



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{cases}$$

$$\sqrt{169-z^2} \leq \sqrt{169} = 13 \quad (\text{равенство достигается при } z=0)$$

$$\text{Тип } y \leq -1 \quad -y-1-3y+36 = -4y+35 \geq 39$$

$$\text{Тип } -1 < y < 12 \quad y+1-3y+36 = -2y+37 \geq 13 \quad (\text{рав-во достигается при } y=12)$$

$$\text{Тип } 12 < y \quad 4y-35 > 13$$

$$13 \geq \sqrt{169-z^2} = |y+1| + 3|y-12| \geq 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{169-z^2} = 13 \\ |y+1| + 3|y-12| = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=12 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} \quad 0 \leq x \leq 4$$

$$(12+x-x^2 = (x+3)(4-x))$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{12+x-x^2} - 5$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} = 2\sqrt{12+x-x^2} - 5$$

$$\text{Тип } t = \sqrt{12+x-x^2} > 0$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 81 - 72 = 9 = 3^2$$

$$\begin{cases} t = \frac{9-3}{2} \\ t = \frac{9+3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = 6 \end{cases}$$

$$\text{Тип проверки при } x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{13}}}{2} + \frac{\sqrt{4+2\sqrt{13}}}{2} = \frac{\sqrt{13}+1}{2} - \frac{\sqrt{13}-1}{2} = 1$$

$$\begin{cases} 12+x-x^2=9 \\ 12+x-x^2=36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x-3=0 \\ x^2-x+24=0 \end{cases}$$

$$x^2-x-3=0$$

$$x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad \text{или } \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 6-5=1$$

$$x = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \frac{1-\sqrt{13}}{2} < 0 \Rightarrow \sqrt{x+3} \leq \sqrt{4-x} \Rightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} \neq 1$$

$$x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad \text{Ответ: } \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0 \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x = p + 3$$

Пусть $t = \cos x$, $-1 \leq t \leq 1$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(t)$ — монотонно возрастаем

$$f(-1) = -1; \quad f(1) = 13 \Rightarrow$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t \text{ принимает все значения при } -1 \leq p+3 \leq 13$$

$$-4 \leq p \leq 10$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t = p + 3$$

$$8t^3 + 12t^2 + 6t = 2(p+3)$$

$$(2t)^3 + 3(2t)^2 + 3 \cdot (2t) + 1 = 2p + 7$$

$$(2t+1)^3 = 2p+7$$

$$2t+1 = \sqrt[3]{2p+7}$$

$$t = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}$$

$$x = \pm \arccos \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left\{ \arccos \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} + 2\pi k, -\arccos \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$

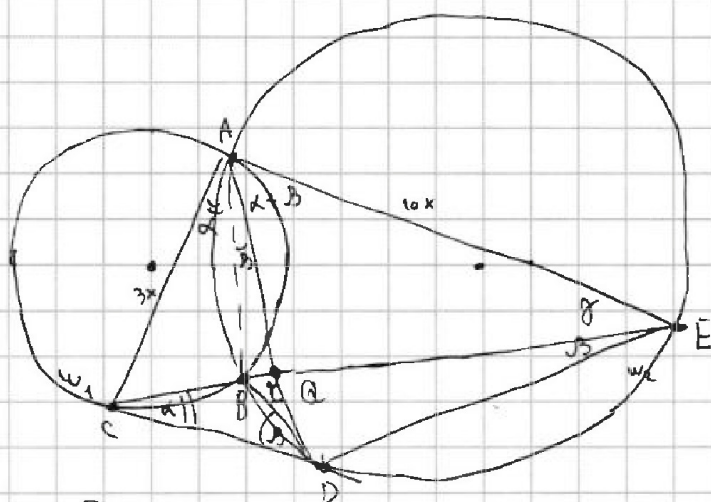


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$\frac{CA}{QE} = \frac{3}{10}$$

Найти: $\frac{ED}{CD}$

Решение:

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BAD = \beta$, $\angle BDC = \gamma$

$\angle BCD = \alpha$ (по св. $\angle$ и. хорд. и кас.)

$\angle BDC = \beta$

$\angle EAD = \alpha + \beta$ (как в. $\angle$)

$\angle EAD = \frac{1}{2} \angle DE = \angle EBD = \alpha + \beta$ (как в. $\angle$)

$\angle BED = \beta = \frac{1}{2} \angle BVD$

$\angle AEB = \frac{1}{2} \angle ADB = \gamma$

$\angle CAD = \alpha + \beta = \angle DAE$

$\angle ADC = \gamma + \beta = \angle AED$

$\Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle DAE \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}$

$\angle CAQ = \angle QAE \Rightarrow AQ - \text{бисс. } \triangle ACE \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CQ}{QE} = \frac{3}{10}$

$AC = 0,3 AE$

$AE \cdot AC = AD^2$

$0,3 \cdot AE^2 = AD^2$

$\sqrt{0,3} AE = AD$

$\frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{\sqrt{0,3}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$

Ответ: $\sqrt{\frac{10}{3}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

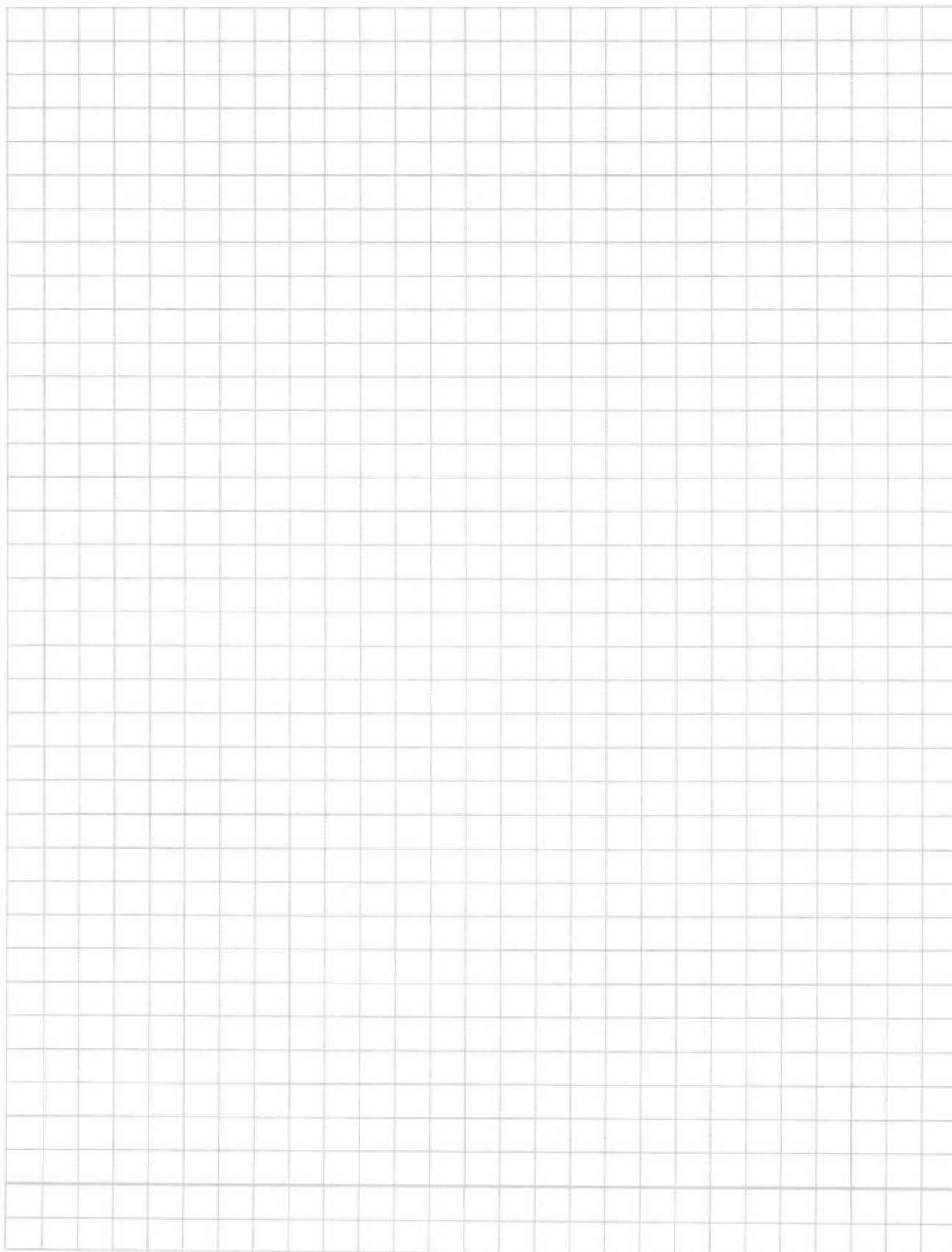
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдём клетки прямоуго. - точки
 Пусть A - мн. способов симметричных по 1 ср. л.,
 B - мн. способов, симметричных по 2 ср. л., C -
 - мн. способов, симметричных по центру

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |AB| - |BC| - |AC| + |ABC|$$

A, B: разделим прямоугольник на 2 части по ср. л.

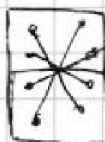


и выд. 4 точки в каждой.

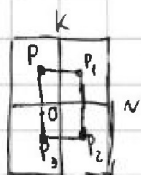
То мн. сегмент. восст. другие точки

$$|A| = |B| = C_{25000}^4$$

C: также по 4 точки выд. половина прямог.
 восстанавл. остальные м.
 C_{25000}^4



A B:



То 1 точка восст. ещё 3 точки

P_1 и P_2 симметричны отне. центра

P_1 и P_3 и. к.

$$(\angle P_1 O P_2 = \angle P_1 O K + \angle K O P_1 + \angle P_1 O N + \angle P_2 O N) = 2 \cdot (\angle K O P_1 +$$

$$+ \angle P_1 O N) = 180^\circ$$

Значит фигуру можно восст. по 2 точкам $|AB| = |ABC| = C_{12500}^2$
 из прямог. 125×100

BC, AC:



Также, если две точки симметричны отне. центра
 и 1 ср. л., то они симм. и для другой ср. л.

$$|BC| = |AC| = |AB| = C_{12500}^2$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |AB| - |BC| - |AC| + |ABC| = 3C_{25000}^4 - 3C_{12500}^2$$

Символ: $2C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a > b \\ a - b \not\equiv 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, p - \text{н.ч.}$$

$$p^2 \mid (a-c) \Rightarrow \begin{cases} a-c=1 \\ a-c=p \\ a-c=p^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a=c+1 \quad b &= p^2+c \quad a < b \quad \emptyset \\ a=c+p \quad b &= c+p \quad a=b \quad \emptyset \\ a=c+p^2 \quad b &= c+1 \end{aligned}$$

$$a-b = p^2-1 = (p-1)(p+1) \not\equiv 3 \Rightarrow p \not\equiv 3 \Rightarrow p=3$$

p-н.ч.

$$\begin{cases} a = c+9 \\ b = c+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c+9+c^2+2c+1 &= 560 \\ c^2+3c-550 &= 0 \\ (c+25)(c-22) &= 0 \\ \begin{cases} c=-25 \\ c=22 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } (-16, -24, -25); (22, 23, 22).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_7 = b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = 5-x$$

$$b_{15} = b_1 \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$q^8 = \frac{b_{15}}{b_7} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = (x+1)^2 \Rightarrow q^4 = |x+1|$$

$$q^6 = \frac{b_{13}}{b_7} = \frac{5-x}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}}$$

$$\sqrt{|x+1|^3} = \frac{5-x}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}}$$

$$\begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{35}{13} \end{cases}$$

$$\sqrt{(x+1)^3} = \frac{(5-x)\sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{13x-35}}$$

$$\sqrt{13x-35} = 5-x$$

$$x = \frac{40}{14} = \frac{20}{7}$$

$$\begin{cases} x < 5 \end{cases}$$

$$13x-35 = x^2-40x+25$$

$$\begin{cases} x < 5 \end{cases}$$

$$(x-20)(x-3) = 0$$

$$x = 3$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ x < \frac{35}{13} \end{cases}$$

$$\sqrt{-(x+1)^3} = \frac{(5-x)\sqrt{-(x+1)^3}}{\sqrt{35-13x}}$$

$$\sqrt{35-13x} = 5-x$$

$$35-13x = x^2-40x+25$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$(x+5)(x-2)=0$$

$$x = -5$$

$$\text{Answer: } \{-5; 3\}$$

$$\text{O.B.3: } -\frac{35}{13} \\ x \notin [-1; \frac{35}{13}] \\ x \neq 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

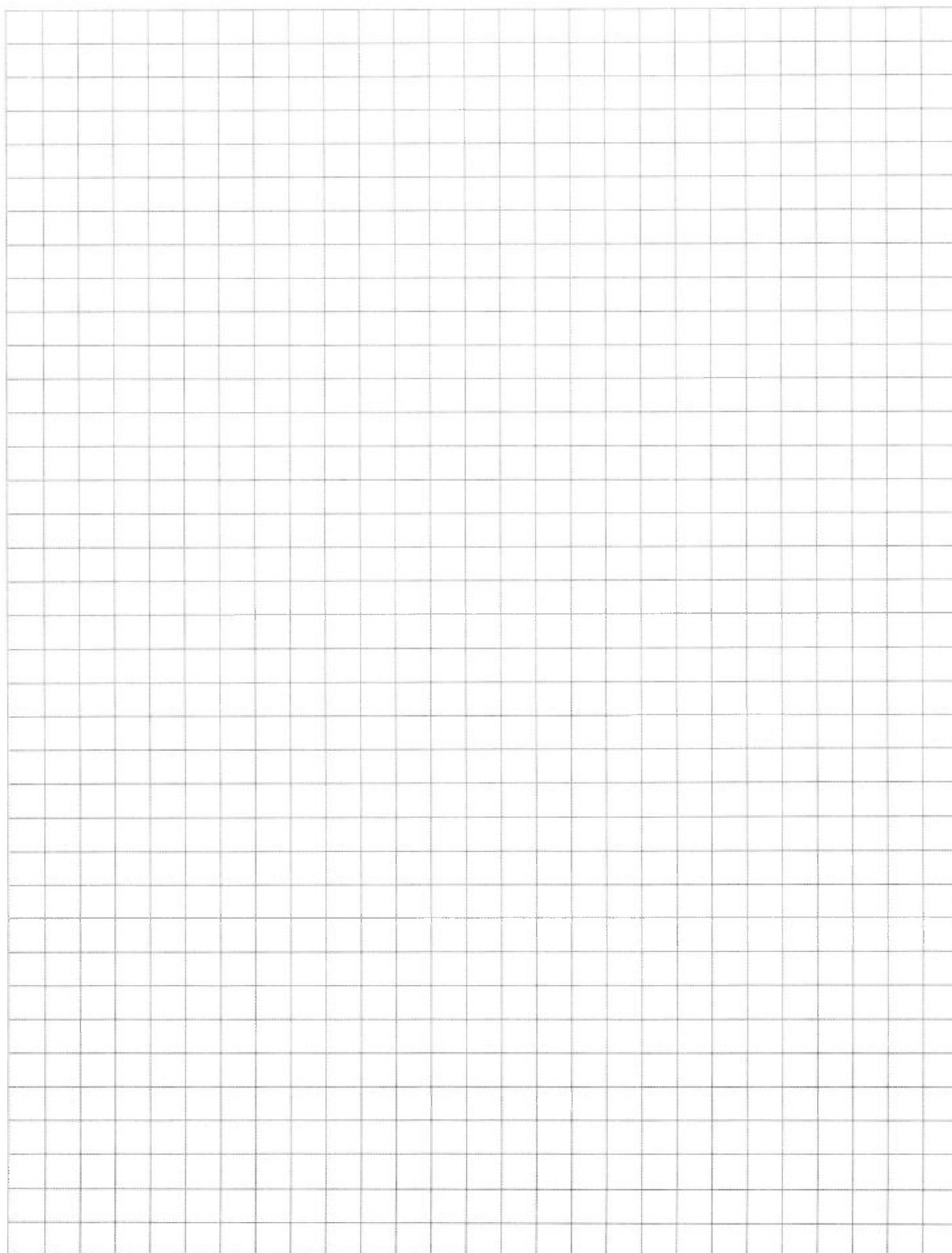
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



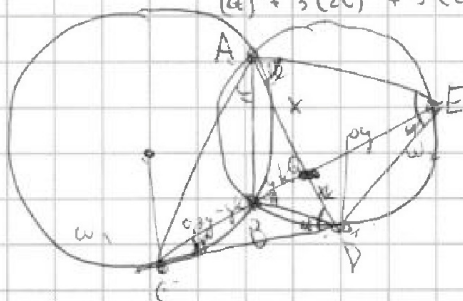
$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \quad \leq 10$$

$$3\cos^3 x - 4\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$f(x) = \cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$f'(x) = -3\sin 3x - 6\sin 2x - 6\sin x$$

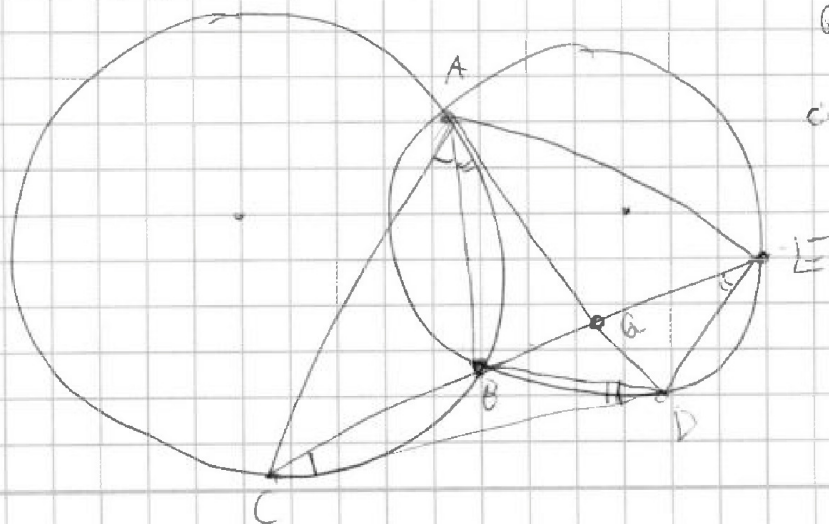
$$4t^3 + 12t^2 + (4t^3 + 3(2t)^2 + 3(2t))$$



$$CD^2 = (0,3y - yk)(1,3y$$

$$AC \cap BD \sim \Delta CDE$$

$$ED = BD \cdot$$



$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos 3x = \cos 2x \cos x - 2\sin^2 x \cos x$$

$$= 4\cos^3 x - \cos x - 2$$

$$CD^2 = 4R^2$$

$$CD^2 = CB \cdot CE =$$

$$\frac{ED}{CD}$$

$$\frac{CB}{CE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{CK}{Cy} = \frac{3}{10}$$

$$CK = 0,3y$$

$$\frac{7 + \sqrt{13}}{2} \rightarrow B$$

$$14 + 2\sqrt{13} = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$$

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CE} = EQ = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{CB}{CE} = \frac{3}{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b$$

$$a - b = 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a + b^2 = 560$$

$$1) \begin{cases} a = p + c \\ b = p + c \end{cases} - \text{нельзя}$$

$$2) \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = c + 1 \end{cases}$$

$$3) b = p^2 + c < a$$

$$a = \frac{p^2 - 1}{3} \\ (p-1)(p+1)/3 \\ p \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p = 3$$

$$a + b^2 = p^2 + c + 1 = 560 \quad p^2 + c + c^2 + 2c + 1 =$$

$$= p^2 + c^2 + 3c + 1 = 560$$

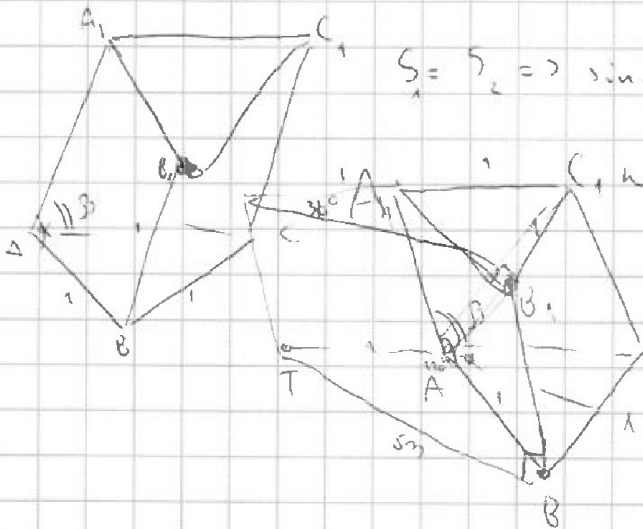
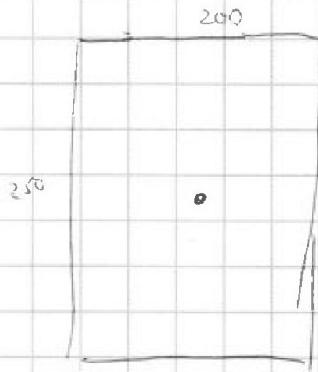
$$c^2 + 3c - 559 = 0$$

$$D = 9 + 2200 = 2209$$

$$c = 22, 25$$

$$c = 22, 25$$

$$a, b \text{ не целые}$$



$$S_1 = S_2 \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow BB = 3$$

$$\sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow BB = 3$$

$$S_{AA_1BB} = 4 > 3 - \text{нельзя}$$

$$x - \text{см}, y - \text{м}$$

$$S = d \sqrt{3}$$

$$TB \perp m, BB_1 \perp$$

$$L_p$$

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

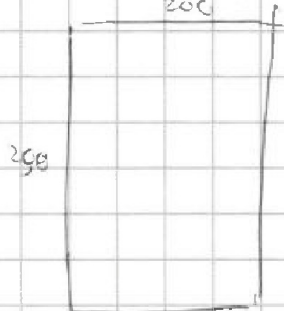
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a - b + 5 = 2b$$

$$2a(2b-1) + 2$$



A - минимальная температура

B - минимальная температура

C - минимальная температура

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$$

$$2C_{2500}^4 - C_{12500}^2$$

$$m(A \cup B \cup C) = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

AB



$$= 3C_{25000}^4 - 2C_{12500}^2$$

ED

$$\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{BC}$$

$$\frac{CG}{GE} = \frac{3}{10}$$

$$AG - \text{сумма} \angle CAE = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$$

$$R \sin \alpha = 0,3 \quad r \cdot \sin \alpha$$

$$R = 0,3 r$$

$$CD^2 = 4Rr = 1,2r^2 \quad |CD = \sqrt{1,2}r$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}$$

$$AD^2 = AE \cdot AC$$

