



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)}, \text{ девятый член равен } x+3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Пусть геометрическая прогрессия задается формулой $b_n = b_1 q^{n-1}$, где $n \in \mathbb{N}$; b_1 — первый член геометрической прогрессии. По условию:

$$\begin{cases} b_1 q^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 q^8 = x+3 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 q^{11} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} & (3) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} (25x-9)(x-6) \geq 0 \\ \frac{25x-9}{(x-6)^3} \geq 0 \\ x-6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 6 \Rightarrow (x-6)^4 > 0 \end{cases}$

График: $+ \frac{9}{25} - 6 + x$

По методу интервалов: $x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$

Таким образом, (3) можно записать следующим образом: $b_1 q^{11} = \frac{1}{(x-6)^2} \cdot \sqrt{(25x-9)(x-6)} \quad (4)$

Если бы $b_1 = 0$ или $q = 0$, то: $\begin{cases} 25x-9=0 \Leftrightarrow x=\frac{9}{25} \\ x+3=0 \Leftrightarrow x=-3 \end{cases}$ (противоречие)

Значит $b_1 \neq 0$ и $q \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{9}{25}$.

Из (1) и (4): $b_1 q^{11} = \frac{1}{(x-6)^2} \cdot b_1 q^6 \Leftrightarrow q^8 = \frac{1}{(x-6)^2} \quad (5) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (из (2) и (5)) $b_1 \cdot \frac{1}{(x-6)^2} = x+3 \Leftrightarrow b_1 = (x-6)^2(x+3) \quad (6)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Зная b_1 и q^2 . Преобразуем (5): $q^2 =$ (так как $q^2 > 0$) $\sqrt[4]{\frac{1}{(x-6)^2}} \Leftrightarrow q^6 = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{(x-6)^2}}\right)^3 \Rightarrow$ (из (6) и (7))

$$\Rightarrow (x-6)^2 (x+3) \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{1}{(x-6)^2}}\right)^3 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3) \cdot ((x-6)^2)^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{(x-6)^2}} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3) \cdot \sqrt[4]{(x-6)^2} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \text{ (напомним, что}$$

равносильность применяли на ВДЗ). Теперь

мы помним, что (так как $x \neq 6$ и $x \neq \frac{9}{25}$)

$x > -3$. Тогда мы можем (учитывая, что

$x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty)$) возвести обе части в

квадрат: $(x+3)^2 \sqrt{(x-6)^2} = (25x-9)(x-6)$. Рассмотрим

2 случая:

$$\text{I случай: } x > 6 \Rightarrow (x+3)^2 = 25x-9 \Leftrightarrow x^2 - \overbrace{19}^{18+1}x + 18 =$$

$$= 0 \Leftrightarrow (x-18)(x-1) = 0 \text{ Но } x-1 > 5 > 0 \Rightarrow x = 18 (> 0)$$

$$\text{II случай: } x \in (-3; \frac{9}{25}) \Rightarrow (x+3)^2 = 9-25x \Leftrightarrow x^2 + 31x =$$

$$= 0 \Leftrightarrow x(x+31) = 0, \text{ Но } x+31 > 28 > 0 \Rightarrow x = 0 \in (-3; \frac{9}{25})$$

Ответ: 0; 18

Если $x=0$, то $b_1=108$, а $q \in \{-\sqrt[4]{\frac{1}{6}}; \sqrt[4]{\frac{1}{6}}\}$.

Если $x=18$, то $b_1=12^2 \cdot 21$, а $q \in \{-\sqrt[4]{\frac{1}{12}}; \sqrt[4]{\frac{1}{12}}\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$

Пусть $x+2=t$; $y+4=w$. Тогда:

$$\begin{cases} \sqrt{t+3} - \sqrt{3-t-4z} + 4 = 2\sqrt{w-t^2+z} \quad (1) \\ |w| + 4|w-9| = \sqrt{81-z^2} \quad (2) \end{cases}$$

2) правая часть $\in [0; 9]$ (по ОДЗ: $z \in [-9; 9]$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ левая часть тоже. Если бы $w \geq 9$, то $|w| + 4|w-9| =$

$= 5w - 36 \geq 9$ бы. Значит $w \leq 9$.

Заметим, что $|w| + 4|w-9| = \begin{cases} 5w-36, & \text{если } w \geq 9 \\ -3w+36, & \text{если } w \in [0; 9] \\ -5w+36, & \text{если } w < 0 \end{cases}$

Первый случай невозможен $\Rightarrow$ выполняется один

из 2-х других $\Rightarrow$. Но $(-3w+36)' = -3$ и $(-5w+36)' =$

$-5 \Rightarrow$ на $(-\infty; 9]$: $|w| + 4|w-9|$ непрерывно, $\searrow$ (как раз

до 9) $\Rightarrow |w| + 4|w-9| \in [9; +\infty)$. Но $\sqrt{81-z^2} \leq 9$.

Таким образом: $\begin{cases} z=0 \\ w=9 \Leftrightarrow y=5 \end{cases}$

Подставим z и w в (1): $\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t} + 4 = 2\sqrt{9-t^2}$ (3)

ОДЗ: $t \in [-3; 3]$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \sqrt{t+3} + 4 = 2\sqrt{9-t^2} + \sqrt{3-t} \Leftrightarrow (t+3) + 8\sqrt{t+3} = (36-4t^2) + (3-t) + 4\sqrt{3-t} \cdot \sqrt{9-t^2} \Leftrightarrow$$

$$3) \sqrt{t+3} - \sqrt{3-t} = 2\sqrt{9-t^2} - 4. \text{ Возведём обе части в квадрат (потом сделаем проверку):}$$

$$(t+3) + (t-3) - 2\sqrt{9-t^2} = (36-4t^2) + 16 - 8\sqrt{9-t^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{9-t^2} = -4t^2 - 2t + 52. \text{ Пусть } t^2 = v. \text{ Тогда:}$$

$$2\sqrt{9-v} = -2v - t + 52. \text{ Пусть } v = 2t. \text{ Тогда: } 2\sqrt{36-v^2} = -v^2 - v + 52.$$

$$\text{Возведём обе части в квадрат:}$$

$$3) \underbrace{2\sqrt{t+3}}_a - \underbrace{2\sqrt{3-t}}_b + 8 = 2\sqrt{t+3} \cdot 2\sqrt{3-t} \Leftrightarrow \underbrace{a-b+8}_{=ab} = ab \Leftrightarrow 8 = ab + b - a - 1 \Leftrightarrow (\sqrt{t+3}+1)(\sqrt{3-t}-1) = 7.$$

Производная обеих частей: $\frac{1}{2\sqrt{t+3}}(\sqrt{3-t}-1) - \frac{1}{2\sqrt{3-t}}(\sqrt{t+3}+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3-t)-\sqrt{3-t}-(t+3)-\sqrt{t+3}}{\sqrt{3-t} \cdot \sqrt{t+3}} = -\frac{2t+\sqrt{t+3}+\sqrt{3-t}}{2\sqrt{3-t}\sqrt{t+3}}.$ Если $t \geq 0$, то производная < 0 .

Пусть теперь $t < 0$. Тогда $\sqrt{t+3} + \sqrt{3-t} \stackrel{?}{=} -2t \Leftrightarrow (t+3) + (3-t) \stackrel{?}{=} 4t^2 \Leftrightarrow t^2 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2} \Leftrightarrow 0 \stackrel{?}{=} (t-\sqrt{\frac{3}{2}})(t+\sqrt{\frac{3}{2}}) \Leftrightarrow t \stackrel{?}{=} -\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow$ при $t \in [-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0)$: производная < 0 , а при $t \in (3; -\sqrt{\frac{3}{2}}]$: ≥ 0 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Попытаемся преобразовать (3) в $(a\sqrt{t+3} + b\sqrt{3-t} + c)^2 - d^2 = 0$.

Если это возможно, то получим: $a^2(t+3) + b^2(3-t) + c^2 + 2ac\sqrt{t+3} + 2bc\sqrt{3-t} + 2ab\sqrt{9-t^2} = 0$.

Так как изначально $4 + \sqrt{t+3} - \sqrt{3-t} - \sqrt{9-t^2} = 0$, то удобно считать $b = -a$. Тогда:

$$(6a^2 + c^2 - d^2) + 2ac(\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t}) - 2a^2\sqrt{9-t^2} = 0.$$

Видим, что $-2a^2 = -2$. Без ограничения общности,

$$a = 1 \Rightarrow (6 + c^2 - d^2) + 2c(\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t}) - 2\sqrt{9-t^2} = 0.$$

Как видим, $2c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$. А $6 + c^2 - d^2 = 0 \Leftrightarrow d^2 = 2 + c^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Без ограничения общности,

$$d = \frac{3}{2}. \text{ Итак: (3) преобразовано в } (\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t} + \frac{1}{2})^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t} - 1)(\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t} + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t+3} = \sqrt{3-t} + 1 \Leftrightarrow t+3 = (3-t) + 1 + 2\sqrt{3-t} & (4) \\ \sqrt{t+3} + 2 = \sqrt{3-t} \Leftrightarrow (t+3) + 4 + 4\sqrt{t+3} = 3-t & (5) \end{cases}$$

$$4) \ 2\sqrt{3-t} = 2t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{1}{2} \\ 4 - 4t^2 = 4t^2 - 4t + 1 \Leftrightarrow 8t^2 - 4t - 3 = 0 \end{cases}$$

$$D_4 = 4 + 88 = 92 > 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1}{2} \pm 2\sqrt{23}. \text{ Но } t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow t = 2 + 2\sqrt{23} > 2 + 2 \cdot 4 > 3. \text{ Противоречие с } 0 \leq t \leq 3$$

$$5) \ \sqrt{t+3} = -\frac{1}{2}t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -2 \\ 4t^2 + 4t + 8 = t^2 + 1 \Leftrightarrow 3t^2 + 4t + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-4 \pm \sqrt{16-84}}{6} \in (-3; -2) \\ t = 2\sqrt{2} \notin (-3; -2) \end{cases}$$

$$t = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = [-2\sqrt{2} - 2] \quad \text{Ответ: } (-2\sqrt{2} - 2; 5; 0]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\begin{aligned} p \cos(3x) + 3(p+4) \cos(x) &= 6 \cos(2x) + 10 \Leftrightarrow p(4 \cos^3(x) - \\ &- 3 \cos(x)) + 3(p+4) \cos(x) = 6(2 \cos^2(x) - 1) + 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (t = \cos(x)) \quad 4pt^3 - 3pt + 3p + 12t &= 12t^2 - 6 + 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4pt^3 - 12t^2 + 3pt + 12t - 4 &= 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = \\ &= (1-p)t^3 \Leftrightarrow t = 0 \text{ все } t \text{ (при } t=0: -1=0, \text{ что} \\ &\text{ неверно)} \quad 1-p = \left(\frac{t-1}{t}\right)^3 = \left(1-\frac{1}{t}\right)^3 \Leftrightarrow p = \frac{1}{t^3} - \frac{3}{t^2} + \frac{3}{t} - 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow p = 1 - \left(1 - \frac{1}{t}\right)^3 = f(t)$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 - 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right)^2 \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{t^4 - 3 \cdot (t-1)^2}{t^4} = \\ &= \frac{(t^2 - t\sqrt{3} + \sqrt{3})(t^2 + t\sqrt{3} - \sqrt{3})}{t^4} \end{aligned}$$

Рассмотрим на $t^2 - t\sqrt{3} + \sqrt{3}$: $D = 3 - 4\sqrt{3} < 0$ (так как $3 < 16$) $\Rightarrow t^2 - t\sqrt{3} + \sqrt{3} > 0$.

Рассмотрим на $t^2 + t\sqrt{3} - \sqrt{3}$: $D = 3 + 4\sqrt{3} > 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}$.

$$\frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2} < \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} < -1 \leq t \text{ (по свойствам}$$

косинуса) $\Rightarrow$ ~~значимый корень~~

$$\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2} ? 1 \Leftrightarrow \sqrt{3+4\sqrt{3}} ? 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow 3 + 4\sqrt{3} ? 7 + 4\sqrt{3}$$

$$(\text{как видно, } 3 < 7) \Rightarrow \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2} < 1 \text{ (и } > 0, \text{ так как } \sqrt{3+4\sqrt{3}} > \sqrt{3})$$

Так как $t \in [-1; 1]$, то $f(t)$ ~~на~~ на $\left[-1; \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}\right]$.

$f(t)$ ~~на~~ на $\left[\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}; 1\right]$; ~~на~~ $\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}$ — точка

минимума; при $t \rightarrow 0$ ~~и~~ $t > 0$: $\frac{1}{t} \rightarrow +\infty \Leftrightarrow f(t) \rightarrow +\infty$; при $\frac{1}{(1-\frac{1}{t})} \rightarrow -\infty$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t \rightarrow 0 \text{ и } t < 0: \frac{1}{t} \rightarrow \frac{(1-\frac{2}{t}) \rightarrow +\infty}{-\infty} \Leftrightarrow f(t) \rightarrow -\infty.$$

$$U_{\max}, \text{ на } [-1; 0): f(t) \nearrow \text{от } f(-1) = -7 \text{ до } -\infty; \text{ на } (0; \frac{-3+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}]: f(t) \searrow \text{от } +\infty \text{ до } f(\frac{-3+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}) = 1 - (1 - \frac{2}{\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3})^3 = *;$$

$$\text{на } [\frac{-3+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}; 1]: f(t) \nearrow \text{от } f(\frac{-3+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}) \text{ до } f(1) = 1. \text{ Сравним } \frac{-3+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2} \text{ и } 1$$

$$\text{получим, что } \frac{-3+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2} \in (0; 1) \Rightarrow f(\frac{-3+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}) \in (0; 1) \Rightarrow \cup \in (f(t)) = [-\infty; -7] \cup [f(\frac{-3+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}); +\infty]$$

откуда получаем ответ.

$$* = \frac{2}{\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3} \cdot \left(1 + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3} \right) + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3} \right)^2 \right) = \frac{2}{(\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3)^3} \cdot (2(\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3)^2 - 2(\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3) + (\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3)^2 - 4(\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3) + 4) =$$

$$\Delta CED \sim \Delta CDB \Rightarrow \begin{cases} \frac{AF}{5} = \frac{k}{FD} = \frac{AB}{ED} \\ \frac{7}{CD} = \frac{ED}{DB} = \frac{CD}{2-k} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

Докажем, что если закрашенное множество обладает хотя бы 2 симметриями из 3, описанных в условии, то данное множество обладает всеми 3 симметриями. (далее текст)

Что означает введем систему ^{таблиц} координат:

Каждая ~~клетка~~ клетка δ с координатами $(i; j)$ ($i \in \mathbb{N}; j \in \mathbb{N}; i \leq 100; j \leq 400$) — это клетка на пересечении i -й строки и j -го столбца

(при этом порядковый номер строки отсчитывается ~~снизу~~ сверху-вниз, а порядковый номер столбца отсчитывается слева-направо; ^{Нумерация}

Самая верхняя строка имеет номер 1; самая нижняя — номер 100; ^{ый} самый левый столбец имеет номер 1; самый правый — номер 400), при этом

считаем, что строки параллельны большей стороне прямоугольника 100×400 (то есть стороне 400), а столбцы — меньшей (стороне 100).



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Что же означает симметрия относительно центра прямоугольника ^{100x400} в СТЖ? означает она следующее: $\forall i \in \mathbb{N}; j \in \mathbb{N}; i \leq 100; j \leq 400$: клетки $(i; j)$ и $(101-i; 401-j)$ либо обе закрашены, либо обе не являются закрашенными.

Симметрия относительно ^{вертикальной} средней линии прямоугольника 100×400 (она же (расположенной между 200-й и 201-й столбцами))

в СТЖ означает следующее: $\forall i \in \mathbb{N}$ и $i \leq 100; j \in \mathbb{N}$ и $j \leq 400$: клетки $(i; j)$ и $(i; 401-j)$ либо обе закрашены, либо обе закрашенными не являются.

Симметрия относительно горизонтальной средней линии прямоугольника 100×400 (расположенной между 50-й и 51-й строками) в СТЖ означает

следующее: $\forall i \in \mathbb{N}$ и $i \leq 100; j \in \mathbb{N}$ и $j \leq 400$: клетки $(i; j)$ и $(101-i; j)$ либо обе закрашены, либо обе закрашенными не являются.

Рассмотрим ^{все} возможные пары симметрий, которыми может обладать прямоугольник 100×400 :

1) относительно обеих средних линий прямоугольника.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте считать, что закрашенные клетки черные, а незакрашенные клетки белые. По свойствам этих 2 симметрий: одного цвета $(i; j)$ и $(i; 401-j)$, а также $(i; 401-j)$ и $(101-i; 401-j) \Rightarrow (i; j)$ и $(101-i; 401-j)$ одного цвета $\Rightarrow$ симметрия относительно центра тоже есть.

2) относительно вертикальной средней линии и центра.
 $\left\{ \begin{array}{l} (i; j) \text{ и } (i; 401-j) \text{ одного цвета} \Rightarrow (i; j) \text{ и } (101-i; j) \text{ одного цвета} \\ (i; 401-j) \text{ и } (101-i; 401-j) \text{ одного цвета} \end{array} \right. \Rightarrow$
 симметрия относительно горизонтальной средней линии тоже есть.

3) относительно горизонтальной средней линии и центра.
 $\left\{ \begin{array}{l} (i; j) \text{ и } (101-i; j) \text{ одного цвета} \Rightarrow (i; j) \text{ и } (i; 401-j) \text{ одного цвета} \\ (101-i; j) \text{ и } (101-i; 401-j) \text{ одного цвета} \end{array} \right. \Rightarrow$
 симметрия относительно вертикальной средней линии тоже есть.

Итак, из нашего доказательства следует, что прямоугольник 100×400 обладает или 3 симметриями, или одной, или не имеет ни одной симметрии, описанной в условии.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сколько ее посчитаем количество способов добиться
~~нужна симметрия относительно~~

Заметим, что количество пар ~~и~~ клеток,
обязательно однозначные, одинаково для каждой
из 3 симметрий — это ~~8/2~~ ~~20000~~ ~~Почему?~~

$\frac{100 \cdot 400}{2}$. Почему? Потому что ² в каждой из
определенных симметрий через СЖХ пары
(i; j) и ~~(j; i)~~ ~~клеток~~ {a; b}; (c; d)} и {(c; d); (a; b)}
считаются одинаковыми (при этом не может
быть такого, что $\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$, иначе $\begin{pmatrix} 101:2 \\ 401:2 \end{pmatrix}$). Но

~~есть~~ есть, выбирая 1 строку (100 способами) и
1 столбец (400 способами), на каждую из пар
мы наткнемся дважды (так как в паре 2 клетки,
а на пересечении 1 строки и 1 столбца равно 1 клетка).
Таким образом, нужных пар действительно $\frac{100 \cdot 400}{2} = 20000$.

Чтобы ^{добиться конкретной} ~~организовать хотя бы 1 из симметрий~~,
нужно закрасить ^{ровно} 4 пары из 20000 пар,
соответствующих данной симметрии. Количество



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

способов сделать ^{это} ~~также~~ равно C_{20000}^4 . А как добиться всех 3 симметрий? Обратим ~~внимание~~ ^{внимание} на то, что $(i; j), (i; 401-j), (401-i; j)$ и $(401-i; 401-j)$ одного цвета. Сколько таких четвёрок?

Учитывая, что они не пересекаются (как и пары ранее), $\frac{100 \cdot 100}{2} = 10000$ (аккуратно). И чтобы добиться всех 3 симметрий, нужно закрасить ~~ровно 2~~ ^{ровно 2} из 10000 ^{таких} четвёрок.

Количество способов сделать это равно C_{10000}^2 .

Так как ~~также~~ ^и ~~то~~ ^{эти} способы учитываются в ~~каждом~~ ^{каждой из} количестве способов для 3 симметрий, то общее кол-во способов добиться хотя бы

одной симметрии равно $3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$ (нужно учитывать C_{10000}^2 1 раз, а не 3 раза, как раньше).

$$\text{Ответ: } 3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

Рассмотрим все случаи относительно остатков a и b при делении на 3:

$\begin{matrix} a \equiv ? \\ b \equiv ? \end{matrix}$ (какой остаток при делении a на 3?) (какой остаток при делении b на 3?)	0	1	2
0	$b - a \equiv 0$, то есть $(b - a) \div 3$. Противоречие с условием.	$a^2 + b \equiv 1, a$ $710 = 3 \cdot 236 + 2$. Противоречие с условием.	$a^2 + b \equiv 1, a$ $710 = 3 \cdot 236 + 2$. Противоречие с условием.
1	$a^2 + b \equiv 1, a$ $710 = 3 \cdot 236 + 2$. Противоречие с условием.	$b - a \equiv 0$, то есть $(b - a) \div 3$. Противоречие с условием.	Важно! $\begin{cases} b - a \equiv 2 \\ a^2 + b \equiv 2 \end{cases}$ Все корректно (возможность I)
2	Важно! $\begin{cases} b - a \equiv 2 \\ a^2 + b \equiv 2 \end{cases}$ Все корректно (возможность II)	$a^2 + b \equiv 0, a$ $710 = 3 \cdot 236 + 2$. Противоречие с условием.	$b - a \equiv 0$, то есть $(b - a) \div 3$. Противоречие с условием.

Далее $a < b \Leftrightarrow a - c < b - c$. Угнём это далее. К вариантам I и II вернёмся позже.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{matrix} \neq & \neq \\ \downarrow & \downarrow \\ (a-c)(b-c) = p^2 \Leftrightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \neq & \neq & \neq & \neq \end{matrix}$$

Поскольку p — простое число, то $p \in \mathbb{N}$ и $p \geq 2$

$$\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \Rightarrow a < b \text{ (всё корректно)} \text{ (случай а)}$$

$$\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases} \Rightarrow a = b \text{ (противоречие с условием)}$$

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow a > b \text{ (противоречие с условием)}$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \Rightarrow b > a \text{ (всё корректно)} \text{ (случай б)}$$

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \Rightarrow a = b \text{ (противоречие с условием)}$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow a > b \text{ (противоречие с условием)}$$

В случае а: $c = b+1 \Rightarrow a-b-1 = -p^2 \Leftrightarrow b-a+1 = p^2$

~~В~~ В любой из возможностей I и II: $b-a \equiv 2 \pmod{3} \Leftrightarrow b-a+1 \equiv 0 \pmod{3}$, то есть $p^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p=3 \Rightarrow b-a+1 = 9 \Leftrightarrow b = a+8 \Rightarrow a^2 + (a+8) = 70 \Leftrightarrow a^2 + 27a - 26a - 2726 = 0 \Leftrightarrow (a+27)(a-26) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = -27 \Rightarrow b = -19 \Rightarrow c = -18 \\ a = 26 \Rightarrow b = 34 \Rightarrow c = 35 \end{cases}$$

Как видим, при $a = -27$ реализуется возможность II, а при $a = 26$ реализуется возможность I.

В случае б: $c = a-1 \Rightarrow b-a+1 = p^2$. Аналогично $p=3$ и $b = a+8 \Rightarrow$ (аналогично)

$$\begin{cases} a = -27 \Rightarrow b = -19 \Rightarrow c = -28 \\ a = 26 \Rightarrow b = 34 \Rightarrow c = 25 \end{cases}$$

(возможность II) (возможность I)

Ответ: $(-27; -19; -28); (-27; -19; -18);$
 $(26; 34; 25); (26; 34; 35)$

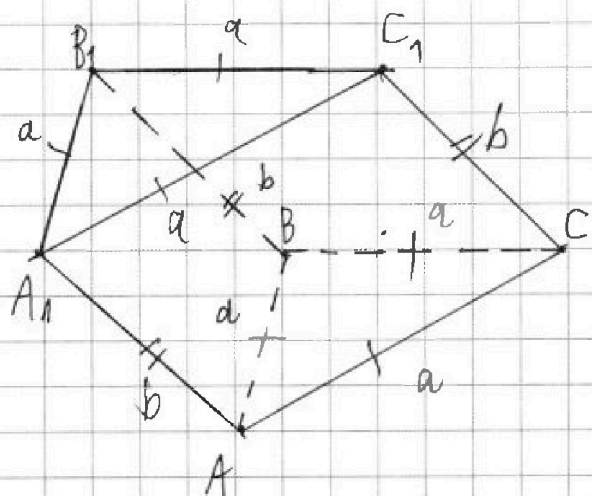


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$ равност.;

$ABCA_1B_1C_1$ — призма;

$$S_{A_1B_1BA} = S_{A_1C_1CA} = 3;$$

$$S_{ABC} = 2.$$

Найти: $V_{ABCA_1B_1C_1}$

Решение:

По св. призмы: $AA_1 = BB_1 = CC_1 =$ (пусть) b .

$\triangle ABC$ равност. $\Rightarrow AB = BC = AC =$ (пусть) a .

По св. призмы: $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = a$.

$$\text{По св. равност. } \triangle - a: S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{27}}{3}.$$

По св. пр.: $AB_1BA, A_1C_1CA, B_1C_1CB$ — параллелограммы $\Rightarrow$

$$S_{AB_1BA} = ab \sin(\angle A_1AB); S_{A_1C_1CA} = ab \sin(\angle A_1AC); S_{B_1C_1CB} = ab \sin(\angle C_1CB).$$

$$\text{Из условия: } \begin{cases} \frac{2\sqrt{27}}{3} b \sin(\angle A_1AB) = 3 \\ \frac{2\sqrt{27}}{3} b \sin(\angle A_1AC) = 3 \end{cases}$$

$$\text{Значит } \sin(\angle A_1AB) = \sin(\angle A_1AC), a \begin{cases} \frac{2\sqrt{27}}{3} b \sin(\angle A_1CB) = 2 \end{cases}$$

$$\sin(\angle A_1AB) : \sin(\angle C_1CB) = 3 : 2. \quad V_{ABCA_1B_1C_1} = h \cdot S_{ABC} = h \cdot 2.$$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3-t}} \cdot (\sqrt{3-t}-1) - \frac{1}{\sqrt{3-t}} \cdot (\sqrt{3-t}+1) \right)$$

$$a^2 + b = 710 = 3 \cdot 236 + 2$$

a \ b	0	1	2
0	0	1	1
1	1	2	2
2	2	0	0

a \ b	0	1	2
0	0	0	2
1	1	1	0
2	2	2	1

$$\begin{cases} a \equiv 0 \\ b \equiv 2 \\ a \equiv 2 \\ b \equiv 1 \end{cases}$$



$$12 + 16\sqrt{3} \quad 27 + 12\sqrt{3}$$

$$9 \cdot 78 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13$$

$$(d-c)(b-c) = p^2$$

$$4pt^3 - 3pt^2 + 3pt + 12t = 702 = 12t^2 - 6t + 10 \quad (13+2\sqrt{3})^3$$

$$c = d - 1$$

опущено
 если чисел
 $b = a + 8$

$$b - a + 1 = 9$$

$$d^2 + d - 702 = 0$$

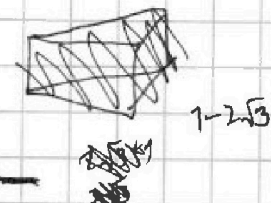
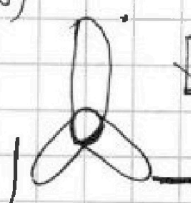
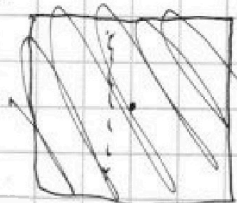
$$(d+27)(d-26)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{absin}(\alpha) &= 3 \\ \alpha b &= 2 \end{aligned}$$

$$(-27; -19; -28)$$

$$(26; 34; 25)$$

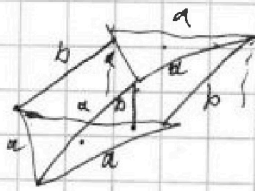
$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 0 \\ 2 &\rightarrow \end{aligned}$$



$$20000$$

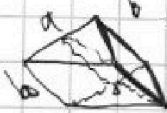
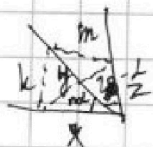
$$C_{20000}^4 + C_{20000}^4 + C_{20000}^4 - 2C_{10000}^2$$

$$3 \cdot C_{20000}^4 - 2C_{10000}^2$$



$$\alpha^2 = \frac{4\sqrt{27}}{3} \Leftrightarrow d = \frac{2\sqrt{27}}{3}$$

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2} + 3} + 1 \right) \left(\sqrt{3 - \frac{3}{2}} - 1 \right) = 7$$



$$\begin{aligned} k^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos(\alpha) \\ m^2 &= y^2 + z^2 + 2yz \cos(\alpha) \\ n^2 &= x^2 + z^2 - 2xz \cos(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{absin}(\alpha) &= 3 \\ -1 &\rightarrow -7 \\ -\frac{1}{2} &\rightarrow -\frac{5}{9} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

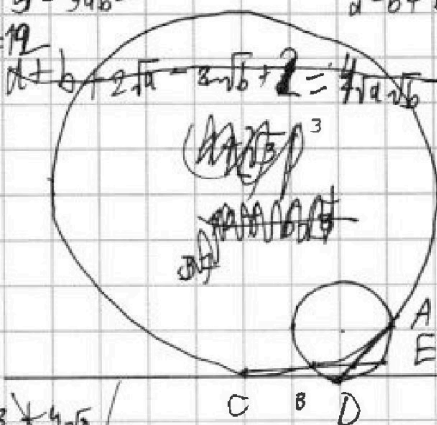
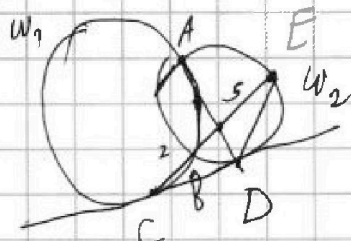
$$a^3 = 9 - 9ab^2$$

$$3a^2b + 3b^3 = 19$$

$$a^2b + b^3 = 4$$

$$+ \infty$$

$$9 + \sqrt{3} = (a + b\sqrt{3})^3$$



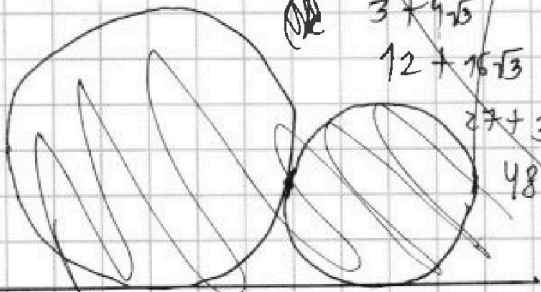
$$-5W + 36$$

$$-3W + 36$$

$$9$$

$$5W + 36$$

$$+ \infty$$

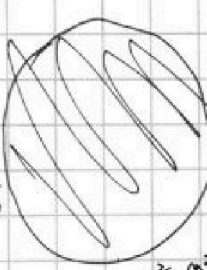


$$3 \times 4.5$$

$$12 + 16\sqrt{3}$$

$$27 + 36\sqrt{3}$$

$$48 + 64\sqrt{3}$$



$$t+3$$

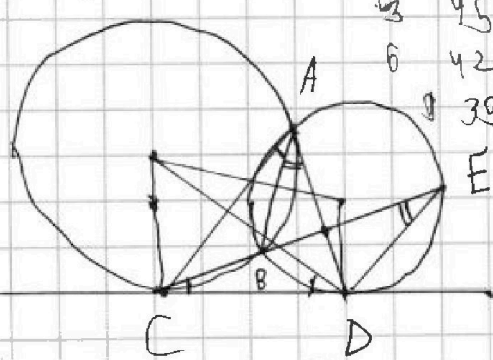
$$4(W-t+Z)$$

$$16$$

$$3-t-\frac{4}{t}$$

$$\sqrt{t+3} = a$$

$$(a\sqrt{t+3} + b\sqrt{t+3} + c)^2$$



$$45$$

$$42$$

$$39$$

$$12$$

$$6d^2 + C^2 - 2a^2\sqrt{9-t^2} + C^2 - 4 - 2ac\sqrt{t+3} + 2ac\sqrt{t+3}$$

$$(x+2) + 3$$

$$\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t-4Z} + 4 = 2\sqrt{y-t^2+Z+4}$$

$$2ac = 1$$

$$C^2 = 1$$

$$b^2 = 2$$

$$\sqrt{y+4} + \sqrt{y-5} = \sqrt{81-2Z}$$

$$x \geq -5$$

$$x+4Z \leq 1$$

$$y-4x-x^2+Z$$

$$y-4x-x^2+Z$$

$$1-x-4Z$$

$$(a+1)(b-1) = 5$$

$$\sqrt{t+3} \quad \sqrt{t+3}-t$$

$$6d^2 + C^2 - 2a^2\sqrt{9-t^2} + 2ac\sqrt{t+3} - 2ac\sqrt{t+3} - b^2$$

$$(1+4\sqrt{3})^3$$