



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1
x - ?

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} - \text{седьмой член прогрессии,}$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} - \text{пятнадцатый член прогрессии}$$

$$5-x - \text{тринадцатый член прогрессии}$$

b - первый член прогрессии, q - её знаменатель.

~~Ограничения:~~

$$b \neq 0$$

$$q \neq 0$$

$$q \neq 1$$

$$q \neq -1$$

$$(13x-35)(x+1) \neq 0$$

$$x \neq -1$$

$$\begin{cases} bq^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ bq^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \\ bq^{12} = 5-x \end{cases}$$

$$q^8 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\Rightarrow q^8 = (x+1)^2$$

$$x \neq \frac{35}{13} \text{ (т.к. иначе } bq^6 = 0, \text{ но } b \neq 0, q \neq 0)$$

$$1) \quad q^4 = (x+1) \quad (x \neq -1)$$

$$q^2 = \sqrt{x+1}, \text{ т.к. } q^2 \geq 0 \quad (q^2 \neq -\sqrt{x+1})$$

$$\Rightarrow b \cdot \sqrt{x+1} \cdot (x+1) = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b(x+1) = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow (x+1)^3 \cdot \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3} = 5-x$$

$$\Rightarrow \sqrt{13x-35} = 5-x$$

$$\begin{cases} 13x-35 = 25-10x+x^2 \\ x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=3 \text{ (подходит по } \text{ограничениям})$$

$$\begin{aligned} x^2 - 23x + 60 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ x=3 \\ x \leq 5 \end{cases} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \log_4 = -x-1 \geq 0 \quad x \leq -1$$

$$-b(x+1)^3 = 5-x$$

$$b(x+1)^3 = x-5$$

$$q^2 = \sqrt{-x-1} \geq 0 \quad (q^2 \neq -\sqrt{-x-1})$$

$$b(\sqrt{-x-1})^3 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$-b(x+1) \cdot \sqrt{-x-1} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$-b(x+1) = \sqrt{\frac{35-13x}{(x+1)^4}}$$

$$-b = \frac{\sqrt{35-13x}}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{35-13x} = 5-x$$

$$\Rightarrow (\sqrt{35-13x})^2 = (5-x)^2$$

$$35-13x = 25-10x+x^2$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \\ x \leq 5 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -5$$

(подходит под условие)

Ответ:
-5; 3

~~при x = 3!~~

при $x = 3!$

$$b q^6 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = 2$$

$$b q^{12} = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{32}$$

$$b q^{14} = 4$$

при $x = -5$

$$b q^6 = \frac{5}{4}$$

$$b q^{12} = 10$$

$$b q^{14} = 20 \Rightarrow b = \frac{5}{32}$$

$$\Rightarrow q^2 = 2 \Rightarrow q^6 = 8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☒☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
10 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \quad (2) \end{array} \right.$$

$$x+z \leq 4$$

$$\Rightarrow x^2 \leq x+y+z \leq 4+y$$

$$\Rightarrow y \geq x^2 - 4$$

$$\Rightarrow x+y-x^2+z \geq x+z-4$$

$$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{x+y+z-x^2} + \sqrt{4-(x+z)}$$

$$(2) \quad 1. \quad y+1+3y-36 = \sqrt{169-z^2}$$
$$4y-35 = \sqrt{169-z^2}$$
$$y \geq \frac{35}{4}$$

ОДЗ:

$$z^2 \leq 169$$

$$x \geq -3$$

$$x+z \leq 4$$

$$x+y+z \geq x^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3

$p = ?$

} ≥ 1 решение

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$$t = \cos x \in [-1; 1]$$

$$\Rightarrow p = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

Рассмотрим $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$, $t \in [-1; 1]$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(4t^2 + 4t + 1) = 3(2t + 1)^2$$

$$f'(t) = 3(2t + 1)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow f(t)$ ~~отрадно~~ ~~на~~ монотонно возрастает на $(-\infty; -\frac{1}{2})$ и монотонно возрастает на $(-\frac{1}{2}; +\infty)$

$t \in [-1; 1] \Rightarrow$ своё минимальное значение ^{на $[-1; 1]$} она принимает в $t = -1$: $f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$

т.к. $f(t)$ - монотонно ^{на $[-1; 1]$} возрастающая функция, то своё максимальное значение она принимает в $t = 1$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$\Rightarrow f(t) \in [-4; 10] \Rightarrow \forall y \in [-4; 10] \exists t \in [-1; 1] : f(t) = y$$

$\Rightarrow$ для каждого значения из $[-4; 10]$ $\exists$ единственный $\cos x \Rightarrow$ ~~тогда~~ $\exists \geq 1$ решение относительно x , т.к. $\cos x \in [-1; 1]$ и принимает все свои значения на данной промежутке $p = f(t) \in [-4; 10]$

при $p = -4$ $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

при $p = 10$ $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
43 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3 (продолжение)

при $p \in (-4; 10)$ $\cos x \in (-1; 1)$ и $\cos x$ удовлетворяет уравнению $u \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$

$\cos x = a \in (-1; 1)$ и a удовлетворяет $4a^3 + 6a^2 + 3a - 3 = p$

$x = \pm \arccos(a) + 2\pi m; m \in \mathbb{Z}$

$\uparrow$ $p \in (-4; 10)$

a - корень, т.к.

$4a^3 + 6a^2 + 3a - 3 = p$ - верно

при $p \in (-\infty; -4) \cup (10; +\infty)$ решений нет, $\cos x$

т.к. при данных p $\cos x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Ответ: $(p = -4, x = \pi + 2\pi n); (p = 10, x = 2\pi k);$

$(p \in (-4; 10); x = \pm \arccos(a) + 2\pi m)$, где a - корень уравнения $4a^3 + 6a^2 + 3a - 3 = p$, $k, n, m \in \mathbb{Z}$



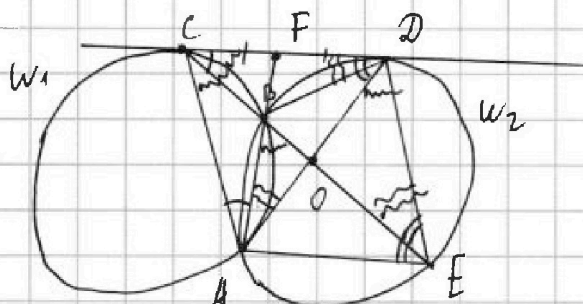
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4



$$\frac{ED}{CD} = ?$$

$$AD \perp CE = 0$$

$$\frac{CO}{OE} = \frac{3}{10}$$

Решим:

Пусть $AB \cap CD = F$. AB — радиальная ось W_1 и

W_2 , т.к. проходит через 2 точки пересечения окружностей. $F \in AB \Rightarrow F \in \text{ради. оси } W_1 \text{ и } W_2$

$$\Rightarrow \text{power}(W_1) = \text{power}(W_2)$$

$$\Rightarrow CF^2 = FD^2 \Rightarrow CF = FD \quad (CF > 0, FD > 0)$$

$$\angle CAB = \angle DCB \quad (\text{углы к/у касательной к окруж. } W_1)$$

$$\angle CDA = \angle AED \quad (\text{углы к/у касательной } CD \text{ и хорды } AD \text{ к } W_2)$$

$$\angle ADE = \angle ABE \quad (\text{внешние}) \Rightarrow \angle ACE = 180^\circ - \angle CAB - (180^\circ - \angle ABE) = \angle ABE - \angle CAB = \angle ADE - \angle CAB$$

$$\Rightarrow \angle AED = \angle ADE - \angle CAB + \angle CAB = \angle ADE$$

$$\Rightarrow \triangle DCA \sim \triangle EDA \quad (\angle AED = \angle CDA, \angle DCA = \angle ADE)$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{ED} = \frac{CA}{DA} = \frac{DA}{EA}, \quad \frac{CO}{\sin \angle CDA} = \frac{CD}{\sin \angle COD} \quad (\text{т.к. углы } \angle COD \text{ и } \angle CDA \text{ в } \triangle COD)$$

$$\frac{OE}{\sin \angle ODE} = \frac{DE}{\sin \angle DOE} = \frac{DE}{\sin \angle COD} \Rightarrow \frac{CO}{OE} \cdot \frac{\sin \angle ODE}{\sin \angle COD} = \frac{CD}{DE}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{3}{10} \cdot \frac{\sin \angle ODE}{\sin \angle COD} \cdot \frac{AE}{\sin \angle ADE} = \frac{AD}{\sin \angle ADE} \cdot \frac{AE}{\sin \angle COD}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{DA} = \frac{\sin \angle ADE}{\sin \angle CDA} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{3}{10} \cdot \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \sqrt{\frac{3}{10}}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{3}{10}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

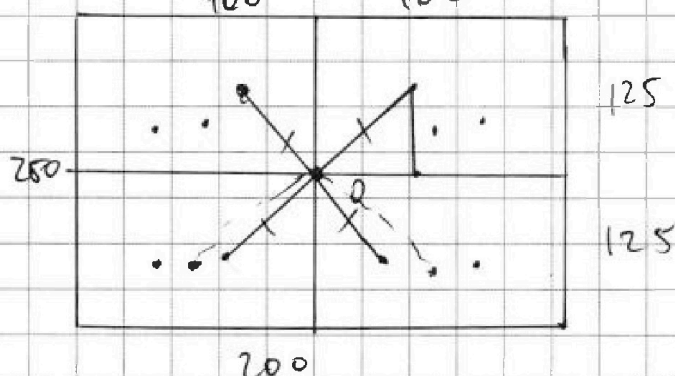
СТРАНИЦА
11 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Рассмотрим случаи, когда выполняется симметрия относительно средней линии:

$$\frac{C_{25000}^4 + C_{25000}^4}{2} = C_{25000}^4 = 25000! / (24996! \cdot 4!)$$

2) Симметрия относительно центра (т.к. 2 раза пометили каждый угол (относительно центра))



Пусть выбранная какая-то одна точка, (вертикаль правая или левая, или точка в центре) тогда рассмотрим сколько точек симметричны ей можно выбрать от центра: $p(0, A) = x^2 + y^2$

0 - центр прямоугольника, A - точка.

Заметим, что каждая раскраска относительно средней линии подходит под раскраску относительно центра

=> Если подходит какое-то другое решение относительно центра, то оно же подходит под раскраску



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 6 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N6$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$(a, b, c) - ?$$

$$a > b$$

$$(a-b) \nmid 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2, \quad p - \text{простое}$$

$$a + b^2 = 560$$

$$2) \quad (a-c) = p$$

$$(b-c) = p$$

$$\Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b, \text{ но } a > b$$

$$3) \quad (a-c) = -p \Rightarrow a = b, \text{ но } a > b$$

$$(b-c) = -p$$

$$4) \quad (a-c) = p^2 \Rightarrow c = a - p^2$$

$$(b-c) = 1$$

$$\Rightarrow a - b = p^2 - 1$$

$$a + b^2 = 560$$

$$(a-b) \nmid 3$$

$$\textcircled{1} \quad p^2 \nmid 3 \Rightarrow p = 3 \quad (p - \text{простое})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 8 \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2 + b = 552$$

$$b^2 + b - 552 = 0$$

$$b(b+1) = 8 \cdot 3 \cdot 23$$

$$b = 1 + 2758 = 2759$$

$$b = 23$$

$$\text{Если } b < 23 \Rightarrow \frac{1}{23} > \frac{1}{23} \Rightarrow \frac{8 \cdot 3 \cdot 23}{b} > 24$$

$$a = 31$$

$$\Rightarrow \boxed{b \geq 23} \quad b \nmid N$$

$$\Rightarrow b+1 \geq 24$$

$\Rightarrow$ из данного случая выходит

$$\begin{cases} a = 31 \\ b = 23 \\ c = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -16 \\ b = -24 \\ c = -25 \end{cases}$$

$$1) \quad (a-c) = 1$$

$$(b-c) = p^2$$

$$\Rightarrow b - a = p^2 - 1$$

$$a + b^2 = 560$$

$$\rightarrow a = 1 + c$$

$$b = c + p^2$$

$$\Rightarrow b^2 + b = 559 + p^2$$

$$(b + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 559 + p^2$$

$$(2b+1)^2 = 4p^2 + 2237$$

$$a > b \Rightarrow c+1 > c+p^2$$

$$\Rightarrow p^2 < 1, \text{ но}$$

$$p - \text{простое}$$

$$p \geq 2$$

$$\Rightarrow p^2 \geq 4$$

$$5) \quad (a-c) = -p^2$$

$$(b-c) = -1$$

$$\Rightarrow a = c - p^2$$

$$b = c - 1$$

$$\Rightarrow a > b$$

$$\Rightarrow p^2 > 1$$

$$\Rightarrow p^2 \geq 4$$

$$\text{но } p \geq 2$$

$$\Rightarrow p^2 \geq 4$$

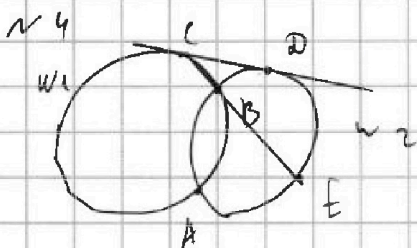


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AO}{OA} \cdot \frac{AB}{BA} = 2$$

$$\frac{1}{BO} = CO \left(\frac{13}{3} - \frac{1}{BO^2} \right)$$

$$\frac{2}{BO} + \frac{CO - BO}{BO^2} = \frac{13}{3} CO$$

$$\frac{1}{BO} + \frac{CO}{BO^2} = \frac{13}{3} CO$$

$$\frac{CO}{BO} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CB}{BO} = \frac{AO}{AO} = 1$$

$$\frac{BF}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \beta}$$

$$\frac{BF}{\sin \beta} = \frac{BO}{\sin \alpha}$$

$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CB}{BO} \cdot \frac{AO}{AO} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{AO} = \frac{BO}{BO}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{BO}{\sin \beta}$$

$$\frac{AO}{OA} \cdot \frac{AB}{BN} \cdot \frac{NC}{CO} = 1$$

$$\frac{AO}{AO} = \frac{BO}{BO}$$

$$\frac{AO}{OA} \cdot \frac{AB}{BN} = 2$$

$$2 \frac{BN}{AB} = \frac{BC}{BO}$$

$$CB \cdot CE = CO^2$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{OA} = \frac{AB}{BN} \cdot \frac{1}{2} = \frac{BO}{CB}$$

$$NB \cdot NA = \frac{CO^2}{4}$$

$$\frac{1}{NB} = \frac{2BO \cdot AB}{CB}$$

$$NB \cdot NA = \frac{CB \cdot CE}{4}$$

$$\frac{CO}{\sin \alpha} = \frac{CE}{\sin \beta}$$

$$\frac{NA}{AB \cdot BO} = \frac{CE}{2}$$

$$\frac{CO}{\sin \alpha} = \frac{CE}{\sin \beta} = \frac{BO}{AB \cdot 2BO}$$

$$CE = CO + OE = CO + \frac{10}{3} CO = \frac{13}{3} CO$$

$$\frac{AB + BN}{AB \cdot BO} = \frac{CE}{2}$$

$$\frac{1}{BO} \left(1 + \frac{BC}{2BO} \right) = \frac{CE}{2}$$

$$\frac{1}{BO} + \frac{BC}{2BO^2} = \frac{13CO}{3 \cdot 2}$$

$$\frac{2}{BO} + \frac{BC}{BO^2} = \frac{13}{3} CO$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
7 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Продолжим

$$4) \begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases}$$

$$p^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

Если $p \equiv 1 \pmod{3}$, то

$$p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$\Rightarrow$ не подходит

Если $p \equiv 2 \pmod{3}$

$$\Rightarrow p^2 \equiv 4 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p^2 \equiv 2 \pmod{3} \text{ не имеет}$$

$$6) \begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -p^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = p^2 - 1 \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p^2 \equiv 2 \pmod{3} \\ p^2 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{можно } p^2 \not\equiv 2 \pmod{3} \begin{cases} p \equiv 1 \\ p \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 \equiv 1 \\ p^2 \equiv 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p^2 \not\equiv 3 \Rightarrow p = 3 \text{ (p-простое)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -9 \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \quad \begin{cases} a - b = p^2 = 9 \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p^2 + b^2 = 561 - p^2 = 561 - 9 = 552$$

$$b(b+1) = 552 = 24 \cdot 23$$

$$\text{Если } b > 23 \Rightarrow b+1 > 24$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} b = 23 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 23 \cdot 24$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 24 \cdot 23. \text{ Если } b < -24, b+1 < -23 \Rightarrow -42 \leq b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
8 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \text{Если } 0 < b < 23 \Rightarrow b+1 < 24$$

$$\Rightarrow b(b+1) < 23 \cdot 24$$

$$\Rightarrow b > 23$$

$$\text{Если } b > 23 \Rightarrow b+1 > 24$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 23 \cdot 24 \Rightarrow \text{противоположно}$$

$$\Rightarrow b \leq 23$$

$$\Rightarrow b = 23 \quad (\text{Если } b > 0)$$

$$b(b+1) = 24 \cdot 23$$

$$\text{Если } \cancel{b} < 0 \Rightarrow -24 < b+1 < -1$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 23 \cdot 24$$

$$(b \neq 0)$$

$$\Rightarrow b \leq -24$$

$$\text{Если } b < -24 \Rightarrow b+1 < -23$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 24 \cdot 23 \Rightarrow \text{противоположно}$$

$$\Rightarrow b \geq -24$$

$$\Rightarrow -24 \leq b \leq -24 \Rightarrow b = -24$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 23 \\ b = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 31 \\ b = 23 \\ c = 32 \\ b = -24 \\ a = -16 \\ c = -15 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Всего 4 случая

$$(31; 23; 22); (-16; -24; -25)$$

$$(31; 23; 32); (-16; -24; -15)$$

$$\text{Ответ: } (31; 23; 22); (-16; -24; -25); (31; 23; 32); (-16; -24; -15)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

9 из 14

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7

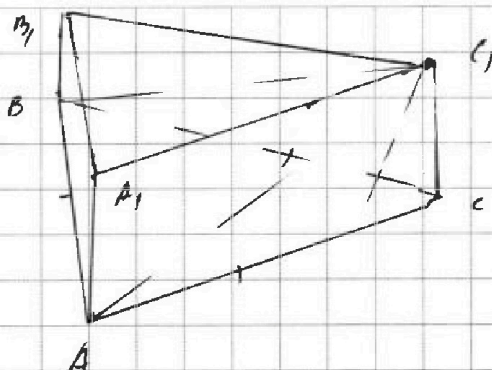
$$AB = BC = AC = 1$$

$$S_{\triangle A_1 C_1 C} = 4$$

$$S_{\triangle B A_1 A_1} = 4$$

$$S_{\triangle B A_1 B_1} = 3$$

h-?





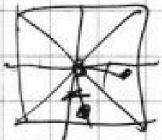
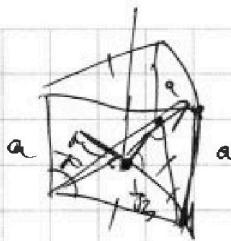
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

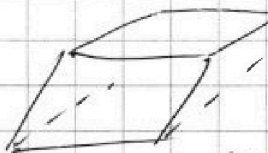
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7

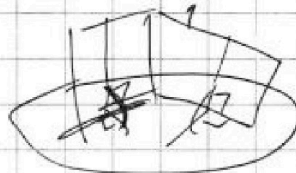
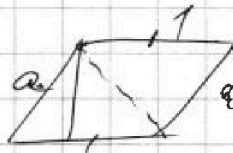


$$\begin{aligned} a \cdot \sin \alpha &= 4 \\ a \sin \beta &= 4 \\ a \sin \gamma &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin \alpha &= \sin \beta = 4/a \\ \sin \gamma &= \frac{3}{4} \sin \beta \end{aligned}$$



$$\Rightarrow h_1, h_2 \approx \frac{4}{a}$$

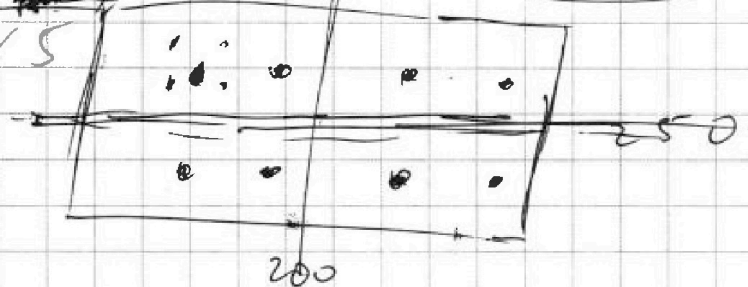


$$\begin{aligned} ah_1 &= 4 \\ ah_2 &= 4 \\ ah_3 &= 3 \end{aligned}$$

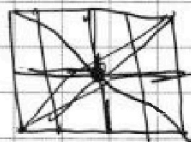
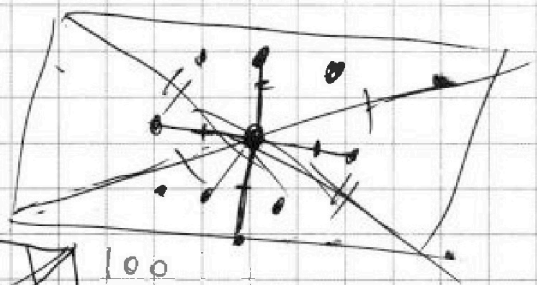
$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 4^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$



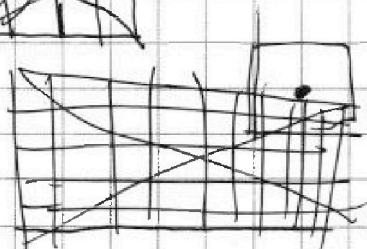
N 5



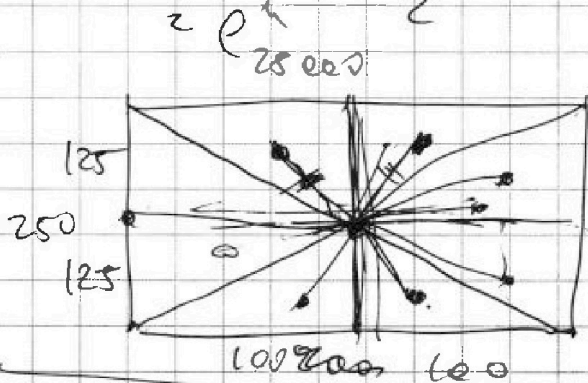
$$\begin{aligned} &25000 \\ &C_4^{25000} + C_4^{25000} \\ &= 2 \cdot C_4^{25000} \end{aligned}$$



100



25



125
250
125

100 200 100

$$\begin{aligned} &50000 \cdot 4 \\ &+ 49998 \cdot 4 \\ &+ 49996 \cdot 4 \\ &+ 49994 \cdot 4 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} b q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ b q^{12} = 5-x \\ b q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow b q^6 = \frac{5}{4} \\ & b q^{12} = 10 \\ & b q^{14} = 20 \end{aligned}$$

$$q^2 = 10 \Rightarrow q^6 = 1000$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$(3^2 - (20+3))^2 = 400 + 120 + 9 = 529$$

$$529 - 240 = 289 = 17^2$$

$$\begin{cases} q^6 = \frac{5-x \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{13x-35}} = (5-x)(x+1) \cdot \sqrt{\frac{x+1}{13x-35}} \\ q^8 = (x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{(x+1)^2}{(5-x)(x+1)} \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}} = \frac{(x+1) \cdot \sqrt{13x-35}}{5-x \sqrt{x+1}}$$

$$(x+1)^2 = \frac{(x+1)^8}{(5-x)^3} \cdot \frac{(13x-35)}{(x+1)} \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}}$$

$$\Rightarrow (5-x)^3 = (13x-35) \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}}$$

$$(5-x) \cdot q^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^6 = 5-x$$

$$q^8 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$q^8 = \sqrt{\frac{(13x-35)(x+1) \cdot (x+1)^3}{(x+1)^3}} = (x+1)^2$$

$$\begin{cases} q^4 = x+1 \\ q^4 = -x-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q^2 = \sqrt{x+1} \quad (1) \\ q^2 = \sqrt{-x-1} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad b \cdot (\sqrt{x+1})^3 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3}$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (\sqrt{x+1})^6 = \sqrt{13x-35}$$

$$= 5-x$$