



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть первый член = a , а второй $a+k \rightarrow$

$\rightarrow a+k = 6-9k$, $a+k = x^2 - 4x^3 + 4x^2$, $a+9k = 9x^2$

$\rightarrow k = \frac{6-9x-a}{3}$, $a+9k = a + 18 - 27x - 9a = 9x^2 \rightarrow a = \frac{18-27x-9x^2}{2} \rightarrow$

$\rightarrow a+k = \frac{18-27x-9x^2}{2} + \frac{30-45x-5a}{3} = \frac{54-81x-27x^2+60-50x-10a}{6} =$

$= \frac{54-81x-27x^2+60-90x-50+135+45x^2}{6} = \frac{18x^2-121x+159}{6} =$

$= \frac{6x^2-54x+53}{2}$

$\rightarrow 6x^2-54x+53 = 2x^4-8x^3+8x^2 \rightarrow 2x^4-8x^3+2x^2+54x-53 =$

$=$ Пусть k - разность членов $\rightarrow$

$\rightarrow 6k = 9x^2 - (6-9x) \rightarrow 2k = 3x^2 - (2-3x) = 3x^2 - 2 + 3x$, а также

$2k = (x^2-2x)^2 - (6-9x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 9x \rightarrow$

$\rightarrow 3x^2 + 3x - 2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 9x \rightarrow x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$

$\rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-2x-4=0 \end{cases} \quad (x-1)^2(x^2-2x-4)$

$\rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$

$\rightarrow$ Ответ: $x \in \{1, 1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. $3y+6x=3(y+2x) \Rightarrow$ критический. $y+2x$

Пусть $x-y \geq 0 \Rightarrow x-2y \leq 2$ или же $x-2y \leq 0 \Rightarrow 2y-x \leq 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} x-y-2 \leq 2y-x \leq 0 & \text{акал.} \\ 0 \leq 2y-x \leq 2 & \text{акал.} \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq y-2x \leq 0 & \text{акал.} \\ 0 \leq y-2x \leq 1 & \text{акал.} \end{cases}$

Если вычитается акал.

$\Rightarrow \begin{cases} -6 \leq 6y-3x \leq 0 \\ 0 \leq 6y-3x \leq 6 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2 \leq y-2x \leq 0 \\ 0 \leq 2y-4x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x-y \leq 2 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3.

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 \rightarrow 7m - 4n = (4n + m)^2 - 4(4n + m) = (4n + m)(4n + m - 4)$$

$$B = m^2 + 2mn^2 + 9n^2 = mn(m + 9)$$

$$A \equiv m \cdot (m - 4) \text{ , так как } m - 4 \text{ - разность четностей } \Rightarrow A \equiv 2.$$

$$B \equiv mn(m + 9) \text{ , так как } m \text{ и } m + 9 \text{ - разность четностей } \Rightarrow B \equiv 2$$

$$\text{так } \Rightarrow 11p^2 \equiv 2 \Rightarrow p^2 \equiv 2 \Rightarrow p = 2 \text{ и } 5q^2 \equiv 2 \Rightarrow q^2 \equiv 2 \Rightarrow q = 2.$$

$$\Rightarrow 11p^2 = 44, \text{ а } 5q^2 = 500.$$

$$\Rightarrow (A, B) = (44, 500) \text{ (В)} \quad \{A, B\} = \{44, 500\}$$

$$\text{Пусть } t = 4n + m \Rightarrow A = t(t - 4) = t^2 - 4t$$

$$\text{Пусть } A = 44 \Rightarrow t(t - 4) = 44 \text{ так } t \text{ и } t - 4 \text{ - разность четности}$$

$$\text{так } \text{Пусть } A = 500 \Rightarrow t^2 - 4t = 500 \Rightarrow t^2 - 4t - 500 = 0$$

$$\Rightarrow D = 49 + 2000 = 2049, \text{ но } 2049 \text{ - не квадрат } \Rightarrow \text{В} \text{ корни не являются целыми,}$$

$$\text{так } t \text{ - натуральное } \Rightarrow \text{противоречие } \Rightarrow A = 44, \text{ а } B = 500$$

$$\Rightarrow t(t - 4) = 44 \Rightarrow t^2 - 4t - 44 = 0 \Rightarrow D = 49 + 176 = 225 = 15^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{4 \pm 15}{2} \Rightarrow t \geq 0 \Rightarrow t = 11 \Rightarrow 4n + m = 11.$$

$$\Rightarrow B = mn(m + 9) = 500 \text{ так } 20mn \Rightarrow mn = 15 \Rightarrow \begin{cases} mn = 15 \\ 4n + m = 11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mn = 15 \\ 4n + m = 11 \end{cases} \Rightarrow m = 11 - 4n$$

$$(11 - 4n)n = 15 \Rightarrow 11n - 4n^2 = 15 \Rightarrow 2n^2 - 11n + 15 = 0 \Rightarrow D = 121 - 120 = 1$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{11 \pm 1}{4} = \left\{ \frac{5}{2}, 3 \right\}, \text{ так как } n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 3 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow \text{Ответ: } (m, n) \in \{(5, 3)\}.$$

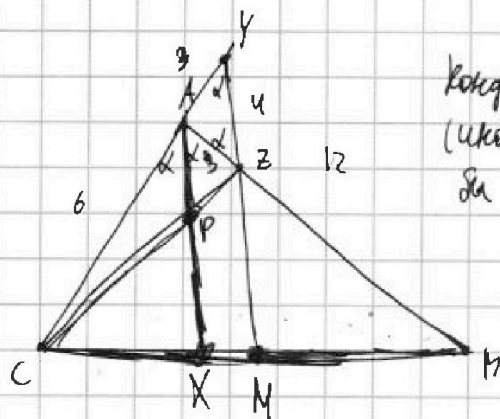


1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.



Конгруэнтность $\Rightarrow$ ч.к. $\angle X$ ~~равен~~ $\angle C$, $\angle C < \angle M$
(иначе прямая $MN \parallel AC$ пересекала бы продолжение AB).

Заметим, что $CP \cap AB = P \Rightarrow \frac{PC}{PZ} = \frac{AC}{AZ} = \frac{2}{1}$ (по св-ву биссектрисы).

А также $\frac{CP}{PZ} = \frac{CX}{XM}$ (по л. Талеса) $\Rightarrow \frac{CX}{XM} = \frac{2}{1}$, пусть $AM = XM = x \Rightarrow$
 $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow CX = 2x \Rightarrow CM = MB = 3x$, $\angle C$ св-ву $\Rightarrow \frac{CX}{XM} = \frac{1}{2}$; по св-ву биссектрисы $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CX}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{6}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 12$; пусть $\angle BAP = \alpha \Rightarrow \angle CAP = \alpha$; а также $\angle AZP = \alpha$ (из паралл.); $\angle YAB = 180 - \alpha$ (как смежные с $\angle CAB$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по л. о. углов в $\Delta \Rightarrow \angle AYZ = \alpha \Rightarrow \Delta YAZ - \mu/\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow AY = 3 \Rightarrow$ по т. кос.: $YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2 \cdot AY \cdot AZ \cdot \cos \alpha$

$$16 = 9 + 16 - 12 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1 = \frac{32}{9} - 1 = \frac{23}{9}$$

$$\text{по т. кос. } BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos 2\alpha = 36 + 144 - 144 \cdot \left(\frac{23}{9}\right) = 180 - 16 \cdot 23 =$$

$$YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2 \cdot AY \cdot AZ \cdot \cos(180 - 2\alpha) = AY^2 + AZ^2 + 2 \cdot AY \cdot AZ \cdot \cos 2\alpha \Rightarrow$$

$$16 = 9 + 9 + 18 \cdot \cos 2\alpha \Rightarrow 2 + 18 \cdot \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 1 + 9 \cos 2\alpha = 0, \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$$

$\Rightarrow$ по т. кос.: $AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos 2\alpha = BC^2$

$$36 + 144 + 144 \cdot \frac{1}{9} = 180 + 16 = 196 = 14^2 \Rightarrow BC = 14.$$

Ответ: 14.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} \quad (1)$$

$$x^2+5x-\sqrt{2}y = y^2-\sqrt{2}x+7y \quad (2)$$

(2): $x^2-y^2+5(x-y)+\sqrt{2}(\sqrt{2}x-\sqrt{2}y) = 0$, т.к. $\sqrt{2}x$ и $\sqrt{2}y \geq 0$

$xy \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0. \Rightarrow (x-y)(x^2+y^2+xy)+5(x-y)+\sqrt{2}(\sqrt{2}x-\sqrt{2}y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-y)(x^2+y^2+xy+5)+\sqrt{2}(\sqrt{2}x-\sqrt{2}y) = 0 \Rightarrow (\sqrt{2}x-\sqrt{2}y)(\sqrt{2}x+\sqrt{2}y)(x^2+y^2+xy+5) = 0$

$= 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0 \Rightarrow \sqrt{2}x=\sqrt{2}y \Rightarrow x=y \\ (\sqrt{2}x+\sqrt{2}y)(x^2+y^2+xy+5)+\sqrt{2}=0, \text{ но } \sqrt{2}x+\sqrt{2}y \geq 0, x^2+y^2+xy \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (\sqrt{2}x+\sqrt{2}y)(x^2+y^2+xy+5) \geq 0$, а $\sqrt{2} > 0 \Rightarrow (\sqrt{2}x+\sqrt{2}y)(x^2+y^2+xy+5)+\sqrt{2} \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow$ из (2) мы найдем, что $xy \geq 0$ и $x=y$.

$\Rightarrow (1): \sqrt{x+2} - \sqrt{4-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2};$

пусть $\sqrt{x+2} = a, \sqrt{4-x} = b \Rightarrow a-b+7 = 2ab$ т.к.

$ab = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{4-x} = \sqrt{5x+4-x^2} \Rightarrow a-b+7 = 2ab$, и $a^2+b^2=9$

$\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ a-b+7=2ab \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a(1-2b) = b-7 \Rightarrow a = \frac{b-7}{1-2b}$

$\Rightarrow \left(\frac{b-7}{1-2b}\right)^2 + b^2 = 9 \Rightarrow (b-7)^2 + b^2(1-2b)^2 = 9(1-2b)^2 \Rightarrow b^2 - 14b + 49 + b^2(1-4b+4b^2) = 9(1-4b+4b^2) \Rightarrow b^2 - 14b + 49 + b^2 - 4b^3 + 4b^4 = 9 - 36b + 36b^2 \Rightarrow b^2 - 14b + 49 + b^2 - 4b^3 + 4b^4 - 9 + 36b - 36b^2 = 0 \Rightarrow 4b^4 - 4b^3 - 35b^2 + 22b + 40 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2-2ab = 9 - 7 - (a-b) \Rightarrow (a-b)^2 = 2 - (a-b) \Rightarrow (a-b+1)(a-b) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ пусть $c = a-b \Rightarrow (c+1)c = 2 \Rightarrow c^2+c-2 = 0 \Rightarrow c^2+c-2 = 0 \Rightarrow d = 1+3 = 9 \Rightarrow c_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2+b^2=9$ и $a-b+7=2ab$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. (продвинутое)

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a-b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=9 \\ a-b+4=2ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=b+1 \\ b^2+2b+1+b^2=9 \Rightarrow 2b^2+2b+1=9 \Rightarrow b^2+b=4 \Rightarrow b^2+b-4=0 \Rightarrow D=1+16=17 \Rightarrow b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow b > 0 \Rightarrow b = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow 2b^2+4b-5=0 \Rightarrow D=16+40=56 \Rightarrow b_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{56}}{2} \Rightarrow b > 0 \Rightarrow b = \frac{4 + \sqrt{56}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{14}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ 2ab=4 \Rightarrow ab=2 \Rightarrow b^2+b=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=b-2 \\ 2ab=5 \Rightarrow ab=\frac{5}{2} \Rightarrow 2b^2-4b-5=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ a = \frac{\sqrt{17}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{17}+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x} = \sqrt{4-x} \Rightarrow 4-x = \frac{18-2\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = 4 - \frac{18-2\sqrt{17}}{4} = \frac{10+2\sqrt{17}}{4} = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \\ \sqrt{x+2} = \frac{\sqrt{14}}{2} - 1 \Rightarrow x+2 = \frac{14}{4} - 2\sqrt{14} + 1 \Rightarrow x = \frac{14}{4} - 2\sqrt{14} - 1 = \frac{3-2\sqrt{14}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 + \frac{2\sqrt{17}-18}{4} = \frac{10+2\sqrt{17}}{4} = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{18+2\sqrt{17}}{4} - 4 = \frac{2+2\sqrt{17}}{4} = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{суммарно}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2,5 - \sqrt{14} \\ x = 2,5 + \sqrt{14} \end{cases} \Rightarrow \text{суммарно} \Rightarrow \text{ответ: } (2,5 - \sqrt{14}, 2,5 + \sqrt{14})$$



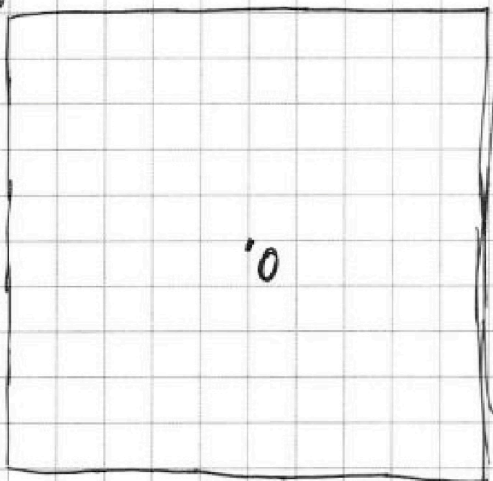
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.



Рассмотрим кол-во разных раскр., где есть и.о. $\Rightarrow$ как и он.

Выбираю вторую закрашенную вершичку. Всего их чаще 0 120,

при этом для введенных точек экв. как и на С, если

От при повороте как $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ или 360° ^{англ. 0} переводим в ОС

$\Rightarrow$ всё делится как класс экв. в какой-то из координат некая

по 4 разных вершички $\Rightarrow$ на всего $\frac{120}{4} \Rightarrow 30 \Rightarrow$ разных раскр.

30.

Переходим к рассмотрению раскраски где концы некра.

Пусть закрашены A и B, где A не переводит в B при повороте
как 90° ^{англ. 0} $\Rightarrow$ все такие раскраски опять делится по 4 группы
по 4 раскр., т.к. Пусть при повороте как 90° ^{англ. 0} A, B перейдем в A, B

(англ. 0)

$\Rightarrow$ можно, что $A \rightarrow B$, а $B \rightarrow A$, но такого очев. быть не может, ^(англ. 0)
если же поворот как $180^\circ \Rightarrow A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$, но по выбору A и B мы этого
не можем быть. $\Rightarrow$ добавляем кол-во таких пар, делёное на 4.

Зафиксируем A (120 способами) $\Rightarrow$ для B всего 120 $\Rightarrow$ вместе, т.к.

$B \neq A$, $B \neq O$ и $B \neq$ точке симметрии A относительно O (покажем, что всё это возможно)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. (профильное)

→ всего возможных пар $\frac{120 \cdot 118}{2}$, т.к. каждую пару 2 раза посчитали
⇒ уже есть $\frac{60 \cdot 118}{4}$ раскрасок $= 15 \cdot 118$.

Остаётся посчитать раскраски, где A симметрич. к ошк. O .
Для каждого A такое M единственно, при чём пусть мы
рассматриваем раскр. $A_1, M_1 \Rightarrow$ при повороте на 30° ошк. стороны $A_2, M_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow A_2$ симметрич. к ошк. O и по-прежнему, что все A_1, M_1 при повороте
на 180° ошк. $O \rightarrow$ в A_1, M_1 , а на 240° в $A_2, M_2 \Rightarrow$ ещё новых
раскрасок $\frac{120}{2}$ пар поделить на 2 $= 30 \Rightarrow$

Ответ: $30 + 204 \cdot 15 \cdot 118 = 60 + 1740 = 1740$.

1) Проведем параллельно из $M \parallel AC$ и $O_n O_w \Rightarrow$ они пересекаются
 $CL \cap L' \Rightarrow$ н.к. Оа середина AM и $O_n \parallel L'M \Rightarrow X$ -середина
 AC ($X = AC \cap O_n O_w$) и н.к. X -середина CA и $XO_w \parallel AC \Rightarrow$
 $\Rightarrow O_w$ -середина CL' по O_w -середина $CL \Rightarrow L = L' \Rightarrow$
 $\Rightarrow ML \parallel AC$ и $O_n O_w$. ~~Аналог~~ $\Rightarrow$ н.к. M середина BC и
 $ML \parallel CA \Rightarrow L$ -середина $AB \Rightarrow CL$ -биссектриса и медиана $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7. (Условие)

① $\triangle ABC$ - μ/δ , $BC = CA$;

$\Rightarrow$ пусть $\angle ABC = \alpha$, а $BM = x = CM$;

$\Rightarrow AC = BC = 2x \Rightarrow CN = 2x - 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора

$$AM^2 = MN^2 + AN^2 = AN^2 + CM^2 - CN^2 =$$

$$= 25 + x^2 - (4x^2 - 20x + 25) = 20x - 3x^2$$

по т. косин.:

$$AM^2 = BM^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20x - 3x^2 = x^2 + 16 - 8x \cdot \cos \alpha \Rightarrow 5x = x^2 + 4 - 2x \cdot \cos \alpha, \text{ а также}$$

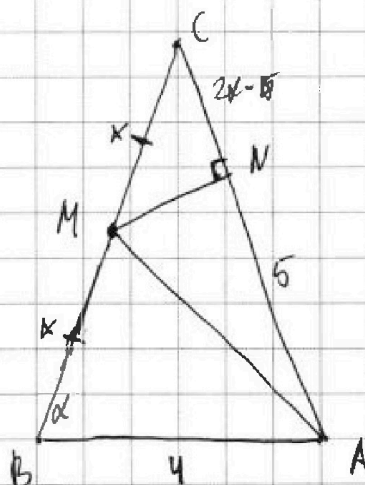
$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \alpha \Rightarrow 4x^2 = 4x^2 + 16 - 16x \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 1 \Rightarrow \text{①: } 5x = x^2 + 4 - 2 = x^2 + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow D = 25 - 8 = 17 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow BC = 2x = 5 \pm \sqrt{17}, \text{ но}$$

$$\text{так как } ME = 5 - \sqrt{17} \Rightarrow AC = 5 - \sqrt{17} \Rightarrow AC < ME, \text{ противоречие, и.т.д. } \nexists AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } 5 + \sqrt{17}.$$



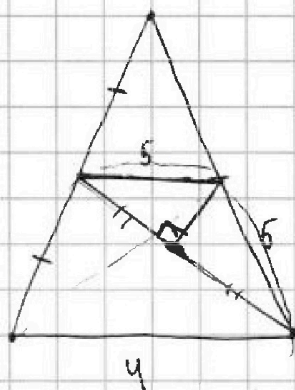
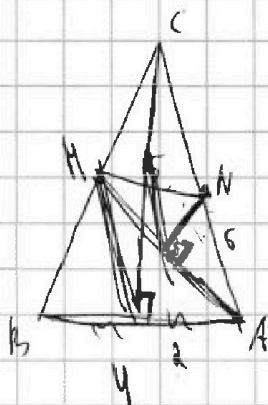


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



20

8000

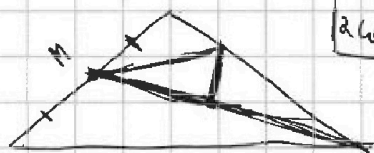
14

20

1000 + 320

2000

10



$2\cos^2 d - 1$

$$\cos 2d = \cos^2 d - \sin^2 d$$

$$8^3 + 256 \quad \vee \quad 1220$$

$$20 \cdot 64$$

$$8 - 80 + 64 - 160$$

$$8^3 - 20$$

$$x^3 + 32x \quad \vee \quad 20x^2 + 160$$

$$\cos^2 d + \sin^2 d = 1 \quad -\sin^2 d - \cos^2 d = 1 \quad \rightarrow \quad \therefore \quad \int$$



$$16 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \cos d$$

$$25 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2 - 10x + 16}{x} - \frac{1}{4}(x^2 - 8x) \cdot \cos d$$

$$\cos d = 2$$

$$16 = 2x^2(1 - \cos d)$$

16

$$\frac{8}{x^2} = 1 - \cos d$$

$$\cos d = 1 - \frac{8}{x^2}$$

$$0 = x^3 - 20x^2 + 32x - 160$$

$$0 = -8x + 3 + \frac{x^2}{4} - \frac{40}{x}$$

$$0 = 20x + 32 + x^2 - \frac{160}{x}$$

$$\textcircled{P} = \frac{x^2}{4} + x^2 - 10x + 16$$

$$+ (x^2 - 8x) \cdot \left(-1 + \frac{8}{x^2}\right)$$

$$\frac{x^2}{4} + x^2 - 10x + 16 - x^2 + 8x + 3 - \frac{40}{x}$$

60



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.

~~$xy + 6x = 2(y + x) \Rightarrow$ нулика максимиз. $y + x$.~~
~~Пусть $x \leq 2y \Rightarrow |x - 2y| = 2y - x \Rightarrow 2y - x \leq 2 \Rightarrow$~~



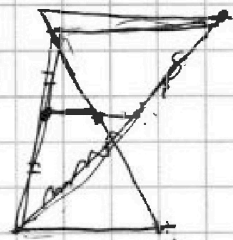
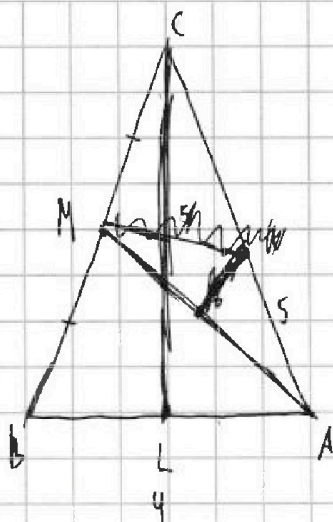
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

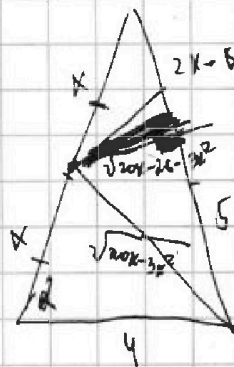
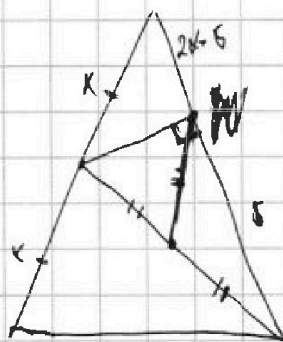
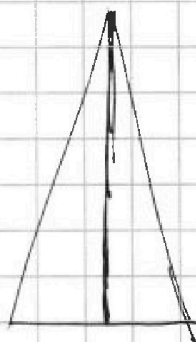
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.



Заметим, что $N = \perp \cap AC \Rightarrow NO = MN$



4^2

$$4x^2 + 26 - 20x$$

$$-2x^2 - 26 + 20x$$

$$\sqrt{20x - 2x^2}$$

$$\cos \alpha = 1$$

$$20x - 2x^2$$

$$x^2 + 16 - 8x \cdot \cos \alpha$$

$$4x^2$$

$$5x^2 = x^2 + 16 - 2x \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{20x + 2}{26 - 8}$$

$$1 - x \cdot \cos \alpha = 0$$

$$x^2 + 2 - 6x = 0$$

$$4x^2 = 4x^2 + 16 - 8 \cdot 2x \cdot \cos \alpha$$

$$16 - 16x \cdot \cos \alpha = 0$$

hi

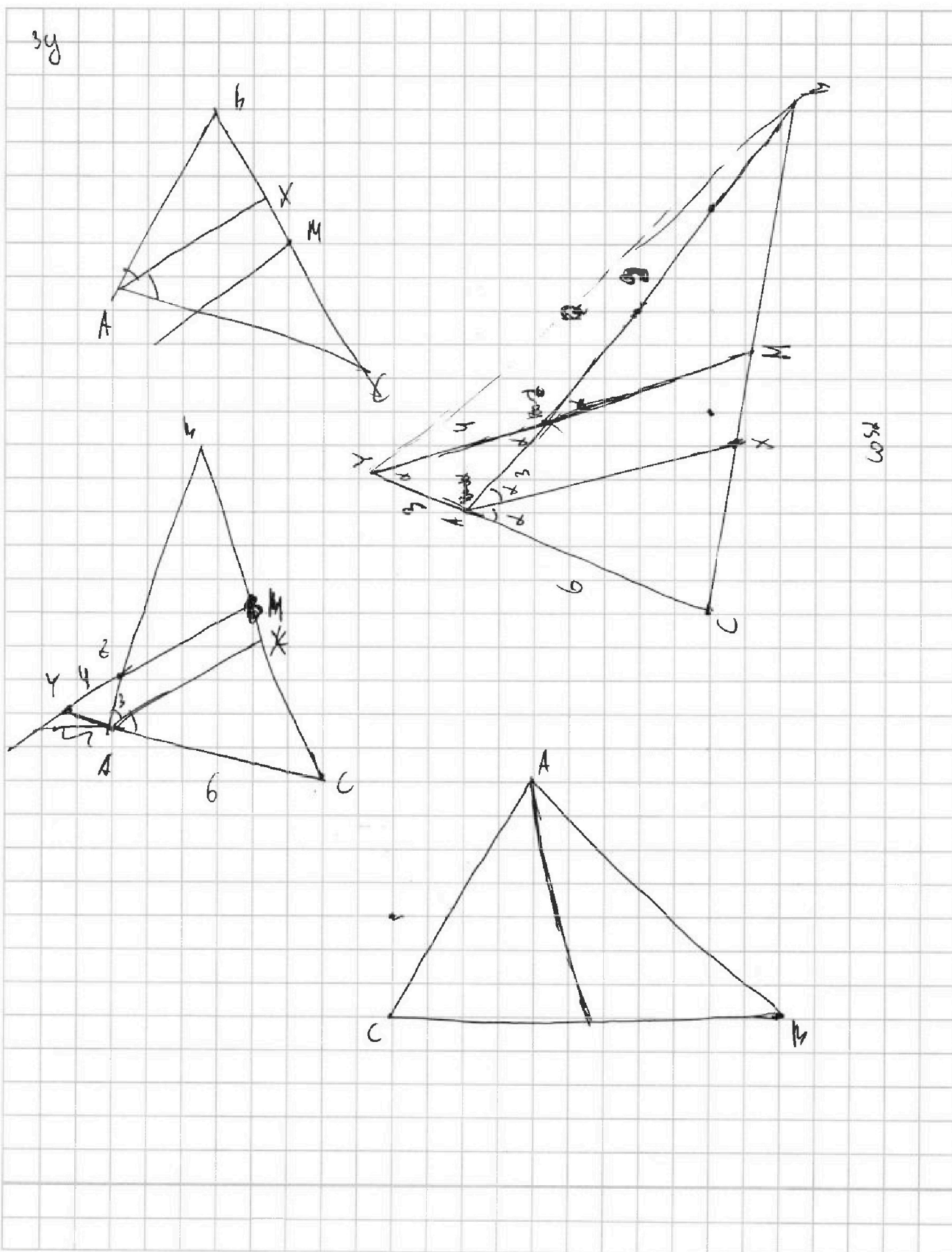


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left(y^2 - \frac{x}{y}\right)^2$$

$$4y - 2x$$

$$y^2 - xy$$

$$y - dx$$

$$y^2 - 4x + \frac{4x}{y^2} \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

$$2y - 4x$$

$$6y - 5x$$

$$2x - y$$

$$x^3 + 3x + 2\sqrt{2}x = y^3 + 3y + 2\sqrt{2}y$$

$$(x-y)(x^2+y^2+xy) + 3(x-y) + 2\sqrt{2}(\sqrt{2}x - \sqrt{2}y) = 0$$

$$(x-y)(x^2+y^2+3+xy) + 2\sqrt{2}(\sqrt{2}x - \sqrt{2}y) = 0$$

$$(\sqrt{2}x - \sqrt{2}y)(\sqrt{2}x + \sqrt{2}y)(x^2+y^2+3+xy)$$

$$(\sqrt{2}x - \sqrt{2}y)$$

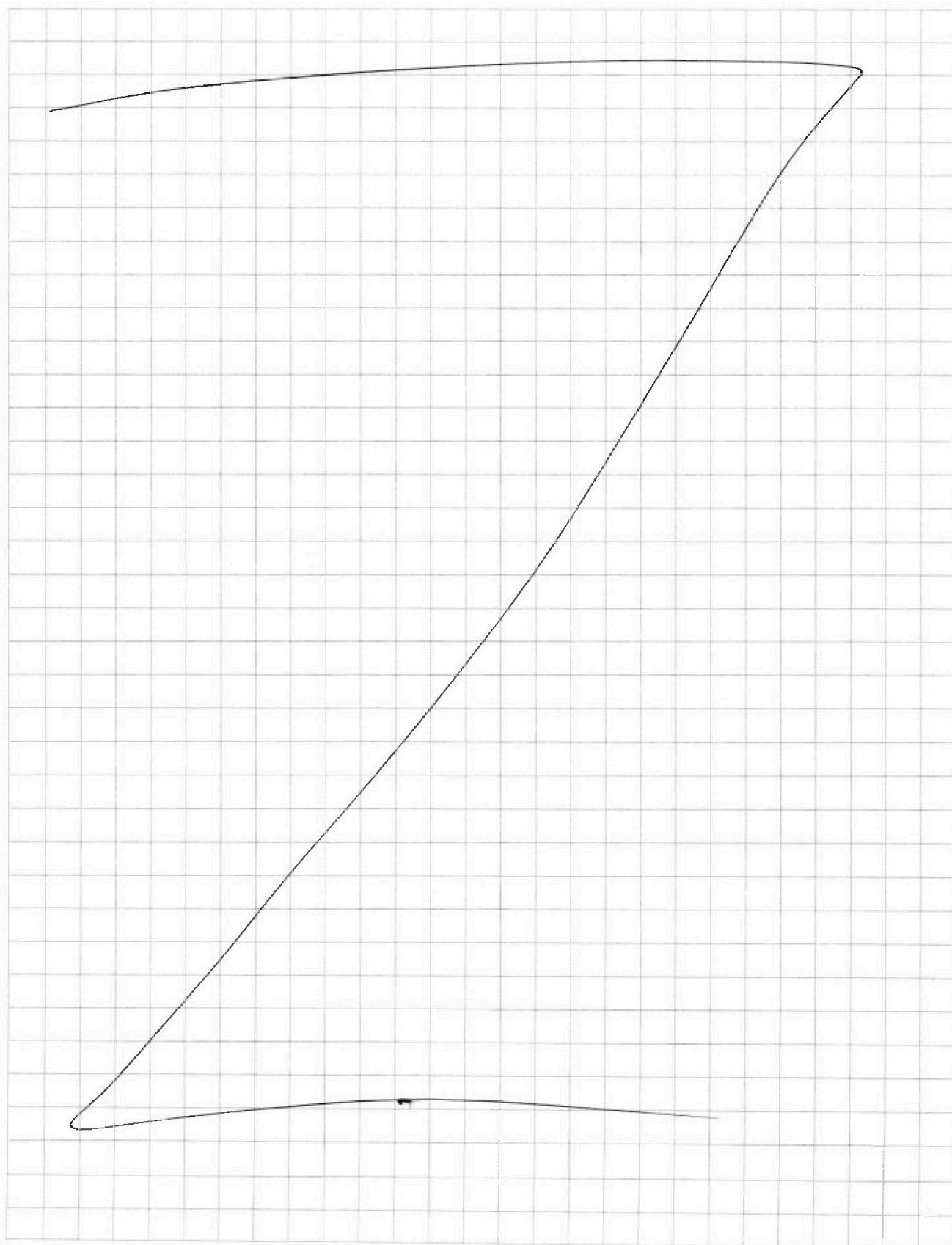


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a \quad a_1k \quad a_2k \quad a_3k \quad a_4k \quad a_5k$$

$$6-9k \quad (x^2-2x)^2$$

$$a+9k=9x^2$$

$$x^2-2x-4$$

$$a+3k=6-9k$$

$$k = \frac{6-9k-a}{3}$$

$$\begin{array}{r} x^2-3x^2-2x+4 \\ -x^2-x^2 \\ \hline -2x^2 \\ -2x^2+2x \\ \hline -4x+4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2-1x^2-4x-x^2+2x+4 \\ \hline x^2-3x^2-2x+4=0 \end{array}$$

$$x^2-2x-4=0$$

$$a + \frac{4}{3} \cdot (6-9k-a) = -\frac{1}{3}a - 12k + 8$$

$$(x^2-2x)^2$$

$$(x^2-2x)^2$$

$$\begin{array}{r} x^4-4x^3+x^2+6x-4 \\ -x^4-x^3 \\ \hline -5x^3+x^2+6x-4 \\ -3x^3+3x^2 \\ \hline x-1-2x^3+6x-4 \\ -2x^3+2x \\ \hline 4x-4 \end{array}$$

$$a+9k=9x^2$$

$$a+18-24x-5a=9x^2$$

$$a+3k=6-9k$$

$$k = \frac{6-9k-a}{3}$$

$$x^2-2x-4$$

$$a+5k=(x^2-2x)^2 \Rightarrow a+5 \cdot (2-3x-\frac{a}{3}) = x^4-4x^3+4x^2$$

$$a+9k=9x^2$$

$$a+10-15x-\frac{5a}{3}=x^4-4x^3+4x^2$$

$$a+18-24x-5a=9x^2$$

$$-\frac{2}{3}a = x^4-4x^3+4x^2+16x-10$$

$$9x^2+24x=18-5a$$

$$a = -\frac{3}{2}(\dots)$$

$$\begin{array}{r} x^4-4x^3+x^2+6x-4=0 \end{array}$$

$$9x^2+24x=18+3x^4-12x^3+12x^2+48x-30$$

$$3x^4-12x^3+12x^2+18x-12=0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3y + 6x \quad y + 2x$$

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$x-2y \geq 0$$

$$x \geq 2y$$

$$2x \geq y$$

$$x-2y \leq 2$$

$$x \leq 2y + 2$$

$$x-2y \geq 0$$

$$x \geq 2y$$

$$x$$

$$x-2y \leq 0$$

$$\begin{cases} 2x \geq y \\ 2x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$2x \geq y$$

$$2x - y \leq 1 \Rightarrow 2x \geq y - 1$$

$$2$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{3}$$

$$-\frac{2}{3}$$

$$-2 \leq 2y - x \leq 0$$

$$0 \leq 4x - 2y \leq 2$$

$$x$$

$$-2 \leq 3x \leq 2$$

$$0 \leq 3x - y \leq 6$$

$$\begin{cases} 0 \leq x-2y \leq 2 \\ 0 \leq 2x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$0 \leq 2x - 4y \leq 4$$

$$0 \leq 2x - y \leq 1$$

$$-1 \leq y - 2x \leq 0$$

$$-1 \leq -3y \leq 4$$

$$-4 \leq 3y \leq 1$$

$$|2x + y| \leq 2$$

$$2x + y = 2$$

$$2x + y = -2$$

$$y - x = 0$$

$$x = y$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \quad | \quad x^2 - 2x + 2$$

$$2x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 6x - 8$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \quad | \quad x - 1$$

$$2x = (x^2 - 2x)^2 - 6 + 9x$$

$$4x = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2 = (3x - x^2 + 2x)(3x + x^2 - 2x)$$

$$4x = (5x - x^2)(x + x^2) = x^2(5 - x)(x + 1)$$

$$6x = 9x^2 - 6 + 9x = 9x^2 - 6 + 9x$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 \quad | \quad x - 1$$

$$x - 2y \leq 2$$

$$x \geq 2y$$

$$x \leq 2 + 2y$$

$$2y - x \geq 2$$

$$3y^2 - 2 + 3x = (x^2 - 2x)^2 - 6 + 9x$$

$$3x^2 + 4 - 6x = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$x(x-2)^2$$

$$x^2 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4$$

$$3x(x-2) + 4$$

$$3x^2 + 4 - 6x$$

$$3x^2 + 4 - 6x$$

$$(3x - 2)$$

$$3x^2 - 4 - 2x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x > 2y$$
$$2x > y$$

$$y \geq x$$

$$x > 2y$$
$$0 \leq x - 2y \leq 2$$

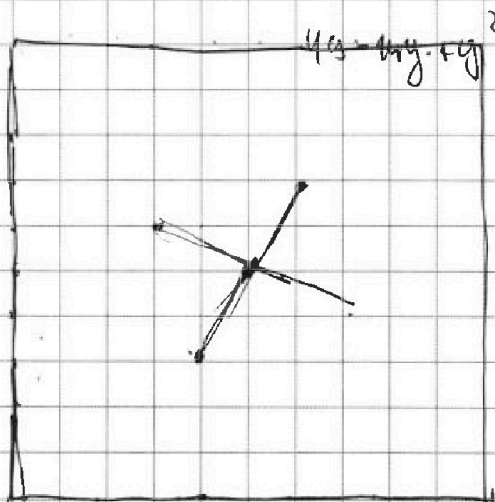
$$0 \leq 2x - y \leq 1$$

$$0 \leq x - y \leq 1$$

$$0 \leq 2y - x \leq 2$$

$$0 \leq 2x - y \leq 1$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{2-y+x} = 2\sqrt{4+x-y^2}$$



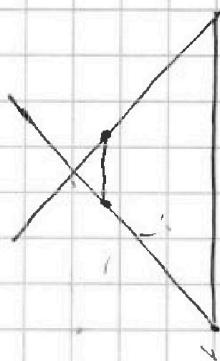
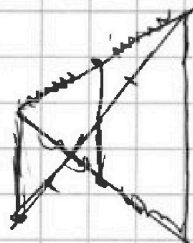


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

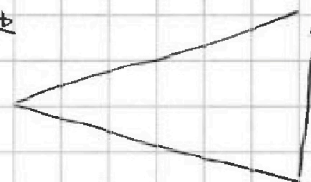
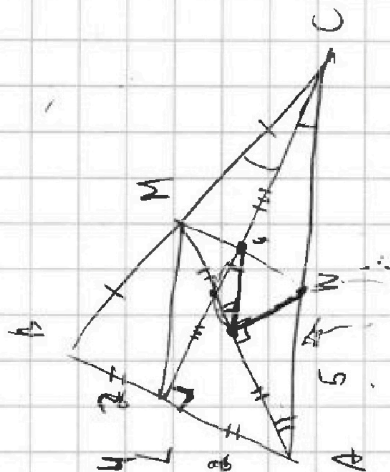
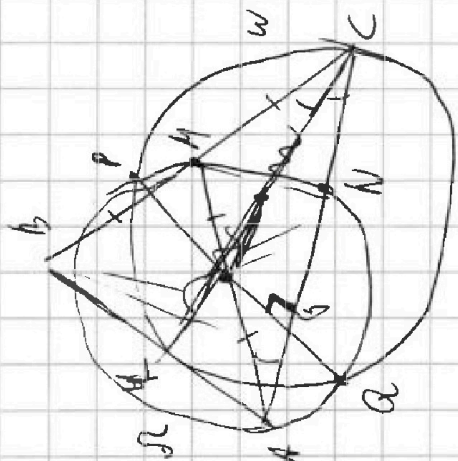
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5 \cdot 21^2 - 6 \cdot 19 \cdot 4}{21 \cdot 16 + 9 - 2 \cdot 16}$$
$$\frac{5(21^2 - 16)}{21 \cdot 16 + 9 - 2 \cdot 16}$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 10x - 5 \\ 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 \\ \hline -4x^3 + 10x \\ -4x^3 + 8x^2 - 4x \\ \hline -3x^2 + 16x - 4 \end{array}$$
$$\frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 4x + 8}$$

$$2x^3 - 2x^2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x_{17}

$$17^3 + 32 \cdot 17 + 20 \cdot 17^2 + 160$$

$$-3 \cdot 17^2 + 32 \cdot 17 - 160$$



$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 170 \\ \hline 289 \end{array}$$

x

$$\begin{array}{r} 867 \end{array}$$

18

$$-3 \cdot 18^2 + 32 \cdot 18$$

$$-18^2 + 32 \cdot 18 - 160$$

561

608

$$-2 \cdot 18^2 + 32 \cdot 18 - 160$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 18 \\ \hline 286 \\ 636 \end{array}$$

$$1 - 648$$

x_{15}

$$\begin{array}{r} 118 \\ \times 15 \\ \hline 590 \\ 1180 \\ \hline 1770 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

