



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ предложения 2

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \text{ или } x=18 \\ x>6 \\ x=0 \text{ или } x=-31 \\ x<\frac{1}{25} \end{cases}$$

||

$$x=18 \text{ или } x=-31, \text{ или } x=0.$$

Проверка:

$$x=18 \quad az = \sqrt{(25 \cdot 18 - 9)(12)} = \sqrt{(50 \cdot 9 - 9)12} = \sqrt{9 \cdot 49 \cdot 12} = 2 \cdot 42\sqrt{3}$$

$$ay = 21$$

$$a_{15} = \sqrt{\frac{9 \cdot 49}{12^3}} = \frac{21}{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{7}{8\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

$$\text{Тогда } d = \frac{21}{42\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow 21 \cdot \frac{1}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{2\sqrt{3}}{24}$$

Если $x=18$ подходит.

$$7\sqrt{3} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} = 21 \cdot 24$$

↓

Если $x=0$, то

$$14 \cdot 3 \cdot 12 = 21 \cdot 24$$

↓

$$az = \sqrt{(-9)(-6)} = 3\sqrt{6}$$

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$$

правда!

$$ay = 3$$

$$a_{15} = \sqrt{\frac{-9}{(-6)^3}} = \sqrt{\frac{3^2}{3^3 \cdot 2^3}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\text{Тогда } d = \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{3}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} - \text{Правда} \Rightarrow x=0$$

подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и продолжим

При $x = -31$

$$a_7 = \sqrt{(-31 \cdot 25 - 9)(-37)} \quad a_9 =$$
$$= \sqrt{766 \cdot 37}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times 25 \\ \hline 155 \\ 62 \\ \hline 775 \\ - 9 \\ \hline 766 \end{array}$$

$$a_9 = -28.$$

Но поскольку это геометрическая прогрессия, то пусть

ее знаменатель $\left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right) = q$.

Если $\frac{a_9}{a_7} = q^2$ тогда $a_9 = a_7 q^2$, но $a_7 > 0 \Rightarrow a_7 \cdot q^2 > 0$

Если $a_9 > 0$, но $a_9 < 0$ W. Значит $x = -31$ не подходит.

Ответ: $x = 0$ или $x = 18$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Черновик~~

N 1

Пусть прогрессия - а. $(a_1, a_2, \dots)$

Пусть отношение элементов с номерами 9 и 7 - d.

Тогда в этой геом. прогрессии

$$a_7 \cdot d = a_9, \quad a_9 \cdot d^3 = a_{15}$$

$$a_7 \cdot d = a_9 \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot d = x+3$$

$$a_9 \cdot d^3 = a_{15} (x+3) d^3 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

Запишем это равенство

$$\Rightarrow \cancel{x-6 \geq 0} \text{ или } x-6 \neq 0$$

$$d = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$$

$$\text{или } 25x-9=0$$

Тогда:

$$(x+3) \frac{(x+3)^3}{(25x-9)(x-6) \sqrt{(25x-9)(x-6)}} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$\text{или } 25x-9=0$$

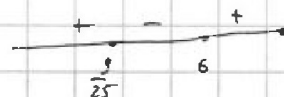
$$\frac{(x+3)^4}{(25x-9)^2} = 1$$

$$(25x-9)(x-6) > 0$$

$$\cancel{25x-9 \geq 0, x-6 \geq 0}$$

Тогда

$$\cancel{x \geq \frac{9}{25} \text{ и } x \geq 6}$$



$$\text{или } 25x-9=0$$

$$\text{Получаем: } \begin{cases} (x+3)^4 = (25x-9)^2, \text{ или } x < \frac{9}{25} \text{ или } x > 6 \\ x = \frac{9}{25} \end{cases}$$

Если $x > 6$, то $(x+3)^4 > x^4 \geq 36x > 25x-9 \Rightarrow$ решений нет.

Получаем: $\begin{cases} (x+3)^4 = 25x-9 \\ x < \frac{9}{25} \\ x = \frac{9}{25} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5 продолжение

Но если $x < \frac{9}{25}$, то $25x - 9 < 0$, а $(x+3)^4 > 0 \Rightarrow$ решений нет.
Остаётся лишь $x = \frac{9}{25}$

Тогда $a_7 = \sqrt{(25x-9)(4-6)} = 0$

$a_8 = \frac{9}{25} + 3 = 3\frac{9}{25}$

$a_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-9)^3}} = 0$

Такой ~~аппарат~~ ком. прогрессии не может быть, т.к. если нулевая и ненулевая члены, $0 \cdot d \neq 3\frac{9}{25}$.

Получаем ур-е:

$$\begin{cases} (x+3)^4 = (25x-9)^2 \\ x < \frac{9}{25} \\ x > 6 \\ x = \frac{9}{25} \end{cases}$$

Если $x = \frac{9}{25}$, то $a_7 = 0$, $a_8 > 0$,
значит такого не может быть,
т.к. тогда $0 \cdot d \neq 0$.

Значит x не может быть
равен $\frac{9}{25}$

$$\begin{cases} (x+3)^2 = 25x-9 \\ x > 6 \\ (x+3)^2 = -25x+9 \\ x < \frac{9}{25} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 19x + 18 = 0 \\ x > 6 \\ x^2 + 31x = 0 \\ x < \frac{9}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-18) = 0 \\ x > 6 \\ x(x+31) = 0 \\ x < \frac{9}{25} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

НЧ продолжение 2

$$\frac{S_{DCK}}{S_{PKE}} = \frac{2}{5} = \frac{CD \cdot DK \cdot \sin \angle CDA}{2} : \frac{ED \cdot DK \cdot \sin \angle KDE}{2} =$$

$$= \frac{CD}{ED} \cdot \frac{\sin \angle CDA}{\sin \angle EDA} = \frac{2}{5}$$



тогда $\frac{ED}{CD} = \frac{CD}{ED} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sin \angle EDA}{\sin \angle CDA}$

тогда $\frac{\sin \angle EDA}{\sin \angle CDA} = \frac{\sin (180^\circ - \alpha - \beta)}{\sin \alpha}$

$$\angle CDA = \angle AED$$

тогда

$$\angle ADE = \angle ABE = \angle CBP = 180^\circ - \alpha - \beta, \quad \angle EBD = \beta \Rightarrow \angle PBD = \alpha$$

$$S_{CBP} = S_{DBP} \Rightarrow \frac{CB \cdot BP \cdot \sin (180^\circ - \alpha - \beta)}{2} = \frac{DB \cdot PB \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$\Downarrow \quad \frac{\sin \angle EDA}{\sin \angle CDA} = \frac{DB}{CB}$$

$$\frac{\sin \angle EDA}{\sin \angle CDA} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AD} \text{ из продолжения } \angle ADE, \angle ADE = \angle EDA, \angle CDA = \angle AED$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

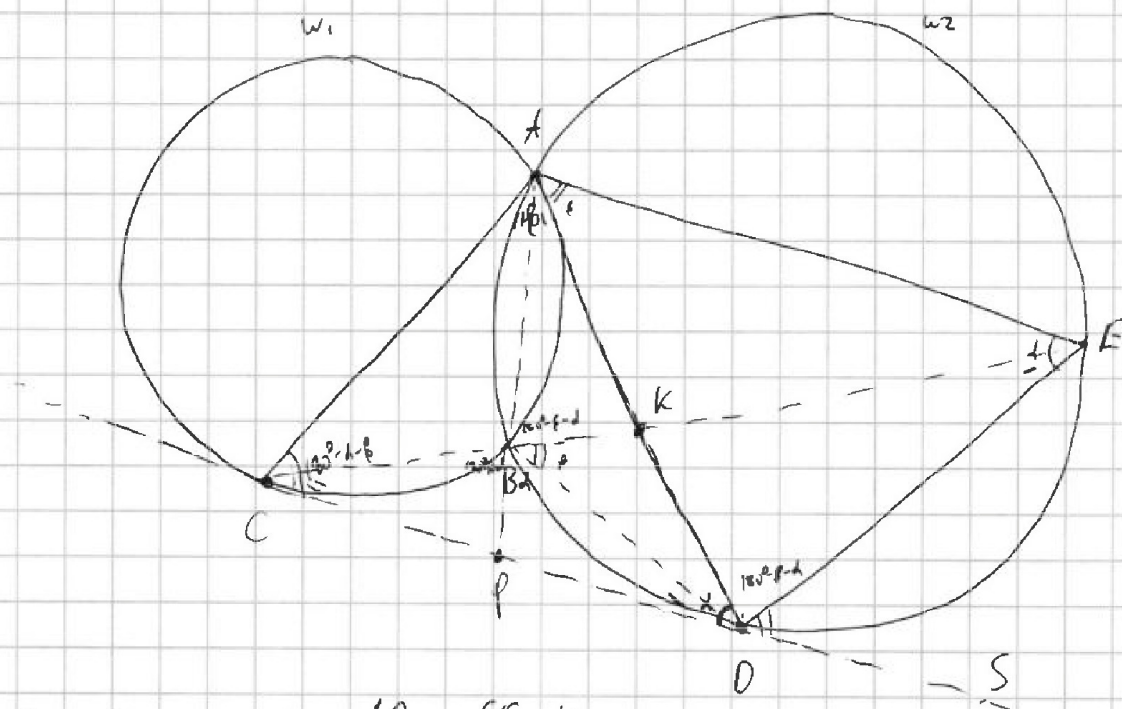
СТРАНИЦА
 1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано: ω_1, ω_2 пересек. в A и B , CD - общ. кас. C кас. к ω_1 , D - к ω_2 ,
 вдали к CD , к A .

CB пересек. ω_2 вторично в E

$$\frac{ED}{CD} = ?$$



Пусть γ - пересечение AD и CE - K

Тогда $\frac{CK}{KE} = \frac{2}{5}$

Тогда $\angle ABD = 180^\circ - \alpha$ извлеченности $ABDE$

Тогда $\angle ABE = 180^\circ - \alpha - \beta = \angle ADE$

$\angle CDA = \angle DEA$ (углы между кас. и хордой)

Пусть $\angle CDA = \alpha$, $\angle DEA = \alpha$

Пусть $\angle EBD = \beta$, тогда $\angle BAE = \beta$ (опр. по 1933)

$\angle EPS = \angle BAE$, так углы между кас. и хордой,

S - точка за D на луче CD .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим степени точки.

$$C, W_2 - CD^2 = CB \cdot CE$$

$$K, W_2 - AK \cdot KD = BK \cdot KE$$

Пусть $EK = 5x$.

$$\text{Тогда } CK = 2x$$

$$CE = 7x.$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} CB \cdot 7x = CD^2 \\ AK \cdot KD = BK \cdot 5x \end{cases}$$

Точки $\triangle AKB$ и $\triangle EKD$ подобны (используем засн в окружн)

Также подобны $\triangle AKE$ и $\triangle BKD$

$$\text{Тогда } \frac{AB}{ED} = \frac{AK}{EK} = \frac{AK}{5x} = \frac{BK}{DK}$$

$$\frac{AE}{BD} = \frac{KE}{KD} = \frac{5x}{KD}$$

$$ED = \frac{5x \cdot AB}{AK} = \frac{AB \cdot DK}{BK \cdot BK}$$

Прямая AB го пересек. с CD в т. P AB - касательная к окружности

$$CP^2 = DP^2 = PB \cdot PA$$

и продолжение

$$\begin{aligned} \text{Тогда } CD^2 &= CB \cdot CE = \\ &= (2CP)^2 = 4CP^2 = 4PB \cdot PA \end{aligned}$$

$$CB \cdot CE = 4PB \cdot PA$$

$$\begin{aligned} \text{Так } S_{ACP} &= S_{ADP} \Rightarrow S_{ABC} = S_{ABD} \\ \text{Тогда } S_{ABC} &= S_{ABD} \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } S_{ABDE} = S_{ABD}$$

$$\frac{CD^2}{ED^2} = \frac{CB \cdot CE}{ED^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NY

$$\frac{CD}{ED} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sin \angle EPA}{\sin \angle CPA} = \frac{2 DB}{5 CB} = \frac{2 AE}{5 AD} =$$

$$= \frac{2}{5} \sin \frac{2}{5} \frac{\sin d \cdot 180^\circ - \alpha - \beta}{\sin d} = \frac{2}{5} \frac{\sin d \cdot \beta}{\sin d}$$

$$\angle ACP = 180^\circ - \beta - d \quad (\text{угол между кас. и хорд.})$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{AED}} = \frac{2}{5} = \frac{AC \cdot CD \cdot \sin(d + \beta)}{AE \cdot ED \cdot \sin d} = \frac{AC}{AE} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{(\sin(d + \beta))^2}{(\sin d)^2}$$

$$\text{Тогда } \frac{AC}{AE} = \frac{(\sin d)^2}{\sin^2(d + \beta)}$$

$$\angle CAK = 360^\circ =$$

$$= 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) - \alpha =$$

$$= \beta$$

$$\frac{S_{ACK}}{S_{AEK}} = \frac{AC \cdot \sin \angle AK}{AE \cdot \sin \beta} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Тогда } \frac{AC}{AE} = \frac{2}{5} = \frac{(\sin d)^2}{(\sin(d + \beta))^2}$$

Тогда AD - биссектриса.

$$\text{Тогда } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Тогда } \frac{CD}{ED} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sin d + \beta}{\sin d} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Order: } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

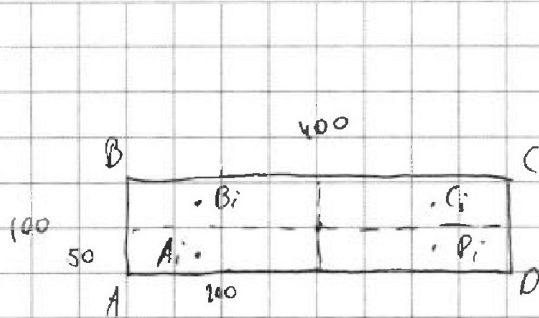


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $n/4 = ABCD$,

$$AB = 100$$

Рассмотрим ~~точки~~ ^{клетки} A_i, B_i, C_i, D_i такие, что

A_i симметрично B_i относительно ср. линии, $B_i - C_i$, $C_i - D_i$ и $D_i - A_i$. Тогда B_i сим. D_i и A_i сим. C_i

относительно центра. Пусть A_i лежит в длине всего к A , B_i к B и т.д.

Заметим, что среди A_i, B_i, C_i, D_i закрашено может быть либо 0, либо 2, либо 4. Замечание - будет симметрично. ~~тогда~~, ч. будет симметрично относительно

~~всех~~ 3 и 1 не могут быть, т.к. тогда для одной клетки не будет закрашен симметричной.

Тогда рассмотрим все такие ч-ки ~~тогда~~ клеток A_i, B_i, C_i, D_i ,

что хотя бы одна закрашена. Таких ч-ок либо

2, либо 3, либо 4. (т.к. всего закр. клеток - 8). Тогда количество

способов выбрать 2 или 3 ч-ки и закрасить 1 или суммарно

8 клеток - и будет ответ 6 задач.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по представлению 2

Что получаем:

$$\frac{10000 \cdot 9999}{2} + 10000 \cdot 9999 \cdot 9998 \cdot 9997 \cdot 2 + 10000 \cdot 9999 \cdot 9998 \cdot 6 =$$

$$= 99990000 \left(\frac{1}{2} + 9998 \right) =$$

$$= 99990000 \left(\frac{1}{2} + 199900012 + 60000 - 12 \right) =$$

$$= 99990000 (199960000,5)$$

9999

$$\begin{array}{r} 9998 \\ \times 9998 \\ \hline 8 \end{array} =$$

$$= (10000 - 2) \cdot 6 =$$

$$\begin{array}{r} 9998 \\ \times 9997 \\ \hline \end{array} = 60000 - 12$$

$$\text{Order: } 99990000 \cdot (199960000,5)$$

$$= (10000 - 2)(10000 - 3) =$$

$$= 10^8 - 5 \cdot 10^4 + 6$$

$$\begin{array}{r} 200000000 \\ - 100000 \\ \hline 199900000 \end{array}$$

~~199900000~~

199900012



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ИЗ продолжение.

Если ~~4-к~~ 2 ч-ки 2, то там закрасили все
клетки $\Rightarrow$ таких вариантов $C_{50 \cdot 200}^2 =$

$$= 50 \cdot \frac{10000 \cdot 9999}{2}$$

, т.к. А: можно выбрать

из 50 · 200 клеток, а остальные клетки однозначно
задаются.

Если ч-к - 4, то в ~~каждой из к~~ в первой из
них мы можем закрасить 2 клетки как точки - 6 способами,
а в остальных - по воображаемой симметрии - 2 способами.

(например, если мы закрасили A_i и D_i , то можем
красить только A_i и D_i или B_i и C_i)

$$\text{Всего} - C_{10000}^4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10000 \cdot 9999 \cdot 9998 \cdot 9997 \cdot 2$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$$

Если их 3, то сначала мы должны 3-мя способами выбрать
точку, которую покрасим целиком, а потом опять 6 · 2 как

$$\text{и в прошлом варианте. Получаем. } C_{10000}^3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 10000 \cdot 9999 \cdot 9998 \cdot 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

и 6

$a < b$, $b - a \not\equiv 3$ $(a-c)(b-c) = p^2$ p -простое

$a^2 + b = 710$

~~26, 25, 34~~

$b = 710 - a^2$

$710 - a^2 - a \not\equiv 3$

~~Заметим, что если $a > 0$, то также не может быть~~

~~т.к. если $a \leq 26$, то $a^2 \leq 676 \Rightarrow b > 26$~~

Заметим, что a и b дают разные остатки при дел. на 3 (иначе $b - a \equiv 3$). Тогда $a - c$ и $b - c$ тоже.

Это либо 0 и 1, 0 и 2 или 1 и 2.

Но 1 и 2 не может быть, т.к. тогда $(a-c)(b-c) \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2 \pmod{3}$

но p^2 не сравнимо с 2 по модулю 3 (т.к. $0^2 \equiv 0, 1^2 \equiv 1, 2^2 \equiv 1 \pmod{3}$)

Тогда это 0 и 1 или 0 и 2.

Но тогда $p^2 = (a-c)(b-c) \equiv 3$. Поскольку $p^2 \equiv 3$ и p простое, то $p = 3$ (иначе $p \equiv 3$ и $p \neq 3$ и p простое)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 продолжение

Тогда получаем, что

$$(a-c)(b-c) = 9$$

$a-c < b-c$ и все числа целые.

Тогда получаем варианты:

$$a-c = -9 \quad b-c = -1$$

$$a-c = 1 \quad b-c = 9 \quad (-3 \text{ и } -3, 3 \text{ и } 3 \text{ не годя, т.к. } b-c > a-c)$$

Если $a-c=1$, $b-c=9$.

Тогда

$$\begin{cases} a-c=1 \\ 710-a^2-c=9 \end{cases}$$

$$c = a-1$$

⇓

$$\begin{cases} 710-a^2-(a-1)=9 \Rightarrow a^2+a = 710+1-9 \end{cases}$$

$$a(a+1) = 702$$

⇓

Если $a=26$, то $c=25$, $b=34$.

$$a^2+a-702=0$$

$$78 \cdot 9$$

Если $a=-27$, то $c=-28$, $b=-19$ $(a-26)(a+27)=0$

⇓

$$a=26 \text{ или } a=-27.$$

Проверки: $34 > 26$, $34-26=8 \nmid 3$, $26^2+34=710$, $(26-25)(34-25)=3^2$

$$-19 > -27, -19-(-27)=8 \nmid 3, 27^2-19=710, (-27-(-28)) \cdot (-19-(-28))=1 \cdot 9=9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 продолжение 2.

Если ~~$a=1, b=9$~~ , $a-c=-9, b-c=-1$.

Тогда $c = a+9, b = c+1 = a+8$

Тогда $a^2 + a+8 = 710$

$$a^2 + a - 702 = 0$$

$$(a-26)(a+27) = 0$$

||

$$a=26 \text{ или } a=-27$$

Если $a=26$, то $c=35, b=34$.

Проверка: $34 > 26, 34-26=8 \neq 3, 26^2+34=710, (a-c)(b-c)=9$

Если $a=-27$, то $c=-18, b=-19$

Проверка: $-19 > -27, b-a=8 \neq 3, (-27)^2-19=710, (a-c)(b-c)=9$.

Order: $(26; 34; 25), (-27; -19; -28), (26; 34; 35), (-27; -19; -18)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

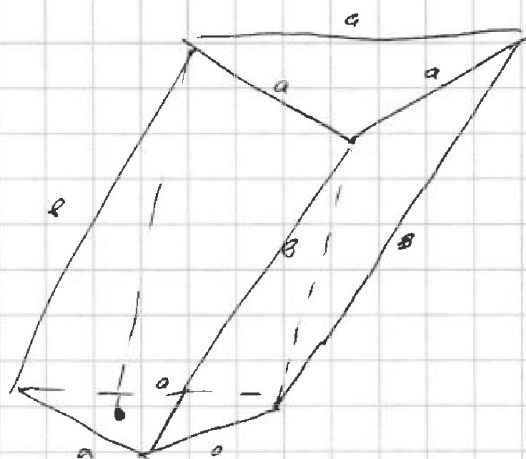
Черновик

$$a^2 + a - 710$$

$$710 =$$

$$= 30 \cdot 355 - 2 =$$

$$= 71 \cdot 10$$



$$\begin{array}{r} 710 \\ - 676 \\ \hline 34 \end{array}$$

$$25 - 625$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 26 \\ \hline 78 \\ 260 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times 676 \\ \hline 3584 \\ 36400 \\ 326400 \\ \hline 351552 \end{array}$$

$$729$$

$$a=27 \quad b=$$

$$a=26 \quad b=34$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ 540 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$(26-c)(34-c) = p^2$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ - 26 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$25$$



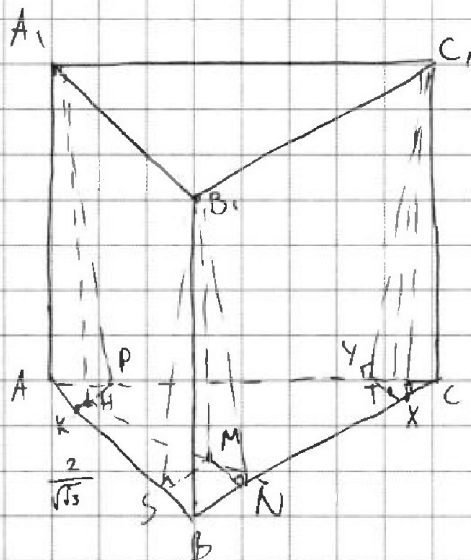
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7



Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ - призма

ABC - $\triangle$, $S_{ABC} = 1$

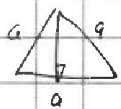
$S_{ABB_1A_1} = 3$

$S_{ACC_1A_1} = 2$

$S_{BB_1C_1C} = 3$

Найти: объём призмы

И.т.к. $AB = BC = AC = A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1$ и $S_{ABC} = 1$, то



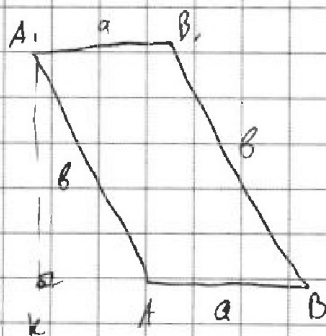
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 1 \quad a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}$$

$$\text{сторона} = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}} = AB$$

Пусть $AB = a$

Пусть $AA_1 = BB_1 = CC_1 = h$



Пусть высота призмы h - AK

Пусть высота AA_1B - A_1K , AA_1C - A_1P

Тогда по г. о. з. получ. $AK \perp AC$, $AK \perp AB$.

Аналогично получим высоту CT

высоты CT и CT , как на рисунке



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

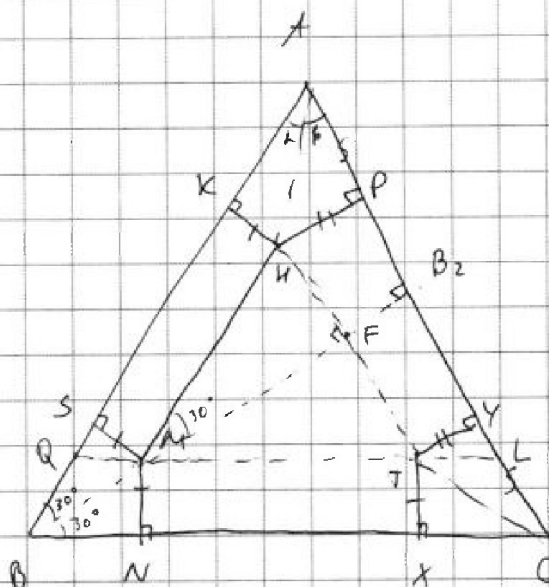
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7 продолжение 2

Рассмотрим на ABC



BM - биссектриса (т.к. M - лежит на биссектрисе, т.к. $MS = MN$)

Продлим BM до перес. с AC в т. B_2 . Т.к. ABC - pld , то BB_2 -

- высота и медиана.

$$MK^2 = MS^2 = MN^2 = TX^2 = \frac{9}{4} \cdot x^2 - h^2 = \frac{9}{4} (\sqrt{3})^2 - h^2 = \frac{9}{4} \sqrt{3} - h^2$$

$$MP^2 = x^2 - h^2 = \sqrt{3} - h^2$$

т.к. BM - бисс. то $\angle ABM = 30^\circ \Rightarrow BM = 2 SM$ ~~$\Rightarrow \frac{9}{4} \sqrt{3} - h^2$~~

$$BB_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$



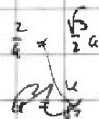
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7 продолжение 3



Получаем: $MS^2 = \frac{9}{4}\sqrt{3} - h^2$

$$MP^2 = \sqrt{3} - h^2 = FB^2$$

$$BB_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{3}} = \sqrt{1} = \frac{2}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{3}} = \sqrt{1} = \frac{2}{a} = \sqrt{3}$$

Тогда, п.к. $\angle ABM = 30^\circ$, то $BM^2 = 4SM^2 = 9\sqrt{3} - 4h^2$

$$BS^2 = 3MS^2 = \frac{27}{4}\sqrt{3} - 3h^2$$

В $\triangle MBT$ - по теореме АБС $\Rightarrow$ $MB + FB =$

$$\Rightarrow BM + FB =$$

Также $MB^2 + h^2 = b^2$ b - сторона боковой стороны.

Тогда $MB^2 = CF^2 = AH^2 = MS^2 + BS^2 = \frac{9}{4}\sqrt{3} - h^2 + \frac{27}{4}\sqrt{3} - 3h^2 =$

$$= 9\sqrt{3} - 4h^2$$

Тогда $AP^2 = 9\sqrt{3} - 4h^2 - MP^2 = \sqrt{3} - h^2 = 8\sqrt{3} - 3h^2$

Тогда $h = \sqrt{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
6 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7

~~Голда $\triangle AQL \sim \triangle ABC$ с $k = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - MN} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{9}{4}\sqrt{3} + h^2}$~~

$\triangle MIF \sim \triangle ABC$ с $k = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a - BM - FB_2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$

Голда



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

7 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~N7 продолжение 3~~

Черновик.

Тогда S_{ABCF}

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = S =$$

$$S_{BMA} + S_{BMC} + S_{MAC} =$$

$$= \frac{MS}{2} \cdot AB + \frac{MN}{2} \cdot BC + \frac{MB_2}{2} \cdot AC =$$

$$= \frac{a}{2} \cdot (MS + MN + MB_2) =$$

Тогда пусть MB_2 пересек с AC в F .

$MF \perp AC$

г.к. $MB_2 \perp AC$, $MB_2 \parallel BA$, $MB_2 \parallel BC$, $MB_2 \parallel AC$, то MB_2

MB_2 - п.с. г.к. тогда $MB_2 = SC = MF = PY$.

подобия ABC

Тогда $BS + KA = AP + CY$

г.к. $AB_2 = CB_2$, пусть $MF = SF \Rightarrow PB_2 = B_2F \Rightarrow AP = CY$.

Тогда $AP = CY$ по 2 катетам $\Rightarrow AM = CF \Rightarrow AK = CX$ (г.к. $AK =$

CF по кат. и гип.)

$$\text{Тогда } BS = \sqrt{BM^2 - MS^2} = \sqrt{3 \cdot SM} = \sqrt{\frac{27}{4} - \frac{1}{4}} =$$

$$= 2AP - AK$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$AK^2 = AP^2 + PK^2 = AK^2 + KH^2$~~ ~~н? продолжение 93~~

~~Черновик~~

~~$\text{Tg} \alpha \cdot AK^2 = AP^2 + PK^2 - KH^2 =$~~

~~$= AP^2 + \sqrt{3} \cdot h^2 + h^2 - \frac{9}{4} \sqrt{3} = AP^2 - \frac{5}{4} \sqrt{3}$~~

~~$\text{Tg} \alpha: \frac{27}{4} - h^2 \sqrt{3} = 2AP \cdot AK = 2AP \cdot \sqrt{AP^2 - \frac{5}{4} \sqrt{3}}$~~

~~$\text{Tg} \alpha \cdot AP$~~

~~AP~~

~~$\frac{KK}{AP} = \frac{\sqrt{3} \cdot h^2}{\sqrt{3} \cdot h^2}$~~

~~$BN = \frac{27}{4} - h^2 \sqrt{3}$~~

~~$NK = \frac{9}{4} \sqrt{3} - h^2$~~

~~$BM = \frac{18}{4} \sqrt{3} - 2h^2$~~

~~$UP = FB_2 = \sqrt{3} - h^2$~~

~~$\text{Tg} \alpha \cdot BN_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \alpha = BM + FB_2 + NF$~~

~~Пусть $\angle KPH = \gamma$, $\angle KAP = \beta$, тогда $\sin \gamma = \frac{KK}{KA}$, $\sin \beta = \frac{UP}{KA}$, тогда~~

~~$\sin \gamma = \sin \beta \cdot \frac{KK}{UP}$~~

~~Продлим MT до пересечения с AK в т. L и до пересечения с AB~~

~~в т. Q~~