т.к. это квадрат} \\ x_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \geq 0, \text{ т.к. это корень} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow q^2 x_{10} = x_{12} = 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

Теперь мы получаем, что $x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; 2]$.

Затем теперь найдем, что т.к. $2-x$ - 12-й член прогрессии,

$$\text{а } \sqrt{(25x+34)(3x+2)} - 10\text{-й, то то } \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = q^2$$

(также отметим, что $x \neq 2$, иначе $2-x=0 \Rightarrow \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = 0$, но тогда $x = -\frac{34}{25}$). Аналогично: $\frac{\sqrt{25x+34}}{(3x+2)^3} = q^6$, т.к. это 18-й

и 10-й 12-й члены соответственно.

$$\text{Отсюда следует, что } \left(\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} \right)^3 = \frac{\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}}{2-x} \Leftrightarrow$$

$$(2-x)^4 = (25x+34)(3x+2) \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$\Leftrightarrow (2-x)^4 = (25x+34)(3x+2) \sqrt{\frac{(25x+34)^2}{(3x+2)^2}}$$

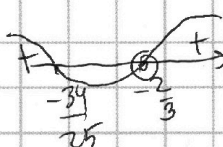
т.к. у нас $x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; 2]$, то $x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; 2]$



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

из метода интервалов для выражения $\frac{25x+34}{3x+2}$: 
 Это прикинем неотрицательные значения на
 множестве чисел x , которое мы рассматриваем $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{25x+34}{3x+2}\right)^2} = \frac{25x+34}{3x+2}$$

Тогда $(2-x)^4 = (25x+34)(3x+2) - \frac{25x+34}{3x+2} \Leftrightarrow (2-x)^4 = (25x+34)^2$

Значит, $\begin{cases} 25x+34 = (2-x)^2 \\ 25x+34 = -(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 29x - 30 = 0 \quad (1) \\ x^2 + 21x + 38 = 0 \quad (2) \end{cases}$

(1): $D = 29^2 + 120 = 841 + 120 = 961 = 31^2$ (2) $D = 441 - 38 \cdot 4 = 289 = 17^2$

$x_1 = \frac{29+31}{2} = 30 \notin \text{ОДЗ}$

$x_2 = \frac{29-31}{2} = -1 \notin \text{ОДЗ, м.к.}$

находятся между $-\frac{34}{25}$ и $-\frac{2}{3}$

$x_1 = \frac{-21+17}{2} = -2 \in \text{ОДЗ, м.к.} < -\frac{34}{25}$

$x_2 = \frac{-21-17}{2} = -19 \in \text{ОДЗ, м.к.} < -\frac{34}{25}$

Теперь заметим, что все $x \in$ нашему ОДЗ и являющиеся решениями данного уравнения обязательно подходят, т.к. все члены уравнения при $x = -2$ и $x = -19$ будут ≥ 0

и будет выполнено: $\left(\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}\right)^3 = \frac{\sqrt{(25x+34)}}{(3x+2)^{3/2}}$ тогда в

числителе q можно будет взять $\sqrt{\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}}$, а

в числителе $x_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$

В таком случае $2-x$ выразится, как $x_{10} \cdot q^2$, т.е. как x_{12} ,

а $\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$, как $x_{12} \cdot q^6$, т.е. как $x_{18} \Rightarrow -2$ и -19 подходят.

Ответ: $x_1 = -2$

$x_2 = -19$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x =$$

$$= \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

Замена: $t = \cos x \Rightarrow$

$$p(4t^3 - 3t) + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0.$$

$\cos x \in [-1; 1] \Rightarrow$ чтобы уравнение имело решение, нужно, чтобы для корня $t \in [-1; 1]$.

$$p(4t^3 - 3t) + 12t^2 + 12t - 3(p+4)t + 10 = 0.$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 10 = 0.$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0.$$

$$(t+1)^3 + (p-1)t^3 = 0.$$

$$(t+1)^3 = -(p-1)t^3$$

$$t+1 = -\sqrt[3]{p-1} t$$

$$t(1 + \sqrt[3]{p-1}) = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

Пусть означим, что $\sqrt[3]{p-1} \neq -1$, иначе

$(1 + \sqrt[3]{p-1}) = 0 \Rightarrow$ уравне не имеет корней,

т.к. справа не ноль.

тогда $p-1 \neq -1 \Rightarrow p \neq 0.$

Итак, $t = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$

Мы хотим, чтобы $-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \in [-1; 1]$

Пусть $\sqrt[3]{p-1} = k \Rightarrow -\frac{1}{1+k} \in [-1; 1] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+k} \in [-1; 1] \Rightarrow 1+k \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty) \quad m \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[3]{p-1} \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$$

$$p-1 \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$$

$$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

Ответ: $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

Решением для любого p является:

$$\cos x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ.

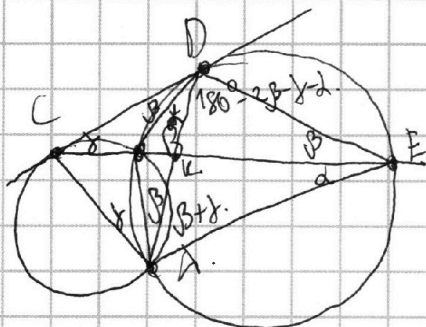


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $AD \cap CE = K$.

Тогда из условия: $\frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$

Пусть $\angle AEC = \alpha$; $\angle CED = \beta$; $\angle CAB = \gamma$. Тогда заметим, что из вписанности $BAED$: $\angle BAD = \angle CED = \beta$. Аналогично $\angle BDK = \alpha$.

Теперь заметим, что $\angle CDB = \beta$ — т.к. это угол между касательной CD и хордой BD , на которую опирается вписанный $\angle CED = \beta$. Также, заметим $\angle CAB = \angle DCE = \gamma$. Т.к. DK — высота в $\triangle CDE$, то $\frac{S_{\triangle CDK}}{S_{\triangle DEK}} = \frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$. С другой стороны, по

суммам площадей площадей $\triangle$ -ов: $\frac{S_{\triangle CDK}}{S_{\triangle DEK}} = \frac{\frac{1}{2} CD \cdot DK \cdot \sin \angle CDK}{\frac{1}{2} DE \cdot DK \cdot \sin \angle EDK} = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin \angle CDK}{\sin \angle EDK}$. Тут имеем, $\angle CDK = \alpha + \beta$ (как сумма $\angle CDB$ и $\angle BDK$).

Также $\angle EDK = 180^\circ - \gamma - \beta - \alpha - \beta = 180^\circ - 2\beta - \gamma - \alpha$ (по сумме углов $\triangle CDE$).

$\Rightarrow \sin \angle EDK = \sin(180^\circ - \gamma - \beta - \alpha - \beta) = \sin(2\beta + \gamma + \alpha)$

$\sin \angle CDK = \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow \frac{S_{\triangle CDK}}{S_{\triangle DEK}} = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \alpha)}$

Тогда $\frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \alpha)} = \frac{7}{20} \Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{20}{7} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \alpha)}$

Теперь найдем, что $\angle DAE = 180^\circ - \alpha - \beta - (180^\circ - 2\beta - \gamma - \alpha) = \gamma + \beta$ (по сумме углов $\triangle DAE$).

По т. синусов для $\triangle ADE$: $\frac{AE}{\sin(180^\circ - 2\beta - \gamma - \alpha)} = \frac{AD}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \alpha)} = \frac{AD}{AE}$

Тогда $\frac{DE}{CD} = \frac{20}{7} \cdot \frac{AD}{AE}$. Также мы знаем, что $\angle DAE = \gamma + \beta$. Также,

$\angle CAD = \angle CAB + \angle DAB = \gamma + \beta \Rightarrow AK$ — биссектриса в $\triangle CAE$.

Тогда по свойству б-биссектрисы: $\frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$. Пусть тогда $AC = 7x$; $AE = 20x$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь заметим, что $\triangle ADC \sim \triangle AED$ (м.к. $\angle CAD = \angle DAE = \beta + \gamma$ и $\angle CDA = \angle DEA = \alpha + \beta$). $\Rightarrow$ из подобия: $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD^2 = AC \cdot AE \Rightarrow$

$$\Rightarrow AD^2 = 7x \cdot 20x = 7 \cdot 20x^2 \Rightarrow AD = x \cdot 2\sqrt{35}$$

$$\text{Тогда } \frac{DE}{CD} = \frac{20}{7} \cdot \frac{AD}{AE} = \frac{20}{7} \cdot \frac{x \cdot 2\sqrt{35}}{20x} = \frac{2\sqrt{35}}{7}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{35}}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если прямоугольник симметричен по одной средней линии, то он центрально-симметричен. Если он симметричен относительно центра и по одной из средних линий, то он также и симметричен и по второй средней линии. Отсюда следует, что либо ни один прямоугольник обладает всеми тремя свойствами, либо только одна из трёх. Значит, давайте считать количество способов, как количество прямоугольников, симметричных по первой средней линии + количество прямоугольников, симметричных по 2-й средней линии + кол-во прямоугольников симметричных относительно центра - кол-во прямоугольников со всеми симметриями.

Заметим, что кол-во прямоугольников, симметричных относительно 1-й средней линии можно найти следующим образом. Пусть 1-я средняя линия - это верхняя средняя линия. Проведём её. Тогда прямоугольник разделим на 2 равные части, в каждой из которых находится половина всех клеток, т.е. $\frac{500 \cdot 120}{2} = 250 \cdot 120 = 500 \cdot 60 = 30\,000$ клеток. Поставим в левую половину 4 клетки. Тогда по симметрии однозначно задается правая половина. И наоборот. 4 клетки правой половины определяет собой левую половину, т.е. 4 клетки в ней $\Rightarrow$ кол-во способов равно C_4^{30000} .

Аналогично и для 2-й средней линии кол-во способов равно C_4^{30000} . Заметим, что прямоугольник с центральной симметрией определяется также по одной из половин прямоугольников однозначно $\Rightarrow$ и для центральной симметрии способов будет C_4^{30000} .

Теперь найдём кол-во способов построить прямоугольник



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

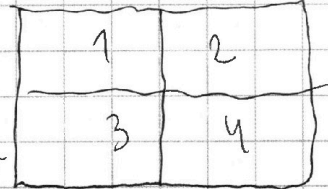
СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

с тремя симметриями. Для этого достаточно

разделить квадрат на такие 3 части:

т.е. убрать обе средние линии.



Утверждается, что это по четверти

из с нулем и единично восстановится распо-

рядка. Это действительно правда, т.к. по симметрии

от вертикальной ср. линии задается 2-я четверть,

а по горизонтальной — 3-я четверть,

а по центральной симметрии — 4-я четверть.

То и наоборот, 4 восстановит с тремя симметриями

задачу содей 1-ю четверть, где будет равно 2

клетки $\rightarrow$ кол-во способов построения равно C_{15000}^2

Итак кол-во способов равно: $3 \cdot C_{30000}^2 - 2 \cdot C_{15000}^2$

кол-во клеток
в четверти
коэф. равен 2,
т.к. восстановит
с тремя симметриями
мы начитали 3 раза.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Даны условия $a^2 + b = 1000$ и условие $a < b$.
 Для начала найдем все возможные пары, где $a \geq 0$.

это пары:

0) $a=0$ $b=1000$
1) $a=1$ $b=999$
2) $a=2$ $b=996$
3) $a=3$ $b=991$
4) $a=4$ $b=984$
5) $a=5$ $b=975$
6) $a=6$ $b=964$
7) $a=7$ $b=951$
8) $a=8$ $b=936$
9) $a=9$ $b=919$
10) $a=10$ $b=900$

11) $a=11$ $b=879$	21) $a=21$ $b=559$
12) $a=12$ $b=856$	22) $a=22$ $b=516$
13) $a=13$ $b=831$	23) $a=23$ $b=471$
14) $a=14$ $b=804$	24) $a=24$ $b=424$
15) $a=15$ $b=775$	25) $a=25$ $b=375$
16) $a=16$ $b=744$	26) $a=26$ $b=324$
17) $a=17$ $b=711$	27) $a=27$ $b=271$
18) $a=18$ $b=676$	28) $a=28$ $b=216$
19) $a=19$ $b=639$	29) $a=29$ $b=159$
20) $a=20$ $b=600$	30) $a=30$ $b=100$
31) $a=31$ $b=59$	

Команда с $a=32$ становится меньше нуля.

Проверим, когда $b-a \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow b-a \equiv 0 \pmod{3}$.

$$b = 1000 - a^2 \Rightarrow 1000 - a^2 - a \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 1 \equiv \frac{a^2 + a}{3}$$

$$\text{при } a \equiv 1 \pmod{3}: a^2 + a \equiv 2 \pmod{3} \quad \text{при } a \equiv 2 \pmod{3}: a^2 + a \equiv 4 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{при } a \equiv 0 \pmod{3}: a^2 + a \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow \text{если } b = 1000 - a^2, \text{ то } b-a \text{ обязательно } \not\equiv 0 \pmod{3}$$

3) За этим условием уже можно не следовать.

Пусть теперь $(a-c)(b-c) = p^2$. Так p^2 может быть представлено в виде произведения двух целых чисел или в 4-х случаях:

$$1) p^2 = p \cdot p \quad 2) p^2 = (-p) \cdot (-p) \quad 3) p^2 = p^2 \cdot 1 \quad 4) p^2 = (-p^2) \cdot (-1)$$

(1) и (2) случаи сразу отпадают, т.к. $a-c \neq b-c$, т.к. $a \neq b$

$$\text{Потом, т.к. } a < b, \text{ то } a-c < b-c. \Rightarrow \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow b-a=p^2-1$$

Найдем пары (a, b) такие, что:

$$a < b; a^2 + b = 1000 \text{ и } b-a = p^2-1.$$

$$\text{т.к. } a^2 + b = 1000, \text{ то } b = 1000 - a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1000 - a^2 - a = p^2 - 1.$$

$$p^2 - 1 > 0 \Rightarrow 1000 - a^2 - a > 0. \Leftrightarrow a^2 + a - 1000 < 0.$$

$$D = 1 + 1000 \cdot 4 = 4000 + 4001$$

$$a_1 = \frac{-1 + \sqrt{4001}}{2}; a_2 = \frac{-1 - \sqrt{4001}}{2}$$

$$\Rightarrow a \in \left(\frac{-1 - \sqrt{4001}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{4001}}{2} \right).$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Можно из условия: $b > a \Rightarrow 1000 - a^2 > a$, т.е. $1000 - a^2 - a > 0$
 Значит, рассматривая a на отрезке от $\frac{-1 - \sqrt{4001}}{2}$ до $\frac{-1 + \sqrt{4001}}{2}$
 можно задать про условие $a < b$, ведь оно и так выполняется.

Максимальное значение функции $1000 - a^2 - a$ достигается в вершине, т.е. это параболы с вершинами b . Вершина попадает в b т.е. $(-\frac{1}{2}; 1000 + \frac{1}{4}) \Rightarrow p^2 - 1 \leq 1000 \Rightarrow p^2 \leq 1001$.

Тогда $p_{\max} = 31$, т.к. $32^2 = 1024 > 1001$. $\Rightarrow$ можем перебрать все p от 2 до 31:

- | | | |
|------------|---|---|
| 1) $p=2$ | $1000 - a - a^2 = 3 : 3 \times a^2 + a - 997 = 0$ | $D = 3989$ - не квадрат |
| 2) $p=3$ | $1000 - a - a^2 = 8$ | $a^2 + a - 992 = 0$ $D = 3969$ - не квадрат |
| 3) $p=5$ | $1000 - a - a^2 = 24 : 3 \times a^2 + a - 976 = 0$ | $D = 3905$ - не квадрат |
| 4) $p=7$ | $1000 - a - a^2 = 48 : 3 \times a^2 + a - 952 = 0$ | $D = 3809$ - не квадрат |
| 5) $p=11$ | $1000 - a - a^2 = 120 : 3 \times a^2 + a - 880 = 0$ | $D = 3521$ - не квадрат |
| 6) $p=13$ | $1000 - a - a^2 = 168 : 3 \times a^2 + a - 832 = 0$ | $D = 3329$ - не квадрат |
| 7) $p=17$ | $1000 - a - a^2 = 288$ | $a^2 + a - 712 = 0$ $D = 2849$ - не квадрат |
| 8) $p=19$ | $1000 - a - a^2 = 360 : 3 \times a^2 + a - 640 = 0$ | $D = 2561$ - не квадрат |
| 9) $p=23$ | $1000 - a - a^2 = 528 : 3 \times a^2 + a - 472 = 0$ | $D = 1889$ - не квадрат |
| 10) $p=29$ | $1000 - a - a^2 = 840 : 3 \times a^2 + a - 160 = 0$ | $D = 641$ - не квадрат |
| 11) $p=31$ | $1000 - a - a^2 = 960 : 3 \times a^2 + a - 40 = 0$ | $D = 161$ - не квадрат |

Ответ: ~~маленьких~~ ~~нет~~.

Там, где разность кратна 3-м целому числу не будет, т.е. мы знаем, что $b - a : 3$.

Тогда возможны 2 случая: $1000 - a - a^2 = 8$. $\Rightarrow \begin{cases} a^2 + a - 992 = 0 \\ 1000 - a - a^2 = 168 \end{cases}$

1) $D = 1 + 992 \cdot 4 = 3969 = 63^2$. $\Rightarrow a_1 = \frac{-1 + 63}{2} = 31$; $a_2 = -32$.

2) $D = 1 + 832 \cdot 4 = 3329$ - не квадрат. $b_1 = 39$ $b_2 = -24$.

Тогда 1) $a - c = 1 \Rightarrow C_1 = 30$

Проверка: $(31; 39; 40)$ и $(31; 39; 30)$.

$(a-c)(b-c) = 3^2$ $(a-c)(b-c) = 3^2$

$a - c = -9 \Rightarrow C_2 = 40$

Проверка: $(-32; -24; -33)$ и $(-32; -24; -23)$.

2) $a - c = 1 \Rightarrow C_1 = -33$

$a - c = -9 \Rightarrow C_2 = -23$

Ответ: $(31; 39; 40); (31; 39; 30); (-32; -24; -33); (-32; -24; -23)$

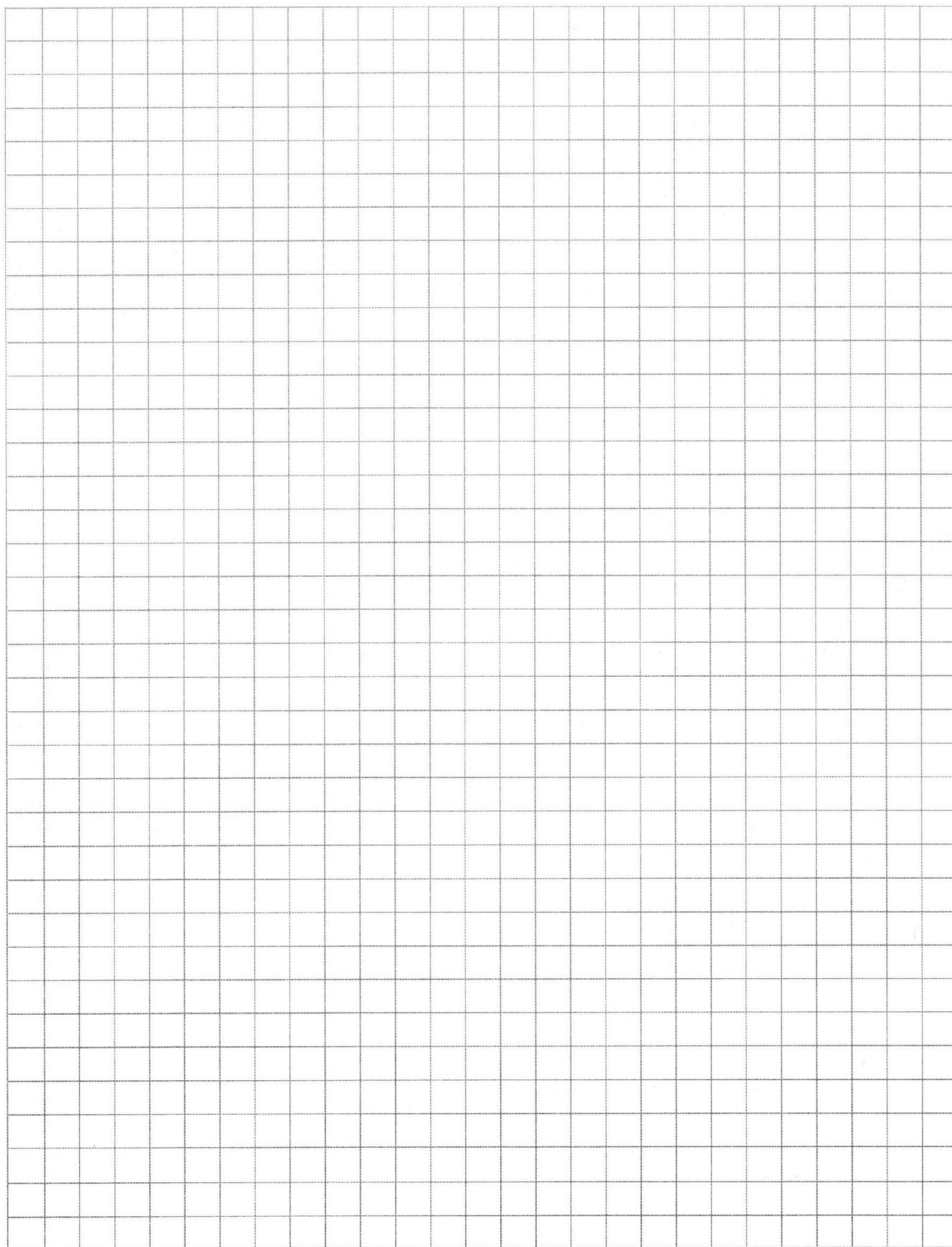


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

003: $\sqrt{25x+34} - 1 = p^2 - 1$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ - 529 \\ \hline 471 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 375 \\ - 51 \\ \hline 324 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 1000 \\ - 225 \\ \hline 775 \end{array}$$

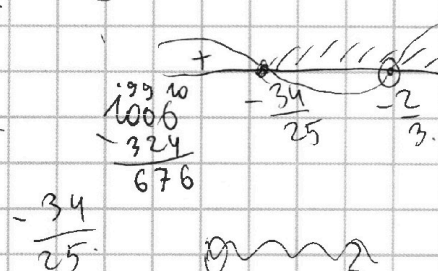
$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 23 \\ \hline 84 \\ 560 \\ \hline 644 \end{array}$$

$$(25x+34)(3x+2) \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ - 25 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$25x+34 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 471 \\ - 47 \\ \hline 424 \end{array}$$



$$x > -\frac{2}{3}$$

$$x \neq -\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 516 \\ \hline 516 \\ 5160 \\ \hline 5160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 11 \\ \hline 17 \\ 187 \\ \hline 187 \end{array}$$

$$\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$\frac{1}{3x+2} \sqrt{\frac{1}{3x+2}}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 23 \\ \hline 78 \\ 520 \\ \hline 598 \end{array}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{\frac{1000}{639}}$$

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3x+2}}$$

$$\frac{1}{3x+2} \sqrt{\frac{1}{3x+2}}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 23 \\ \hline 78 \\ 520 \\ \hline 598 \end{array}$$

$$a < b$$

$$b-a \geq 3$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$\sqrt{\frac{1}{(3x+2)^3}}$$

$$\frac{1}{3x+2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$\frac{1}{3x+2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 23 \\ \hline 78 \\ 520 \\ \hline 598 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ 441 \\ \hline 441 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 484 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$(2-x)^3$$

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times 65 \\ \hline 325 \\ 390 \\ \hline 4225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times 61 \\ \hline 361 \\ 722 \\ \hline 3721 \end{array}$$

$$\frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$\frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$x > -\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 23 \\ \hline 78 \\ 520 \\ \hline 598 \end{array}$$

$$(25x+34)(3x+2) \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$(2-x)(3x+2) = (25x+34) \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$-3x^2 + 6x - 2x + 4$$

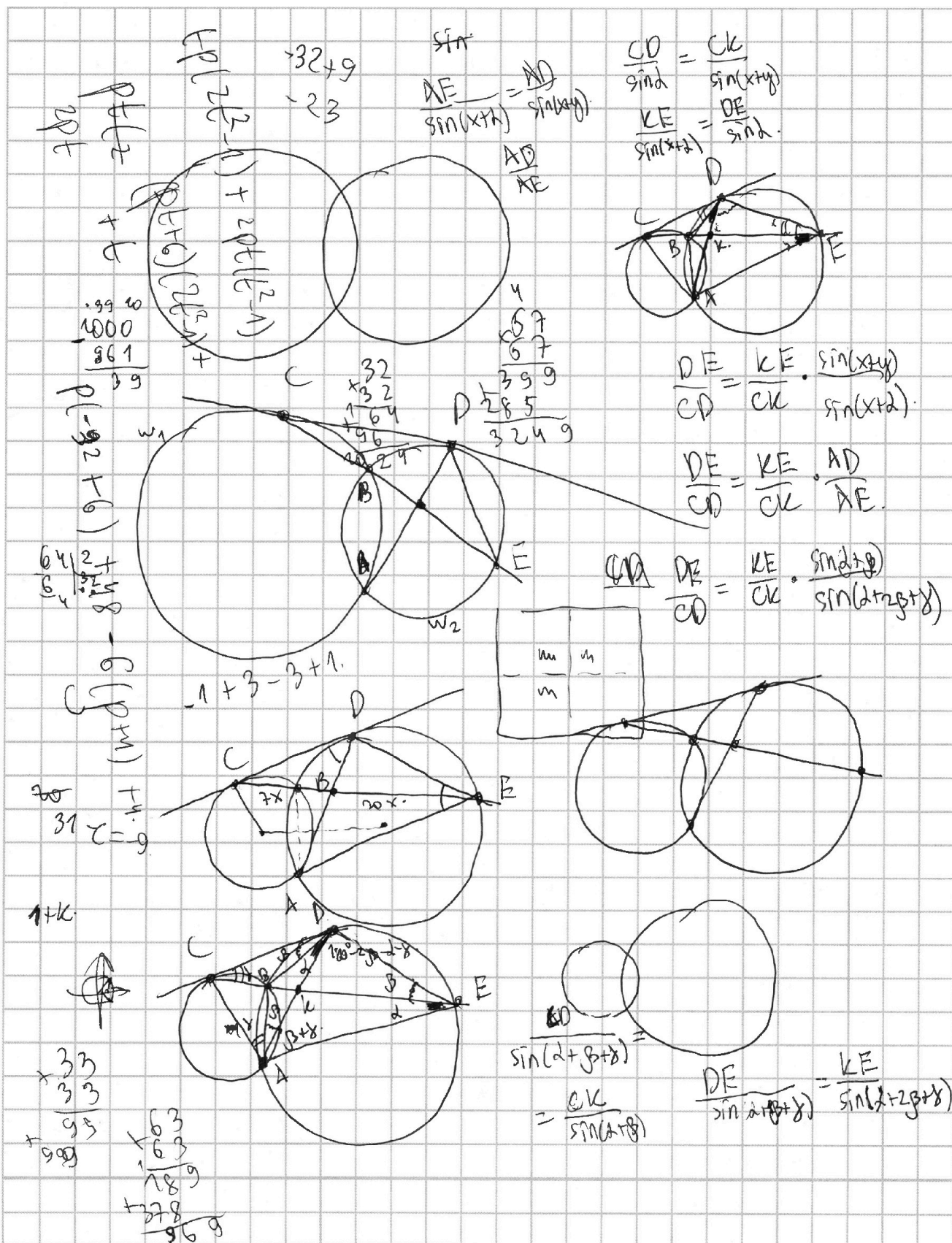
$$-3x^2 + 4x + 4$$

$$(2-x) \sqrt{3x+2} = (25x+34) \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$-\frac{4}{-6} = \frac{2}{3}$$



$$(25x+34)^3 (3x+2) = 2-x$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a=1 \quad b=999$$

$$a=2 \quad b=996$$

$$a=3 \quad b=991$$

$$a=4 \quad b=99 \cdot 1000 - 4^2$$

$$a=5$$

$$\vdots$$

$$a=31$$

$$\begin{array}{r} 9990 \\ -1000 \\ \hline 8990 \end{array}$$

$$a=30$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times 31 \\ \hline 31 \\ 93 \\ \hline 961 \end{array}$$

$$999$$

$$995$$

$$989$$

$$981 \quad 979$$

$$959$$

$$949$$

$$\begin{array}{r} 951 \\ -7 \\ \hline 944 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ \times 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$936$$

$$928$$

$(a-c)(b-c)$ - квадрат целого

$$a-c=1 \quad a < b \Rightarrow a \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array}$$

$$a-c=1$$

$$b-c=1$$

$$\begin{cases} c=a-1 \\ b=1-a \end{cases}$$

$$b=1000-a^2$$

$$b-a=1000-a^2-a \equiv 0$$

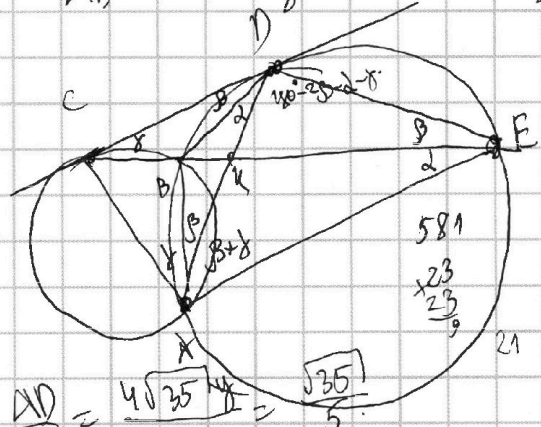
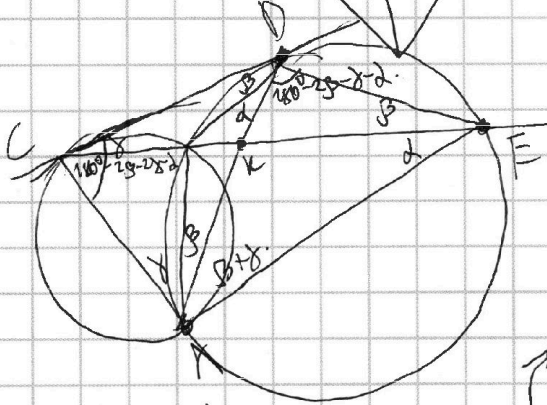
$$1-a^2-a \equiv 0$$

$$1 \equiv a^2+a$$

$$AD^2 = AE \cdot AC = 70y^2$$

$$AD = 4\sqrt{35}y$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AD}$$



$$\frac{AD}{AE} = \frac{4\sqrt{35}y}{20y} = \frac{\sqrt{35}}{5}$$

$$\frac{AD}{AE}$$

$$\cos(x+2x) =$$

$$= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$

$$\cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x \cdot 2 \cos x \sin x$$

$$\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$

$$\frac{\sqrt{35}}{5} \cdot \frac{20}{7} = \frac{4\sqrt{35}}{7}$$