



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$003: (13x-35)(x+1) \geq 0 \quad x+1 \neq 0$$

$$\text{VII} \quad a \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$\downarrow$$

$$x \in \cancel{(-\infty; -1)} \cup \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$$

$$\text{XIII} \quad a \cdot q^{12} = 5-x$$

$$\frac{\text{XV}}{\text{VII}}: q^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \sqrt{(x+1)^4}$$

$$\text{XV} \quad a \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$a \cdot q^{14} = a \cdot q^{12} \cdot q^2$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = (5-x) \cdot \sqrt{|x+1|}$$

$$\sqrt{|13x-35|} \cdot \sqrt{|x+1|} = (5-x) \cdot \sqrt{|x+1|}$$

$$\downarrow$$

$$x = -1 \text{ (X)} \quad \sqrt{|13x-35|} = |5-x| \quad x \leq 5$$

$$|13x-35| = (5-x)^2$$

$$x \in (-\infty; -1):$$

$$35 - 13x = 25 - 10x + x^2$$

$$0 = x^2 + 3x - 10$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$$x = \{-5; 2\}$$

$$\underline{x = -5}$$

$$x \in \left[\frac{35}{13}; 5\right]$$

$$13x - 35 = 25 - 10x + x^2$$

$$0 = x^2 - 23x + 60$$

$$(x-20)(x-3) = 0$$

$$x = \{3; 20\}$$

$$\underline{x = 3}$$

$$x = 3:$$

$$q^2 = \sqrt{|3+1|} = 2$$

$$\text{VII}: a \cdot 2^3 = \sqrt{\frac{39-35}{4^3}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{XIII}: a \cdot 2^6 = 5-3 = 2$$

$$\text{XV}: a \cdot 2^8 = \sqrt{(39-35)(4)} = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{VII} \\ \text{XIII} \\ \text{XV} \end{array} \right\} \text{ всё работает, } a_n = 2^{\frac{(n-11)}{2}}$$

$$x = -5:$$

$$q^2 = \sqrt{|-5+1|} = 2$$

$$\text{VII}: a \cdot 2^3 = \sqrt{\frac{-65-35}{-4^3}} = \frac{10}{2^3}$$

$$\text{XIII}: a \cdot 2^6 = 5 - (-5) = 10$$

$$\text{XV}: a \cdot 2^8 = \sqrt{(-65-35)(-4)} = 10 \cdot 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{VII} \\ \text{XIII} \\ \text{XV} \end{array} \right\} \text{ всё работает, } a_n = 10 \cdot 2^{\frac{(n-13)}{2}}$$

$$\text{Ответ: } \boxed{x = \{-5; 3\}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

~~$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$~~
 ~~$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x)$~~
 ~~$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x$~~

$$\cos(3x) + 3\cos(2x) + 6\cos x = p$$

~~$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$~~
 ~~$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x)$~~
 ~~$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x$~~

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos x (2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2 \sin x \cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x (1 - \cos^2 x) = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

$$4\cos^3(x) - 3\cos(x) + 3(\cos^2(x) - 1) + 6\cos x = p \quad t = \cos(x); \quad t \in [-1; 1]$$

$$4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$$

$$p = 4t^3 + 6t^2 + 3t + 3 = y$$

Экстремумы:

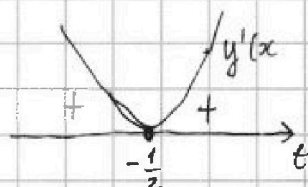
$$y'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 0$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$(2t+1)^2 = 0$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

(переток) $\Rightarrow y(t)$ — монотонная ф-я

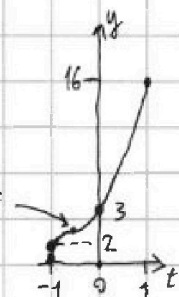


$$y(-1)(\min) = -4 + 6 - 3 + 3 = 2$$

$$y(1)(\max) = 4 + 6 + 3 + 3 = 16$$

$$\Rightarrow p \in [2; 16]$$

$$\begin{aligned}y(-\frac{1}{2}) &= -\frac{4}{8} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} + 3 = \\ &= 2,5\end{aligned}$$



~~производная симметрична~~
относительно $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t)$ симметрична относительно точки $(-\frac{1}{2}; 2,5)$, то есть

~~$y(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t + 3$~~

$$y = 2,5 + 4(t + \frac{1}{2})^3$$

$$\begin{aligned}4t^3 + 6t^2 + 3t + 3 &= \\ &= (4t^3 + 4t^2 + t)(2t + \frac{1}{2}) + 2,5 = \\ &= t(2t + 1)^2 + \frac{1}{2}(2t + 1)^2 + 2,5 = \\ &= 4(t + \frac{1}{2})^3 + 2,5\end{aligned}$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$4(-t)^3 + 6(-t)^2 + 3(-t) + 3 = p$$

$$\frac{p - 2,5}{4} = (t + \frac{1}{2})^3$$

$$t = -\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{p - 2,5}{4}}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{p - 2,5}{4}}$$

Ответ: $x = \pm \arccos(-\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{p - 2,5}{4}}) + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$

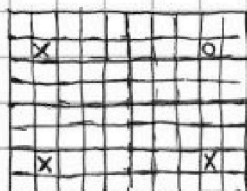


1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5



Для каждой ~~клетки~~ ^{клетки} могут выполняться 1, 2 или 3 симм. Разобьём 8 наших клеток на группы взаимноисм., состоящие из 2, 3 или 4 клеток. Это можно сделать 4 способами:

I $8 = 2 + 2 + 2 + 2$

II $8 = 2 + 2 + 4$

III $8 = 4 + 4$

IV $8 = 3 + 3 + 2$

1) Группа из двух задаётся одной клеткой и бывает двух типов:



a) имеет 2 симм. положения: $\begin{smallmatrix} x & & & \\ & x & & \end{smallmatrix}$; $\begin{smallmatrix} & & x & \\ & & & x \end{smallmatrix}$

б) имеет 4 симм. положения: $\begin{smallmatrix} x & x & & \\ & & x & x \end{smallmatrix}$; $\begin{smallmatrix} & x & & x \\ x & & x & \end{smallmatrix}$; $\begin{smallmatrix} x & & x & \\ & x & & \end{smallmatrix}$; $\begin{smallmatrix} & & x & \\ x & & & x \end{smallmatrix}$

другие две симм. клетки вычёркиваются,

чтобы при добавлении следующей группы новая клетка не стала частью этой

2) Группа из 3 задаётся одной клеткой и бывает одного типа:



имеет 4 симм. положения: $\begin{smallmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & x & \\ & & & x \end{smallmatrix}$; $\begin{smallmatrix} & x & & \\ x & & & \\ & & x & \\ & & & x \end{smallmatrix}$; $\begin{smallmatrix} x & & & \\ & & x & \\ & x & & \\ & & & x \end{smallmatrix}$; $\begin{smallmatrix} & & x & \\ x & & & \\ & x & & \\ & & & x \end{smallmatrix}$

3) Группа из 4 задаётся одной клеткой однозначно:



=> Для каждого способа группировки (I; II; III; IV) зададим каждую группу клеткой в правой верхней четвертинке.

I: $N_I = C_{12500}^4 \cdot 6^4$ ← 6 ^{видов} групп по 2
 (4 группы по 2)

II: $N_{II} = C_{12500}^2 \cdot 6^2 \cdot 12498 \cdot 1$
 (2 группы по 2) (оставшаяся группа по 4)

III: $N_{III} = C_{12500}^2 \cdot 1^2$

IV: $N_{IV} = C_{12500}^2 \cdot 4^2 \cdot 12498 \cdot 6$

Ответ: $N = N_I + N_{II} + N_{III} + N_{IV} = C_{12500}^4 \cdot 6^4 + C_{12500}^2 \cdot 6^2 \cdot 12498 + C_{12500}^2 + C_{12500}^2 \cdot 4^2 \cdot 12498 \cdot 6$

$$\frac{(2n-1)^2 - 1}{4} = \frac{4n^2 - 4n}{4} = n^2 - n$$

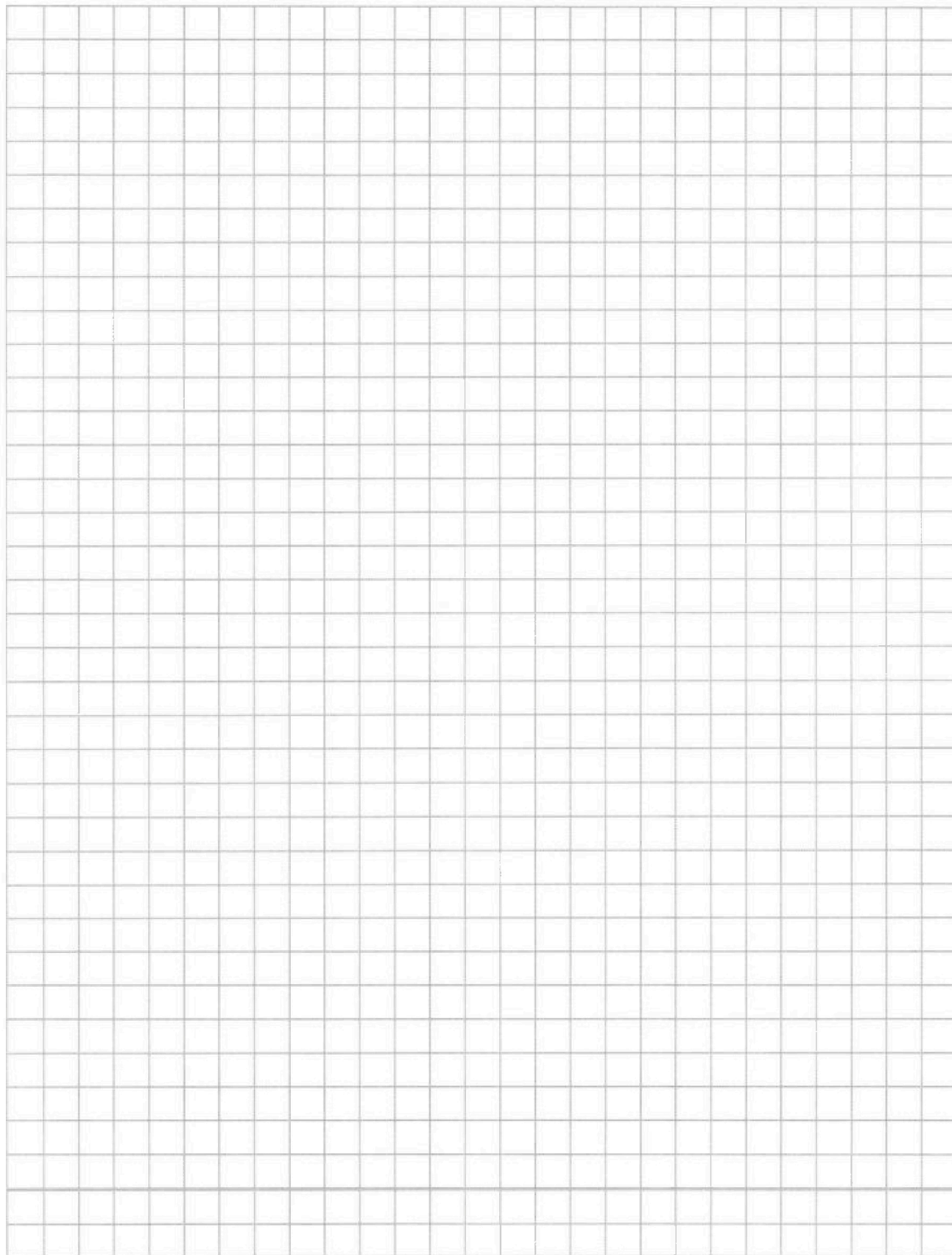


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





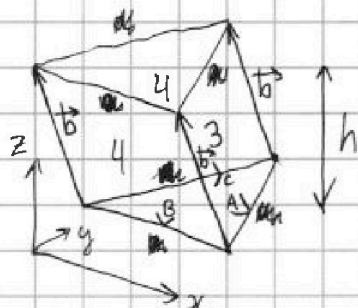
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



Обозначим двугранные углы при основании за A, B и C , тогда:

$$\frac{h}{\sin A} = 3$$

$$\frac{h}{\sin B} = 4$$

$$\frac{h}{\sin C} = 4$$

Пусть $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, тогда

$$\sin B = \frac{b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{h}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{h}{4} \Rightarrow \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = 4$$

$$\sin A = \frac{h}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{h}{3}$$

$$\sin A = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{b_y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b_x\right)^2}} = \frac{h}{3}$$

$$\sin C = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{b_y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}b_x\right)^2}} = \frac{h}{4}$$

$$\sin B: \begin{cases} h^2 + b_y^2 = 16 \end{cases}$$

$$\sin A: \begin{cases} h^2 + \left(\frac{b_y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b_x\right)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\sin C: \begin{cases} h^2 + \left(\frac{b_y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}b_x\right)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\frac{b_y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b_x = \pm \sqrt{9 - h^2}$$

$$\frac{b_y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}b_x = \pm \sqrt{16 - h^2}$$

$$b_y = \pm \sqrt{9 - h^2} \pm \sqrt{16 - h^2} = \pm \sqrt{16 - h^2}$$

$$h^2 = 9$$

$$h = 3$$

$$b_y = \sqrt{7}$$

$$b_x = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

$$b_z = 3$$

Ответ: $h = 3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

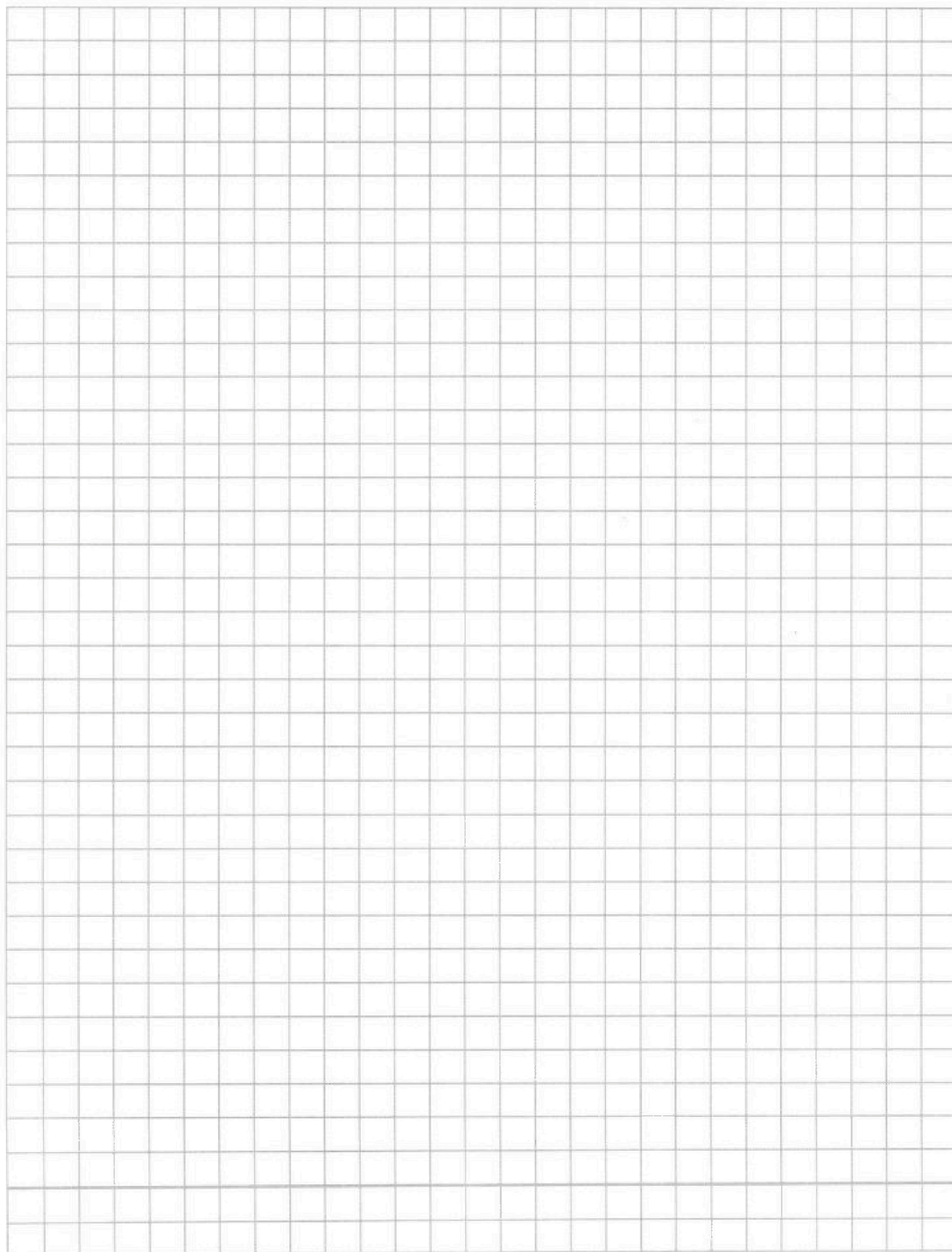
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

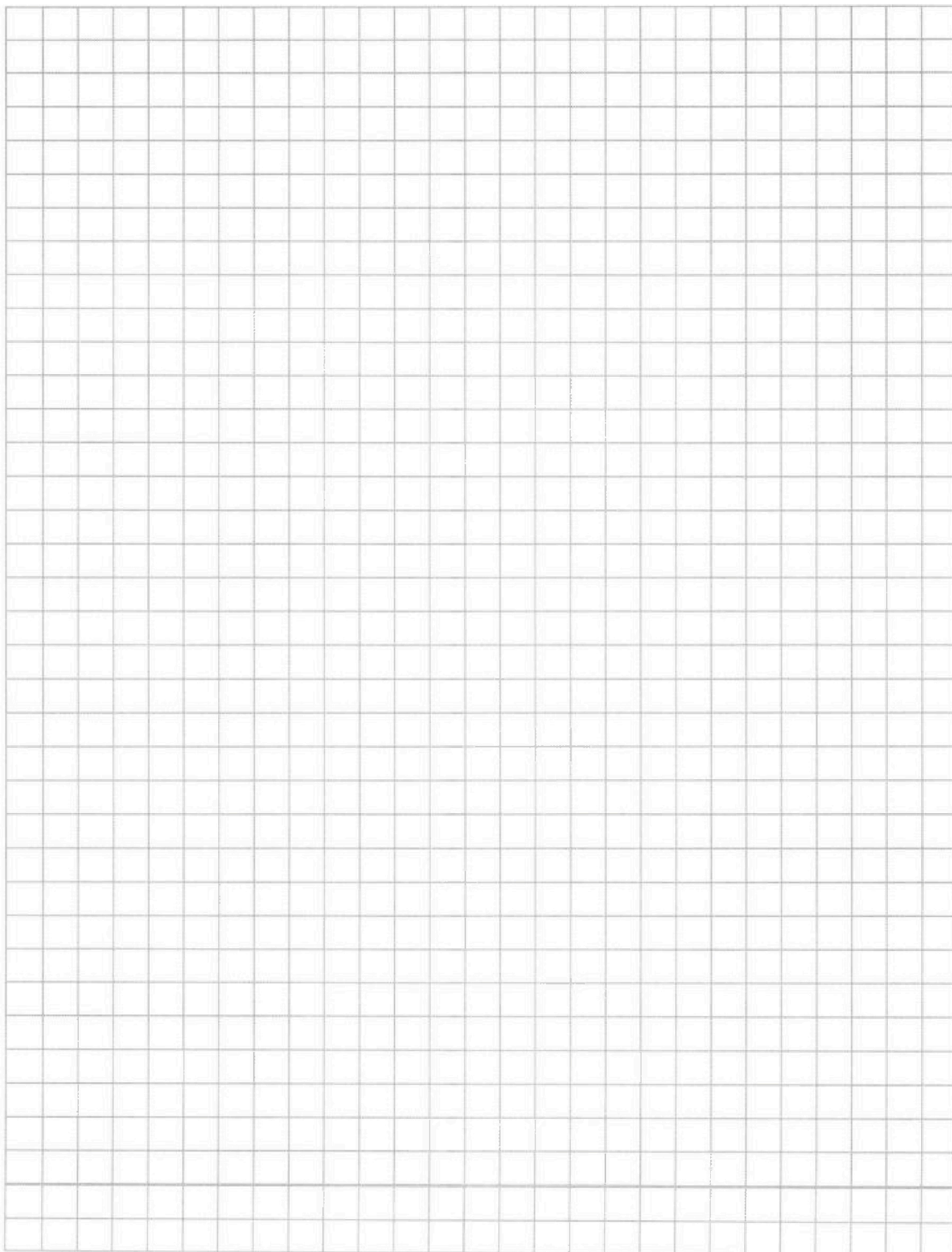
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

