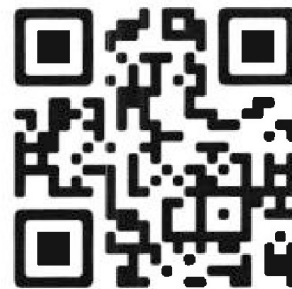




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 15



1. [3 балла] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4x^2 - (4a + 8)x + a^2 + 4a = 0$ имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 5 раз?
2. [5 баллов] Дан треугольник ABC такой, что $AB = 30$, $BC = 24$, $AC = 18$. На стороне BC отмечено последовательно 23 точки: $B_1, B_2, \dots, B_{23}$ так, что эти точки разбивают BC на 24 единичных отрезка. Аналогично, на стороне AC отмечено последовательно 17 точек: $A_1, A_2, \dots, A_{17}$ так, что эти точки разбивают AC на 18 единичных отрезков. Сколько существует треугольников с площадью 11 и вершинами, которые выбираются из точек $A, A_1, A_2, \dots, A_{17}, B, B_1, B_2, \dots, B_{23}, C$?
3. [4 балла] $АН$ – высота равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Точка M – середина стороны AB . Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC . Найдите периметр треугольника ABC , если $АН = МК$, и $AK = 5$.
4. [4 балла] Из множества M , состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 240$.
5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC площади 80 вписан в окружность с центром O , а AA_1 , BB_1 и CC_1 – его высоты. Найдите площадь треугольника BOA_1 , если площади треугольников COB_1 и AOC_1 равны 12 и 20 соответственно.
6. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4, \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск q ($q \in \mathbb{N}$) приборов в месяц потребует на первом заводе $2q^2$ тыс.руб., на втором заводе $2q^2 + 2q$ тыс.руб., и на третьем $2q^2 - q$ тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 100 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 250 приборов?



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

124

$$4x^2 - (4a + 8)x + (a^2 + 4a) = 0$$

по Т. Виета:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = a^2 + 4a \\ x_1 + x_2 = 4a + 8 \\ x_1 = 5x_2 \leftarrow \text{из условия} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_2^2 = a^2 + 4a \\ 6x_2 = 4a + 8 \Rightarrow a = 1,5x_2 - 2 \end{cases}$$

$$5x_2^2 = (1,5x_2 - 2)^2 + 6x_2 - 8$$

$$5x_2^2 = 2,25x_2^2 + 4 - 6x_2 + 6x_2 - 8$$

$$2,75x_2^2 + 4 = 0$$

$$x^2 - (a + 2)x + \left(\frac{a^2}{4} + a\right) = 0$$

по Т. Виета:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{a^2}{4} + a \\ x_1 + x_2 = a + 2 \\ x_1 = 5x_2 \leftarrow \text{из условия} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_2^2 = \frac{a^2}{4} + a \\ 6x_2 = a + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x_2^2 = a^2 + 4a \\ a = 6x_2 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 20x_2^2 &= 36x_2^2 + 4 - 12x_2 + 24x_2 - 8 \\ 16x_2^2 + 12x_2 - 4 &= 0 \\ 4x_2^2 + 3x_2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = 9 + 16 = 25$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-3+5}{8} \\ x_2 = \frac{-3-5}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0,25 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0,25 \\ a = 6 \cdot 0,25 - 2 = -0,5 \\ x = -1 \\ a = -6 - 2 = -8 \end{cases}$$

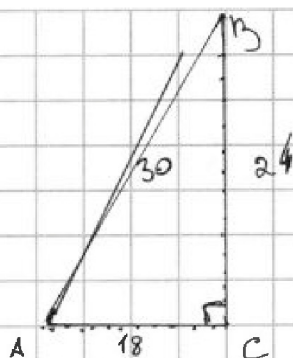
Ответ: $-0,5$; -8 ;



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

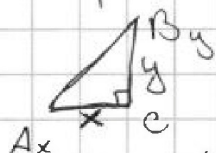
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



т.к. $30^2 = 5.6$
 $24^2 = 4.6$
 $18^2 = 3.6$

и 5, 4, 3 - Пифагорова тройка, то $\triangle ABC$ - прямоугольный

2) рассмотрим $\triangle$, ~~с вершинами~~
 одна вершина которого - C



$0 \leq x \leq 18$
 $0 < y \leq 24$

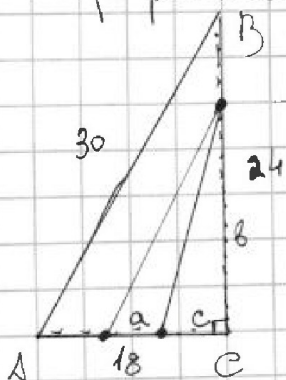
и $\frac{x^2 + y^2}{2} = 11$

$xy \leq 22$

т.к. $22 : 2$
 $22 : 11$
 $22 : 1$
 $22 : 22$

то $\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 11 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 11 \\ y \leq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 22 \end{cases}$ $x \neq 22$ т.к. $22 > 18$
 всего 3

3) теперь рассмотрим другие граничные $\triangle$ с одной вершиной на стороне BC



можно $\triangle$: $\frac{(a+c)b}{2} - \frac{bc}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} - \frac{bc}{2} - \frac{ab}{2}$

при этом $0 < a \leq 18$ и $\frac{ab}{2} = 11$
 $0 < b \leq 24$
 $ab = 22$

т.к. $22 : 1$; $22 : 22$; $22 : 2$; $22 : 11$

то $\begin{cases} a \leq 1 \\ b \leq 22 \end{cases}$ $\begin{cases} a \leq 11 \\ b \leq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} a \leq 2 \\ b \leq 11 \end{cases}$

на стороне AC, аналогично можно рассмотреть:
 17 вариантов 2 варианта 16 вариантов

всего 40



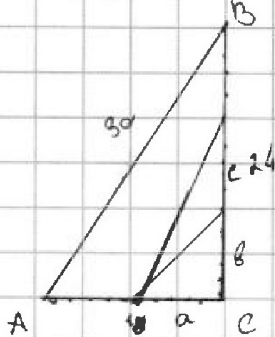
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12 продолжение.



рассматриваем $\triangle ABC$ с заданным углом на стороне AC

$$S_{\triangle} = \frac{a(b+c)}{2} - \frac{ab}{2} \leq \frac{ac}{2}$$

$$ac \leq 22$$

т.к. $22:1; 22:22; 22:2; 22:11$

$$\begin{cases} 0 < a \leq 18 \\ 0 < c \leq 24 \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} a \leq 1 & a \leq 2 & a \leq 11 \\ c \leq 22 & c \leq 11 & c \leq 2 \end{cases}$$

~~вариантов~~ вариантов

(размещений:)

1 вариант

13 вариантов

22 варианта

всего 37 вариантов

в итоге получается $37 + 3 + 40 = 80$

Ответ: 80

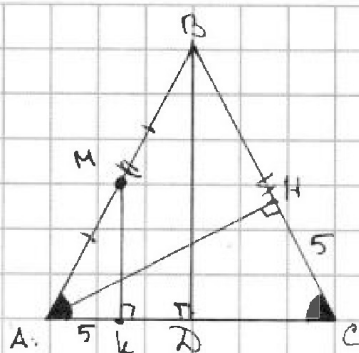


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Р2

1) т.к. $\triangle ABC$ $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$ 2) $\triangle AMK \cong \triangle CHD$ - прямоугольные,
по угл. и катетам $AK = HC = 5$ и $AM = CH$ т.к. $AM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC$, то $AC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC$ ~~3) $\angle A = \angle C$~~ ~~$\angle B = 90^\circ$ (т.к. $\angle AHC = \angle HAC = 90^\circ - \alpha$)~~ ~~$\triangle ABC$ $\angle HAC = 90^\circ - \alpha$; $\triangle ABC$, $\angle AHC = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 2\alpha - 10^\circ$;
 $\angle AHC$, $\angle B = 90^\circ - \angle BAH = 90^\circ - 2\alpha - 10^\circ = 180^\circ - 2\alpha$~~ 3) проведем $BD \perp AC$ $\triangle AMK$ и $\triangle ABD$ по углу A (прямоугольные)значит $\frac{AK}{AD} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$; $AD = 10$ т.к. $\triangle ABC$ $AB = BC$, то BD - высота, медиана и биссектриса
и AC - основаниезначит $AC = 2AD = 20$ и $AB = BC = 40$ 4) $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 20 + 40 \cdot 2 = 100$

Ответ: 100



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4

$$M = \{n; n+1; n+2; n+3; n+4\} \quad n \geq 0$$

Вариантов разложения этих чисел на слагаемые: 5
 может быть 5 сумм: a, b, c, d, e:

$$a \leq n + n+1 + n+2 + n+3 \leq 4n+6$$

$$b \leq n + n+1 + n+2 + n+4 \leq 4n+7$$

$$c \leq n + n+2 + n+3 + n+4 \leq 4n+9$$

$$d \leq n + n+1 + n+3 + n+4 \leq 4n+9$$

$$e \leq n+1 + n+2 + n+3 + n+4 \leq 4n+10$$

из этих сумм - 8 простые

Вариантов разложения по 8 сумм: 10

$$(4n+6)^2 - (4n+7)^2 \leq 240$$

$$(4n+9)^2 - (4n+6)^2 \leq 240$$

$$(4n+8)^2 - (4n+6)^2 \leq 240$$

$$(4n+10)^2 - (4n+6)^2 \leq 240$$

$$(4n+9)^2 - (4n+7)^2 \leq 240$$

$$(4n+8)^2 - (4n+7)^2 \leq 240$$

$$(4n+10)^2 - (4n+7)^2 \leq 240$$

$$(4n+9)^2 - (4n+8)^2 \leq 240$$

$$(4n+10)^2 - (4n+9)^2 \leq 240$$

$$(4n+10)^2 - (4n+8)^2 \leq 240$$

$$1 \cdot (8n+13) \leq 240$$

$$3 \cdot (8n+15) \leq 240$$

$$2 \cdot (8n+14) \leq 240$$

$$4 \cdot (8n+16) \leq 240$$

$$2 \cdot (8n+16) \leq 240$$

$$1 \cdot (8n+15) \leq 240$$

$$3 \cdot (8n+17) \leq 240$$

$$1 \cdot (8n+17) \leq 240$$

$$1 \cdot (8n+19) \leq 240$$

$$2 \cdot (8n+18) \leq 240$$

$$8n \leq 227$$

$$8n \leq 65$$

$$8n \leq 106$$

$$8n \leq 44$$

$$8n \leq 104$$

$$8n \leq 137$$

$$8n \leq 63$$

$$8n \leq 223$$

$$8n \leq 222$$

$$8n \leq 102$$

$$n \leq 28,5$$

$$n \leq 8,125$$

$$n \leq 23,25$$

$$n \leq 5,5$$

$$n \leq 13$$

$$n \leq 17,1$$

$$n \leq 7,875$$

$$n \leq 27,8$$

$$n \leq 27,75$$

$$n \leq 12,75$$

Т.к. n - натуральное, то оно должно быть целым

$$n \leq 13$$

$$M \leq \{13; 14; 15; 16; 17\}$$

$$\text{Ответ: } M \leq \{13; 14; 15; 16; 17\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

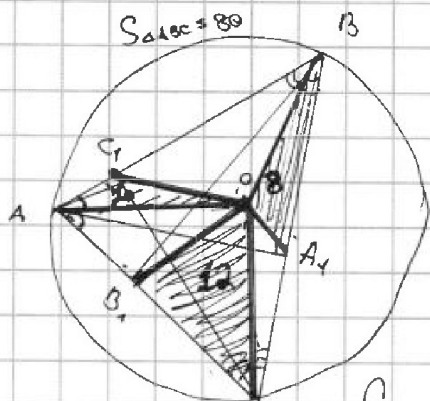
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W5



1) $OA = OB = OC = R$ и AA_1, BB_1, CC_1 — высоты,
~~то $\triangle A_1OC = \triangle C_1OA$~~

но $\triangle A_1OC = \triangle C_1OA$

$\triangle B_1OC = \triangle C_1OB$

$\triangle A_1OB = \triangle B_1OA$

поэтому

$$S_{\triangle A_1OC} + S_{\triangle C_1OA} + S_{\triangle B_1OC} + S_{\triangle C_1OB} + S_{\triangle A_1OB} + S_{\triangle B_1OA} = S_{\triangle ABC}$$

$$2S_{\triangle A_1OB} + 2S_{\triangle B_1OC} + 2S_{\triangle C_1OA} = S_{\triangle ABC}$$

$$80 = 2S_{\triangle A_1OB} + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 12$$

$$S_{\triangle A_1OB} + 20 + 12 = 40$$

$$S_{\triangle A_1OB} = 8$$

Ответ: 8



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
11 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4 & (1) \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3 - 2ab^2 - 4 = 0 \\ b^3 - 3a^2b - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3 - 2ab^2 - 4 = 0 \\ b^3 - 3a^2b - 8 = 0 \end{cases}$$

$$b^2 = \frac{a^3 - 4}{2a}$$

$$b^2 = \frac{a^3 - 4}{2a}$$

$$b = \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}}$$

$$\frac{a^3 - 4}{2a} \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} - 3a^2 \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} = 8$$

$$\sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} (a^3 - 4 - 6a^3) = 16a$$

$$-4 - 5a^3 = 16a \sqrt{\frac{2a}{a^3 - 4}}$$

подставим (2) на (1)

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{8 + 3ab}{4 + 2ab}$$

$$4b^2 + 2ab^3 = 8a^2 + 3a^3b$$

$$4(b^2 - 2a^2) = ab(3a^2 - 2b^2)$$

$$погасим b$$

$$4\left(\frac{a^3 - 4}{2a} - 2a^2\right) = a \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} (3a^2 - \frac{a^3 - 4}{a})$$

$$-6a^3 - 8 = a \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} (2a^3 - 4)$$

$$3a^3 + 4 = a \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} (2 - a^3)$$

$$\frac{a \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} (2 - a^3)}{3a^3 + 4} = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a \neq 0 \\ a^3 = 4 \\ a^3 = 2 \\ 3a^3 + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq \sqrt[3]{4} \\ b \leq 0 \\ a \leq \sqrt[3]{2} \\ b \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} a = \sqrt[3]{4} \\ b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = \sqrt[3]{2} \\ b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

27

I $2q^2 = a$

II $2q^2 + 2q \leq b$ т.к. $q \geq 0$, то $\Rightarrow c \leq a \leq b \leq 100$

III $2q^2 - q \leq c$ и $q \leq 100$

значит для минимальных затрат надо, чтобы II выполнялся как можно меньше;
~~и~~ а I — как можно больше.

I можно выполнить только 100

значит, чтобы для II осталось как можно меньше,
тоже должны выполнить максимальное возможно,
т.е. 100.

тогда для III осталось 50.

Ответ:
1: 100
2: 100
3: 50

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

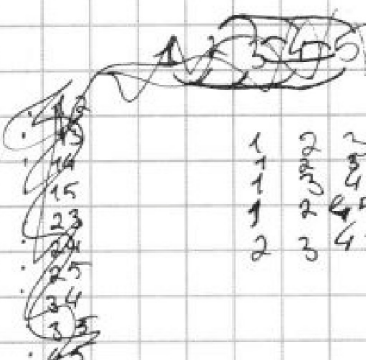
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 170 \overline{) 31} \\ 155 \underline{) 54838} \\ 150 \\ 124 \\ -260 \\ -248 \\ 120 \\ -93 \\ 270 \\ -248 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \\ 1 \ 1 \ 2 \ 5 \\ 1 \ 2 \ 4 \ 5 \\ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \ 23 \ 34 \ 45 \\ 13 \ 24 \ 35 \\ 14 \ 25 \\ 15 \ 26 \\ 23 \ 31 \\ 186 \ 0,677 \\ -240 \\ -217 \\ -230 \\ -217 \end{array}$$

$$26$$

$$\begin{array}{r} 227 \overline{) 8} \\ 16 \underline{) 28,47} \\ 67 \\ 64 \\ 30 \\ -24 \\ 60 \\ -57 \end{array}$$

$$8,125$$

$$54545$$

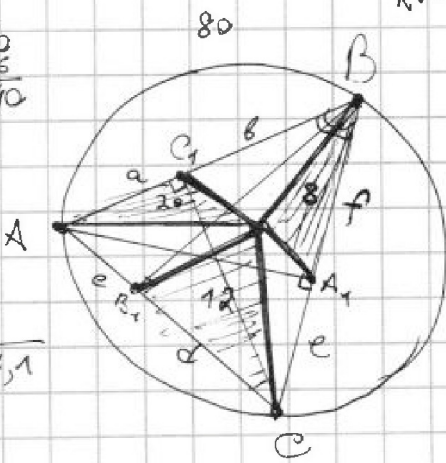
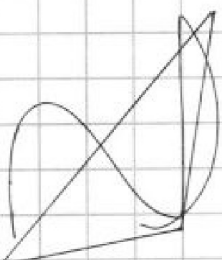
$$\begin{array}{r} 240 \\ 13 \\ -227 \end{array}$$

$$1,2,3,7,4,5$$

$$\begin{array}{r} 222 \overline{) 8} \\ 16 \underline{) 27,75} \\ 62 \\ -56 \\ 60 \\ -56 \\ 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80-15 \\ 120-14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 106 \overline{) 8} \\ 8 \underline{) 23,25} \\ 26 \\ -20 \\ 16 \\ -16 \\ 40 \end{array}$$



$$60-16$$

$$\begin{array}{r} 104 \overline{) 8} \\ 8 \underline{) 13} \\ 24 \\ -223 \overline{) 8} \\ -16 \underline{) 27,8} \\ -63 \\ -56 \\ 78 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \overline{) 8} \\ 8 \underline{) 17,1} \\ 57 \\ -56 \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 102 \overline{) 8} \\ 8 \underline{) 12,75} \\ 22 \\ -16 \\ 60 \\ -56 \\ 40 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} a^3 - 4 \ 4a^3 \\ 2a \\ -6a^3 - 8 \\ a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3a^3 - a^3 \\ 2a^3 - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 260 \overline{) 31} \\ 248 \underline{) 10,838709} \\ 120 \\ -93 \\ 270 \\ -248 \\ 220 \\ -217 \\ 300 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cdot (9a^6 + 16 + 4a^3) = a^3 (a^3 - 4)(4 + a^6 - 4a^3)$$

$$\begin{array}{r} 4 - 4 = 0 \\ \hline 2 \quad 356 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 2 \quad 352 \end{array}$$