



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если ур-е имеет 2 различными корня $\Rightarrow D > 0$

$$(2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) > 0$$

$$12t^2 - 16t^2 + 16 > 0$$

$$-4t^2 + 16 > 0$$

$$t^2 - 4 < 0$$

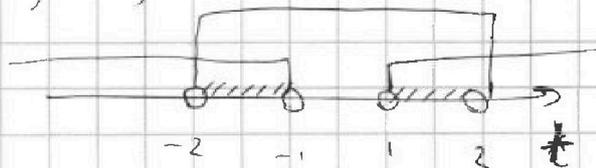
$$t \in (-2; 2)$$

По т. Виета (или ур-е корнями $> 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4t^2 - 4 > 0$$

$$t^2 - 1 > 0$$

$$t \in (-\infty, -1) \cup (1; +\infty)$$



Ответ: $(-2; -1) \cup (1; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17 \cdot 2^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17 \cdot 2^5$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17 \cdot 2^5$$

Т.к. $a+b = 40$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ a+b \equiv 0 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ a-b \equiv 0 \\ \end{matrix}$$

\Downarrow

$$p: 2 \Rightarrow p = 2$$

~~$$(a-b)(a-b+15) = 17 \cdot 2^5$$~~

~~Пусть $a-b = x$~~

~~$$x(x+15) = 17 \cdot 32$$~~

~~$$x^2 + 15x = 17 \cdot 2^5$$~~

~~$$x^2 + 15x - 17 \cdot 2^5 = 0$$~~

~~$$D = 15^2 + 17 \cdot 2^7 = 225 + 2176 = 2401$$~~

~~$$2401 = 7^2$$~~

~~$$x = \frac{-15 + 49}{2}$$~~

~~$$x = \frac{-15 - 49}{2}$$~~

~~$$x = 17$$~~

~~$$x = -32$$~~

т.к. $x \equiv 0 \Rightarrow x \neq 17$

$$\begin{array}{r} 128 \\ \times 17 \\ \hline 896 \\ + 128 \\ \hline 2176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 2176 \\ \times 225 \\ \hline 2401 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Т.к. } a - b \equiv 0 \pmod{2}$$

$$a - b + 15 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow a - b + 15 \equiv 17 \pmod{2} \Rightarrow a - b + 15 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$a - b \equiv 32$$

$$a - b = \begin{cases} 32 \\ -32 \end{cases}$$

$$1) a - b = 32$$

$$\begin{cases} 17 \\ -17 \end{cases} = a - b + 15 = 47 \text{ - не год.}$$

$$2) a - b = -32$$

$$a - b + 15 = -17 \text{ - верно}$$

$$\begin{cases} a - b = -32 \\ a + b = 40 \end{cases}$$

$$2a = 8$$

$$a = 4$$

$$b = 36$$

Ответ: $a = 4, b = 36$.

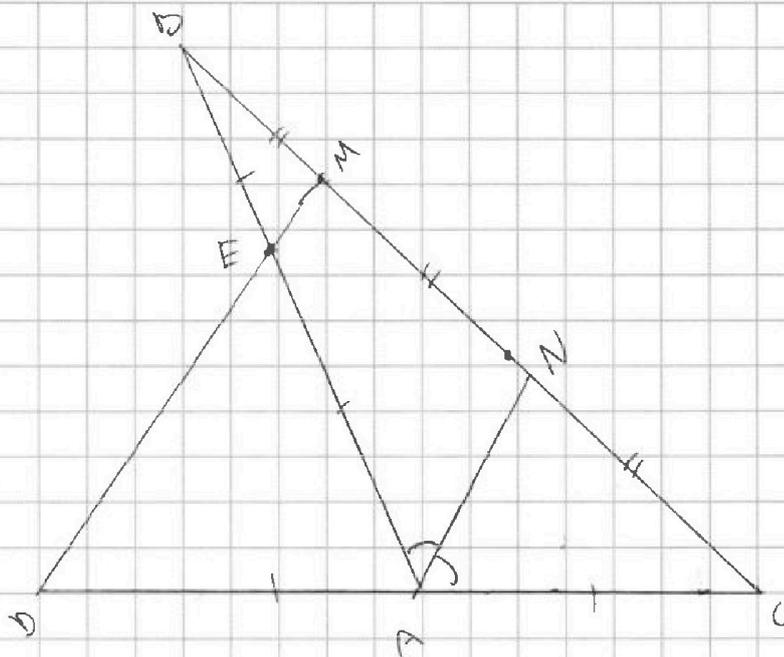


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) По т. Фалеса $AD = AC$, т.к. $MN = NC$

2) По т. Фалеса $AE = EB$, т.к. $BM = MN$

т.к. $CD = AB \Rightarrow AD = AC = AE = EB$

3) заметим, что $\frac{AC}{CN} = \frac{AB}{BN}$

$$\begin{aligned} &\text{т.к.} \\ \frac{AC}{CN} &= \frac{2AC}{2CN} \end{aligned}$$

\downarrow (по в-ву д-ца)
 AN - д-ца в $\triangle ABC$

$$\angle BAC = 2\angle CAN$$

4) По т. косинусов для $\triangle ABC$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos(\angle BAC)$$

$$BC^2 = 5AC^2 - 4AC^2 \cdot \cos(2\angle CAN)$$

$$BC^2 = 6AC^2$$

$$AC = \frac{BC}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

~~Ответ: 2~~ \Rightarrow т.к. $AB = 2AC = 4\sqrt{6}$
Ответ: $4\sqrt{6}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.е. способов $12 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$

Ответ: $12 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Зафиксируем ряды, как 1, 2 и 3, поэтому
количество число способов умножим на количество
вариантов выбрать последовательность из этих
рядов, т.е. на $3! = 6$~~

~~Фиксировать составление календаря~~

~~Пусть~~

Зафиксируем ряды как ^{1,2} ~~1,2,3~~ 3-й, поэтому количество

число способов умножим на число вариантов ~~выбора~~
~~вариантов выбрать эти ряды~~ количество перестановок, т.е. на $3! = 6$
каждый, т.е. ~~на $3! = 6$~~

Видеть в первом ряду I ряд количество вариантов
выбрать $3 \times C_8^3$, во II из оставшихся C_5^3

каждый вариант выбора 3-х людей в 1 ряд даст

в этом ряду единственную расстановку по увеличению
роста от I к последней парте, тогда в III
ряду будет ровно ~~ровно~~ 4 способа, как посадить
оставшиеся 2-х людей, (пусть I рост x , а II y)

т.е. всего вариантов $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4$, но

X	X	Y	пусто
пусто	Y	пусто	X
Y	пусто	X	Y

т.е. мы найдем различия ~~алгоритма~~

каждый из них так как нам не важна

последовательность I и II ряда \Rightarrow каждый способ мы

исчисляем 2 раза, тогда ~~всего~~ всего способов $\frac{4 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3}{2} = 6$

~~6~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть рёбра - дороги, а вершины - деревни.
Заметим, что в графе нет циклов, иначе существовало бы несколько маршрутов из одной в другую вершину, при этом граф связан.

Рассмотрим подграф из вершин, степени которых 3, 4, 5, 7. Эти вершины связаны с какими-то

единичными вершинами и друг с другом, заметим, что

в этом подграфе должно быть ровно 3 ребра, т.к. весь граф связан и кроме них у остальных вершин ровно по 1 ребру \Rightarrow

не существует такого маршрута между какими-то 2-мя вершинами из нашего подграфа, на котором присутствует вершина степени 1, иначе у неё степень ≥ 2

и циклов в графе тоже нет \Rightarrow граф 3, 4, 5, 7 - дерево

\Rightarrow в нем 3 ребра \Rightarrow сумма ст. вершин, входящих на этот подграф = 6 \Rightarrow все остальные ребра

пойдут к ~~вершинам~~ с степенью 1 \Rightarrow их $= 3 + 4 + 5 + 7 - 6 = 13$
 \Rightarrow всего вершин = $13 + 4 = 17$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

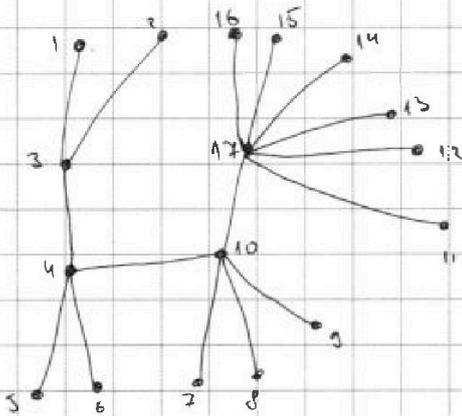
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: 4

Пример



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Т.к. } \sqrt{1 - |x+y-2|} \Rightarrow 1 - |x+y-2| \geq 0$$

$$-1 \leq x+y-2 \leq 1$$

$$1 \leq x+y \leq 3$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \\ x+y=3 \end{cases} \quad \text{т.к. } x, y - \text{целые}$$

$$1) \quad x+y=1$$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-1} = 1$$

$$2(x+y) - x^2 - y^2 = 1$$

$$2 - x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 = 1 - y^2$$

$$\Downarrow \\ x = \sqrt{1-y^2}$$

$$x+y=1$$

$$\sqrt{1-y^2} = 1-y$$

$$1-y^2 = 1-2y+y^2$$

$$2y^2-2y=0$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x=0; y=1) \\ (x=1; y=0) \end{cases}$$

$$2) \quad x+y=2$$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|0|} = 1$$

$$2(x+y) - x^2 - y^2 = 0$$

$$4 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{4-y^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x + y = 2$$

$$\sqrt{4 - y^2} = 2 - y$$

$$4 - y^2 = 4 - 4y + y^2$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} x = 2; y = 0 \\ x = 0; y = 2 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} x = 2; y = 0 \\ x = 0; y = 2 \end{array} \right)$$

3) $x + y = 3$

$$\sqrt{1 - (x+y-2)} = 0$$

$$\sqrt{2(x+y) - x^2 - y^2} = 1$$

$$6 - x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 = 5 - y^2$$

$$x = \sqrt{5 - y^2}$$

$$x + y = 3$$

$$\sqrt{5 - y^2} = 3 - y$$

$$5 - y^2 = 9 - 6y + y^2$$

$$2y^2 - 6y + 4 = 0$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$(y-1)(y-2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{l} x = 2; y = 1 \\ x = 1; y = 2 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{l} x = 2; y = 1 \\ x = 1; y = 2 \end{array} \right)$$

Ответ: (0;1), (1;0), (2;0)

(0;2), (2;1), (1;2)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА 3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

Пусть $a-b = x$

$$x(x+15) = 17p^5$$

либо $x:17$, либо $(x+15):17$

I) Если $x \div 17$

~~$$17(17+15) = 17p^5$$~~

1) $x \not\div p \Rightarrow x = 17$

$$17(17+15) = 17p^5$$

$$p = 2$$

$$a-b = 17$$

$$a+b = 40$$

$$2a = 57$$

$a \notin \mathbb{N}$ - противоречие $\Rightarrow x:p$

2) $x = 17k$, где k - степень p

$$17k(17k+15) = 17p^5$$

т.к. $k \neq 0 \Rightarrow 17k(17k+15) > 1 \Rightarrow 17k+15:p$

$$\left. \begin{array}{l} k:p \\ 17k+15:p \end{array} \right\} \Rightarrow 15:p$$

p - простое

$$\left[\begin{array}{l} p=3 \\ p=5 \end{array} \right]$$

~~$$17k(17k+15) = 17p^5$$~~
~~$$k(17k+15) = p^5$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $x \not\equiv 2 \Rightarrow a+b \equiv 40$

$$a+b \equiv 1$$

$$a+b = 40$$

$$a+b \equiv 0$$

$$a-b \equiv 1$$

$$2a \equiv 1 \text{ - противоречие}$$

$$x \not\equiv 17$$

$$x+15 \equiv 17$$

2) ~~xi~~ $x+15 \equiv 17$

x - какая-то степень p от 0 до 5

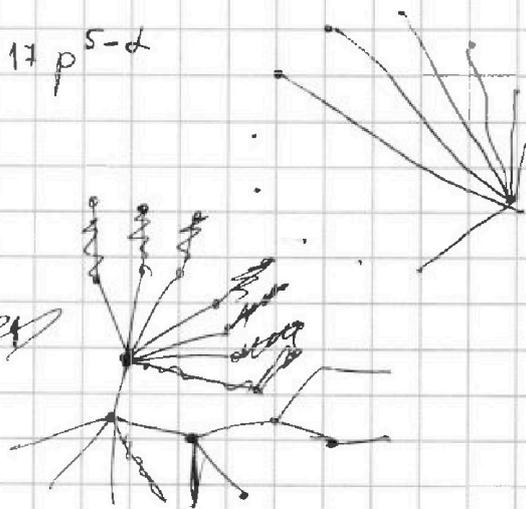
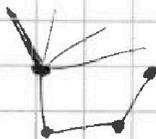
Пусть $x = p^d$

$$x+15 = 17p^{5-d}$$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} \leq 1$$

$$2x+2y-x^2-y^2 \leq 1$$

~~$$x(2-x) \leq 1$$~~





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$17 \overline{) x + 15}$$

$$x + 15 : 17$$

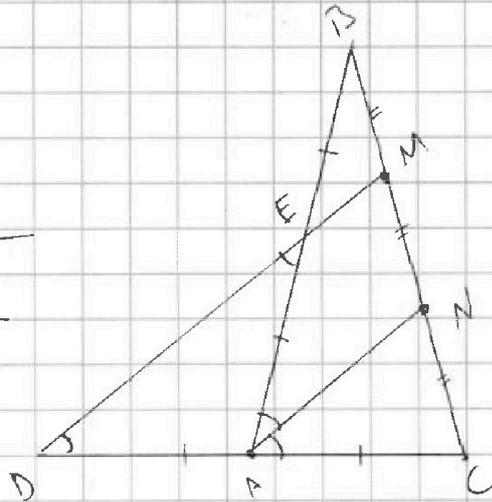
$$x \equiv 2 \pmod{17}$$

$$a - b \equiv 0 \pmod{2}$$

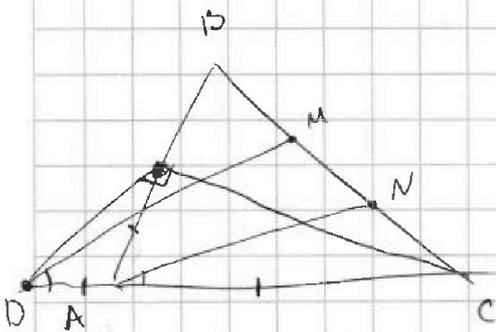
$$a - b$$

✗

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline 75 \\ + 15 \\ \hline 225 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 128 \\ \times 17 \\ \hline 156 \\ + 128 \\ \hline 2176 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 11 \\ 2176 \\ + 225 \\ \hline 2401 \end{array}$$

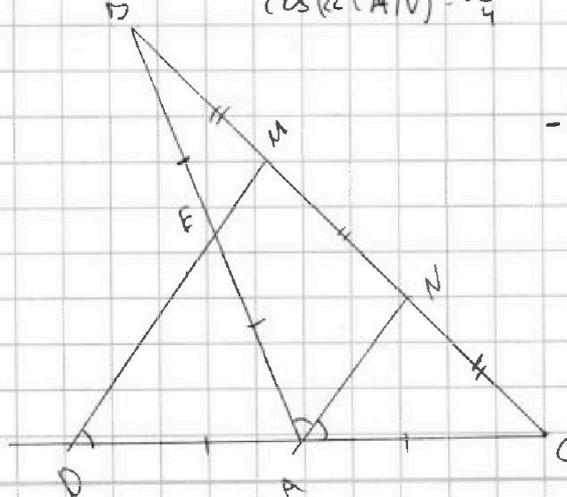
$$BC = 12$$

$$\cos(\angle CAN) = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 2401 & 7 \\ -21 & \\ \hline 30 & 343 \\ -28 & \\ \hline 2 & \\ -21 & \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 343 & 7 \\ -28 & \\ \hline 63 & 49 \\ -43 & \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$AE \cdot BC^2 = AC^2 + 4AC^2 = 4AC^2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0 \quad \text{Черновик}$$

$$D \geq 0$$

$$3 + 4 + 5 + 5 + 5 + 4 + 5$$

$$(2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) \geq 0$$

$$3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 3 + 8 + 20 = 31$$

$$12t^2 - 16t^2 + 16 \geq 0$$

$$-4t^2 + 16 \geq 0$$

~~2x~~

$$t^2 - 4 < 0$$

~~φ~~

$$t^2 < 4$$

~~a-b=2~~

$$t \in (-2; 2)$$

$$4t^2 - 4 > 0$$

$$17k \cdot (17k + 15) = 40^5$$

$$17 \quad 17k + 15 : p$$

$$t^2 - 1 > 0$$

$$a + b = 40$$

$$b = 40 - a$$

$$a + b = 40 \quad t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 - 15a - 15b = 17p^5$$

$$x(x+15) = 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5$$

$$17p(17)$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

$$17p + 15 = p^4$$

$$(2a-40)(2a-25)$$

$$(40-2a)(25+2a) = 17p^5$$

$$p = 2$$

$$a - b = 17$$

$$a - b + 15 = p^5$$

$$17 + 15 = 32$$