



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$, девятый член равен $x + 3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}; \quad b_9 = x+3; \quad b_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} (25x-9)(x-6) \geq 0 \\ \frac{25x-9}{(x-6)^3} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty).$$

~~Так как $b_7 \neq 0$, т.е. или $b_1=0$, или $q=0$, то применим опрег. Лоп. прир.~~

$$\downarrow x \neq \frac{9}{25}, x \neq 6$$

$$x \in (-\infty; \frac{9}{25}) \cup (\frac{9}{25}; 6) \cup (6; +\infty)$$

$$\text{Заметим, что } \frac{b_9}{b_7} = q^2; \quad \frac{b_{15}}{b_9} = q^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{25x-9} \sqrt{x-6}} \\ q^6 = \frac{\sqrt{25x-9}}{\sqrt{x-6}^3 (x+3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{25x-9} \sqrt{x-6}} \\ q^4 = \frac{\sqrt{25x-9} \cdot \sqrt{25x-9} \sqrt{x-6}}{\sqrt{x-6}^3 (x+3)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{125x-91} \sqrt{x-6}} \\ q^4 = \frac{125x-91}{|x-6|(x+3)^2} \end{cases}$$

$$\text{Т.к. } q^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow \text{Усл: } x \in [-3; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$$

$$\text{Заметим, что в задании усл. } \frac{25x-9}{x-6} > 0 \Rightarrow q^4 = \frac{25x-9}{(x-6)(x+3)^2}$$

$$\text{Также } q^2 \cdot q^6 = q^8 \Rightarrow q^8 = \frac{(x+3) \sqrt{125x-91}}{(x+3) \sqrt{125x-91} \sqrt{x-6}} = \frac{1}{(x-6)^2} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{|x-6|}$$

$$\text{Тогда } \frac{25x-9}{(x-6)(x+3)} = \frac{1}{|x-6|}$$

$$\textcircled{1} x \in [-3; \frac{9}{25}]$$

$$\frac{25x-9}{(x-6)(x+3)} = -\frac{1}{x-6} \Rightarrow (x+3)^2 = 9-25x \Rightarrow x^2+6x+9=9-25x$$

$$x(x+31)=0$$

$$x_1 = -31 \text{ - не год. из-за усл.}$$

$$x_2 = 0$$

Проверим $x=0$. При нем $b_7 = 3\sqrt{6}$; $b_9 = 3$; $b_{15} = \frac{\sqrt{6}}{12}$ и усл. $q = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ - выполн.

$\Rightarrow x=0$ - ответ.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II) $x \in (6; +\infty)$

$$\frac{25x-9}{(x-6)(x+9)} = \frac{1}{x-6}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$D = 789$$

$$x_1 = \frac{19-17}{2} = 1 \text{ - не подходит по условию}$$

$$x_2 = \frac{19+17}{2} = 18$$

Проверим $x=18$: $b_7 = 42\sqrt{3}$, $b_9 = 21$, $b_{15} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ существует $q = \pm\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$ при $\omega = 1$ это возможно

$\Rightarrow$ тогда при $q = 1 \Rightarrow x=18$ - ответ

Ответ: $\{0, 18\}$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} & (1) \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \quad (2)$$

Исследуем (2) равенство. Пусть $f(y) = |y+4| + 4|y-5|$; $g(z) = \sqrt{81-z^2}$.

Найдем область значений $f(y)$. Раскроем модуль в зависимости:

(I) $y \leq -4 \Rightarrow f(y) = -y-4 - 4y+20 = -5y+16$ — монотонно убывающая функция $\rightarrow$ min значение $\rightarrow$ при $y = -4$; $f(-4) = 36$. Т.е. при $y \leq -4$: $f(y) \geq 36$.

(II) $y \in [-4; 5]$. $f(y) = y+4 - 4y+20 = -3y+24$ — монотонно убывающая функция $\rightarrow$ min значение при $y = 5$; $f(5) = 9 \Rightarrow$ при $y \in [-4; 5]$: $f(y) \geq 9$.

(III) $y \in [5; +\infty)$. $f(y) = y+4 + 4y-20 = 5y-16$ — монотонно возрастающая функция $\rightarrow$ min значение при $y = 5 \Rightarrow$ при $y \in [5; +\infty)$: $f(y) \geq 9$.

Из всех случаев следует, что $f(y) \geq 9$.

Теперь найдем область значений $g(z)$.

$g(z) = \sqrt{81-z^2}$. Так $81-z^2 \geq 0 \Rightarrow z \in [-9; 9]$. Заметим, что $g(x)$ — четная.

Поэтому рассмотрим только интервал $z \in [0; 9]$. При $z \uparrow$ на этом интервале значение функции строго убывает $\rightarrow$ max в точке $z = 0 \Rightarrow \max g(z) = 9 \rightarrow$

$$\rightarrow g(z) \leq 9.$$

При этом $f(y) = g(z)$. Это возможно только если $f(y) = g(z) = 9$.

Во время анализа функций мы выяснили, что $f(y) = 9$ только при $y = 5$; $g(z) = 9$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

только при $z=0 \rightarrow y=5, z=0$

Теперь рассмотрим $\textcircled{1}$; подставим сразу значения y и z :

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + y = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$\text{Усл: } \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 5-4x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-5, 1]$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2} - y$$

Возведём обе части в квадрат.

$$x+5 - 2\sqrt{5-4x-x^2} + 1-x = 4(5-4x-x^2) - 16\sqrt{5-4x-x^2} + 16$$

$$4(5-4x-x^2) - 14\sqrt{5-4x-x^2} + 16 = 0$$

$$t = \sqrt{5-4x-x^2}; t \geq 0$$

$$2t^2 - 7t + 5 = 0$$

$$D = 49 - 40 = 9$$

$$t_1 = \frac{7-3}{4} = 1$$

$$t_2 = \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5-4x-x^2} = 1 \\ \sqrt{5-4x-x^2} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5-4x-x^2 = 1 \\ 5-4x-x^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+4x-4=0 \\ x^2+4x+\frac{5}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{2}-2 \\ x = 2\sqrt{2}-2 \\ x = -\sqrt{11}-4 \\ x = \sqrt{11}-4 \end{cases}$$

$$\text{С учётом усл: } \begin{cases} x = -2\sqrt{2}-2 \\ x = 2\sqrt{2}-2 \\ x = \sqrt{11}-4 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \{(-2\sqrt{2}-2, 5, 0); (\sqrt{11}-4, 5, 0); (2\sqrt{2}-2, 5, 0)\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$p \cos 3x + 3(p+1) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+1) \cos x = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 3 \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$p \cos^3 x = 3 \cos^2 x - 3 \cos x + 4$$

$$t = \cos x, t \in [-1; 1]$$

$$pt^3 = 3 \cos^2 x - 3 \cos x + 4$$

$$pt^3 = 3t^2 - 3t + 4$$

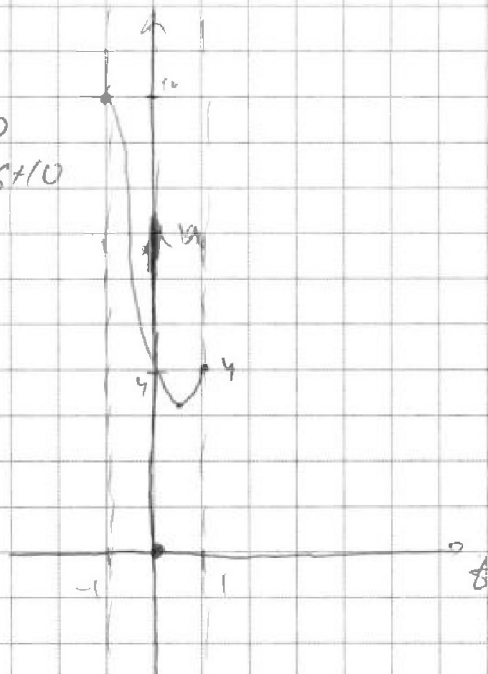
$$u = 3t^2 - 3t + 4$$

$$u = pt^3$$

$$u = 3t^2 - 3t + 4 - \text{парабола, ветвь вверх;}$$

$$\text{Вершины } (t; u). \text{ При } t = -1; u = 10;$$

$$\text{При } t = 1; u = 7$$



$$u = pt^3. \text{ При } p = 0; u = 0, \text{ но } 3t^2 - 3t + 4 \neq 0 \text{ при } t \in [-1; 1].$$

$$\Rightarrow p = 0 - \text{не реш.}$$

$$\text{При } p \neq 0; u = pt^3 - \text{искривлённая функция, проходящая через } (0, 0)$$

① $p > 0 \Rightarrow$ проходящая через точки $(-1; p)$ и $(1; p)$. При $t < 0; pt^3 < 0 \Rightarrow$ не пересекается.

параболу. Может ли пересекать параболу при $p > 0$. Т.е. pt^3 равен максимуму $3t^2 - 3t + 4$, но

если $pt^3 \leq 4$, то $p \leq 4$, но решений нет. При $p > 4$ - решение есть. Для всех t

② $p < 0$ Тогда при $t > 0; pt^3 < 0 \Rightarrow$ не перес. параболу. Аналогично I. если равно zero

реш. при $p \leq -10$

$p \in (-\infty, -10] \cup [4; +\infty)$ При этих значениях p есть хотя бы 1 $t \Rightarrow \infty$ решений где x .

Ответ: $(-\infty, -10] \cup [4; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS

Для начала заметим, что ввиду того, что для каждой точки должны быть симметричные относительно O точки из объектов, то в каждом из 3 случаев все элементы разбиваются на пары единственным образом, причём обе клетки пары должны быть в раскраске, что не может быть. Т.е. в каждом случае мы выбираем набор из 4 пар. Всего клеток 40000, всего пар 20000 — это количество вариантов. $C_{20000}^4 = \frac{20000!}{19996!4!}$. Т.к. случаев 3, то всего вариантов: $\frac{3 \cdot 20000!}{19996!4!}$.

Теперь найдем, какие раскраски возможны. Такие, в которых раскраска симметрична относительно O хотя бы 2 элементов. Заметим, что если она симметрична относительно 2 , то она симметрична и относительно 3 . То есть все такие случаи покрываются 3-мя: Найдем, как выглядят такие случаи. Определим любую точку и все 3 её симметричные. Получим, что такая четверка может возникнуть для каждой из этих 4 точек и выглядят как вершины квадрата. Тогда в этих случаях все клетки разбиваются единственным образом разбиваются на четверки, и нам надо выбрать 2 из них. Т.е. $C_{10000}^2 = \frac{10000!}{9998!2!}$. Заметим, что каждая такая раскраска однозначно была посчитана

ровно 3-мя $\Rightarrow$ надо вычитать их дважды $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Ответ} = \frac{3 \cdot 20000!}{19996!4!} - \frac{2 \cdot 10000!}{9998!2!} = \frac{3 \cdot 20000!}{4! \cdot 19996!} - \frac{10000!}{9998!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

Т.к. $(a-c)/(b-c) = p^2$, при этом $a, b, c \in \mathbb{Z}$, то для все функций экстр. $(a-c) \mid (b-c)$

$$\textcircled{I} \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a-1 \\ b=p^2+a-1 \end{cases} \text{ По урн: } (b-a)/3 \Rightarrow p^2+a-1-a = (p^2-1)/3 \text{ Если } p \equiv 1 \pmod{3}$$

$$p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow (p^2-1)/3 \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod{3}, \text{ т.к. } p \text{ - простое} \Rightarrow p=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=a-1 \\ b=p^2+a-1 \end{cases} \text{ По урн } a^2+b=710 \Rightarrow a^2+a+9=710 \Rightarrow a^2+a-702=0$$

$$\begin{cases} a_1 = -27 \\ a_2 = 26 \end{cases}$$

Возм: $a_1 = -27; b_1 = -19; c_1 = -28$ - все урн. Ответ: эта тройка - ответ.

$a_2 = 26; b_2 = 34; c_2 = 25$ - все урн. Ответ: $\Rightarrow$ это ответ

$$\textcircled{II} \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b=-1+p^2, \text{ при этом мин } p=2 \Rightarrow p^2-1 > 0 \Rightarrow a-b > 0 \Rightarrow a > b, \text{ что}$$

нельзя урн.

$$\textcircled{III} \begin{cases} b-c=1 \\ a-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b-1 \\ a=p^2+b-1 \end{cases} \Rightarrow a-b=p^2-1 \Rightarrow a > b \text{ - против}$$

$$\textcircled{IV} \begin{cases} b-c=-1 \\ a-c=-p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b+1 \\ a=p^2+b+1 \end{cases} \Rightarrow a-b=p^2+1 \Rightarrow b-a=p^2-1 \text{ Аналогично п. I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p=3 \Rightarrow \begin{cases} b=a+8 \\ c=a+9 \end{cases} \Rightarrow a^2+a+9=710 \Rightarrow \begin{cases} a_3 = -27 & b_3 = -19, c_3 = -18 \\ a_4 = 26 & b_4 = 34, c_4 = 35 \end{cases} \text{ - обе тройки не год}$$

$$\textcircled{V} \begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \Rightarrow a=b \text{ - против.}$$

$$\textcircled{VI} \begin{cases} a-c=-p \\ b-c=-p \end{cases} \Rightarrow a=b \text{ - против.}$$

В других случаях нет $\Rightarrow$

Ответ: $\{(-27, -19, -28), (26, 34, 25), (-27, -19, -18), (26, 34, 35)\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

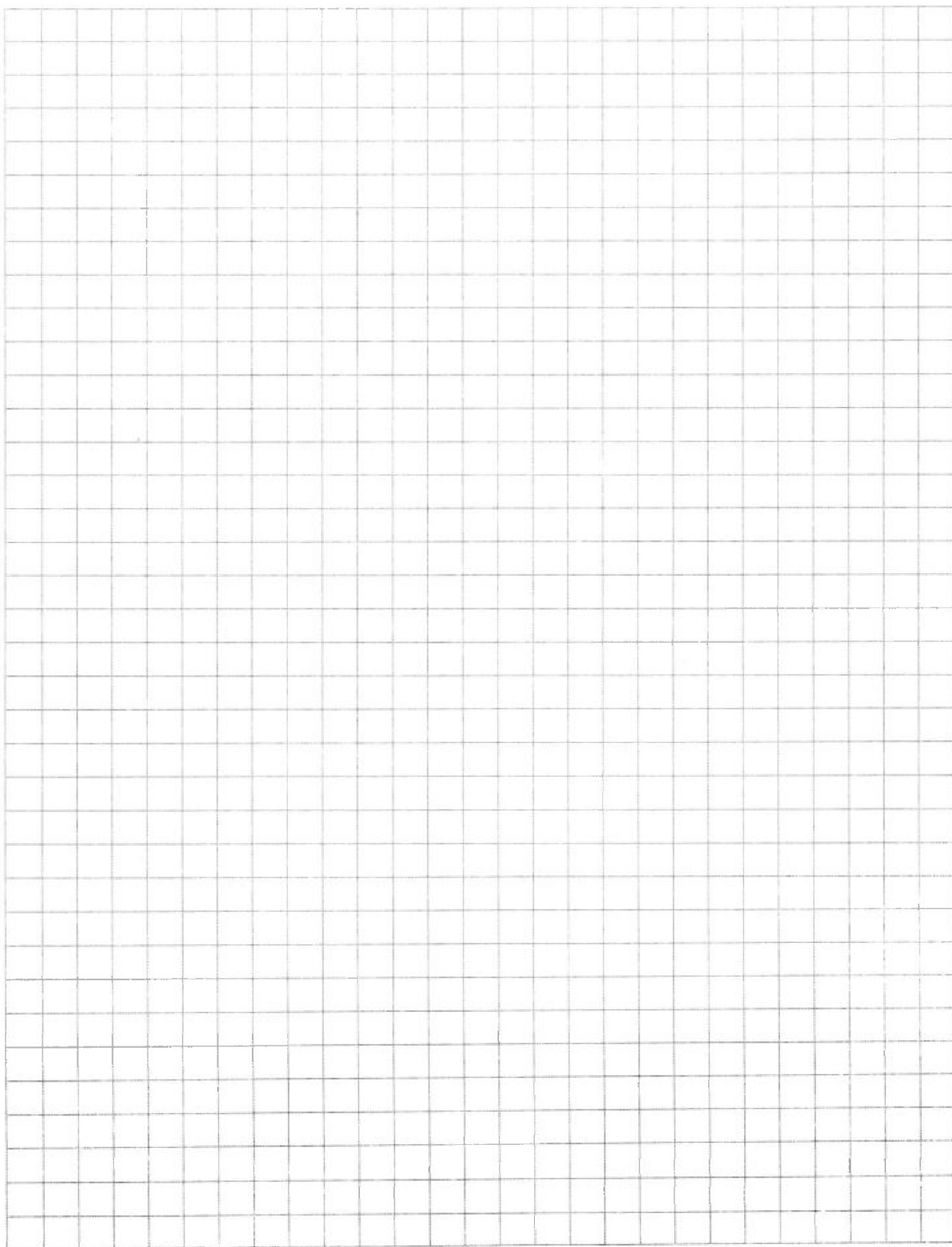
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



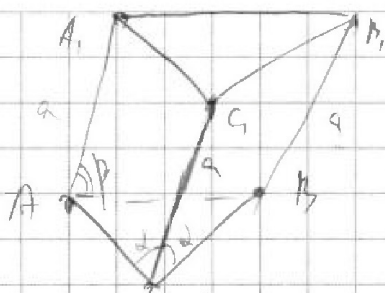


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\Delta ABC - \text{плем}$

$$S_{ABC} = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$3 + 4 + 5 + 5 + 7 + 1 + 0 = 31$$

$$3 + 4 + 3 + 2 = 12$$

$$x^2 + y^2 - 2R_1y + R_1^2 = R_2^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2R_2y + R_2^2 = R_2^2$$

$$-2R_1y + 2ax - a^2 + 2R_2y = 0$$

$$2ax = 2(R_1 - R_2)y + a^2$$

$$x = \frac{R_1 - R_2}{a}y + \frac{a}{2}$$

$$\left(\frac{R_1 - R_2}{a}y + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 - 2R_1y = 0$$

$$\frac{R_1^2 - 2R_1R_2 + R_2^2}{a^2}y^2 + (R_1 - R_2)y + \frac{a^2}{4}y^2 - 2R_1y = 0$$

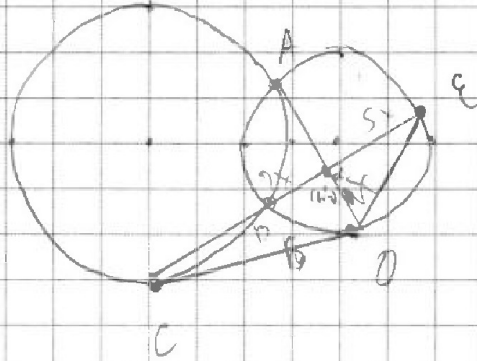
$$\frac{(R_1 - R_2)^2 + a^2}{a^2}y^2 - (R_1 + R_2)y + \frac{a^2}{4} = 0$$

$$D = (R_1 + R_2)^2 - 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{(R_1 - R_2)^2 + a^2}{a^2} =$$

$$= R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2 - R_1^2 - 2R_1R_2 - R_2^2 - a^2 =$$

$$= 4R_1R_2 - a^2$$

$$y = \frac{R_1 + R_2 - \sqrt{4R_1R_2 - a^2}}{2((R_1 - R_2)^2 + a^2)}$$



$$\frac{EO}{CO} = ?$$

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OBC}} = \frac{2}{5}$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}$$

$$4x^2 + a^2 + \text{Max cos} = CO^2$$

$$25x^2 + a^2 + \text{Max cos} = EO^2$$

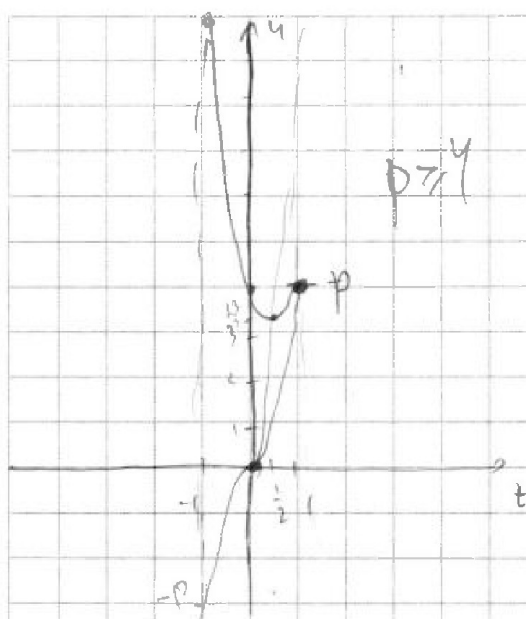


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t^3 - \frac{3}{p}t^2 + 3t - \frac{4}{p} = 0$$

$$\frac{6t}{p^3} - \frac{3 \cdot 16}{p^3} + \frac{3 \cdot 4}{p^2} - \frac{4}{p} = 0$$

$$\frac{6t - 48}{p^3} + \frac{12}{p^2} - \frac{4}{p} = 0$$

$$16 + 12p - 4p^2 = 0$$

$$p^2 + 3p - 4 = 0$$

$$p = 4 \Rightarrow [1; 4]$$

$$p = 4$$

$$st^3 - 3t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$\frac{EO}{CO} = 2$$

$$\frac{CK}{KE} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{AB}{AB}$$

$$\frac{AB}{\frac{R_1}{2}} = \sin \alpha$$

$$AB = 2R_1 \sin \alpha$$

$$AB = 2R_2 \sin \beta$$

$$O_1 O_2 = R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \beta$$

$$CO^2 = R_1^2 \cos^2 \alpha + R_2^2 \cos^2 \beta - 2R_1 R_2 \cos \alpha \cos \beta - R_1^2 - R_2^2 + 2R_1 R_2 = 2R_1 R_2 (1 - \cos \alpha \cos \beta) - R_1^2 \sin^2 \alpha + R_2^2 \sin^2 \beta$$

$$R_1 \sin \alpha = R_2 \sin \beta$$

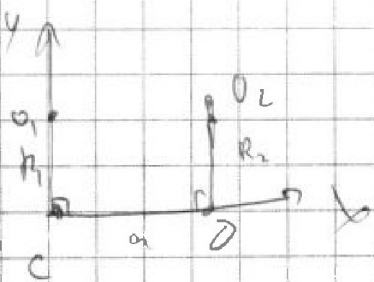
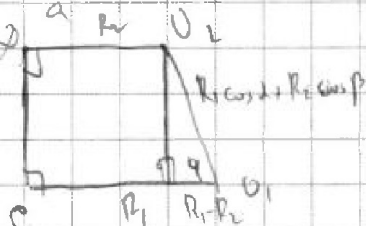
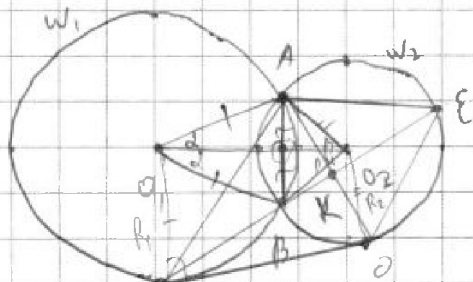
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$R_1 = R_2$$

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

$$\sin \alpha = \sin \beta$$



$$(O_1, O_2) \text{ или } R = R_1 \text{ или } R = R_2$$

$$O_1(0, R_1)$$

$$O_2(a, R_2)$$

$$O_1(0, R_1)$$

$$x^2 + (y - R_1)^2 = R_1^2$$

$$(x - a)^2 + (y - R_2)^2 = R_2^2$$

$$R_1 = R_2$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{Z}$
 $a \neq b$
 $b-a \nmid 3$
 $(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$
 $a^2 + b = 710$

I $a-c=1$
 $b-c=p^2$
 $c=a-1$
 $b-a+1=p^2 \Rightarrow b=p^2+a-1$
 $a < p^2+a-1$
 $p^2-1 > 0$ ✓
 $b-a = (p^2-1) \nmid 3$
 $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$
 $p \equiv \pm 1 \pmod{3}$
 $p=3$
 $b=a+8$
 $c=a-1$
 $a^2 + b = 710$
 $a^2 + a + 9 = 710$
 $a^2 + a - 701 = 0$
 $D = 1 + 4 \cdot 701 = 2809$
 $\sqrt{D} = 53$
 $a_1 = \frac{-1+53}{2} = 26$
 $a_2 = \frac{-1-53}{2} = -27$
 $a=26$
 $b=34$
 $c=25$

II $a-c=-1$
 $b-c=-p^2$
 III $b-c=1$
 $a-c=p^2$
 IV $b-c=-1$
 $a-c=-p^2$
 V $a-c=p$
 $b-c=p$
 VI $a-c=-p$
 $b-c=-p$

$a^2 + b = 710$
 $a^2 + a + 9 = 710$
 $a^2 + a - 701 = 0$
 $D = 1 + 4 \cdot 701 = 2809$
 $\sqrt{D} = 53$
 $a_1 = \frac{-1+53}{2} = 26$
 $a_2 = \frac{-1-53}{2} = -27$

$a^2 + b = 710$
 $a^2 + a + 9 = 710$
 $a^2 + a - 701 = 0$
 $D = 1 + 4 \cdot 701 = 2809$
 $\sqrt{D} = 53$
 $a_1 = \frac{-1+53}{2} = 26$
 $a_2 = \frac{-1-53}{2} = -27$

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$p=?$ См. п. 1

$$\begin{aligned}
 4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3(p+4) \cos x &= 12 \cos^3 x + 6 + 10 \\
 4p \cos^3 x + 12 \cos x &= 12 \cos^3 x + 16 \\
 p \cos^3 x + 3 \cos x &= 3 \cos^3 x + 4 \\
 p \cos^3 x &= 3 \cos^3 x - 3 \cos x + 4 \\
 t = \cos x, \quad t \in [-1; 1] \\
 p t^3 &= 3t^3 - 3t + 4
 \end{aligned}$$

$$u = p t^3 \rightarrow f(t)$$

$$u = 3t^3 - 3t + 4 - \text{корни кривой} = g(t)$$

$$D = 9 \quad \text{Ср. т.} \quad t_0 = \frac{3}{3} = 1$$

$$u = 3 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 4 = \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + \frac{16}{4} = \frac{13}{4}$$

$$\begin{aligned}
 g(-1) &= 3 + 3 + 4 = 10 \\
 g(1) &= 3 - 3 + 4 = 4
 \end{aligned}$$

$$f(t) = p t^3$$

$(-1; p)$
 $(1; p)$

$$\begin{aligned}
 \cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\
 &= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin x \cos x = \\
 &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = \\
 &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = \\
 &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x
 \end{aligned}$$

$$p t^3 - 3 t^3 + 3 t - 4 = 0$$

$$p=7, t=1 \quad (+)$$

$$p=-10, t=-1$$

$$-10 t^3 = 3 t^3 - 3 t + 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

IV) $y \geq 5$ $t = y + 1 + y - 20 = 5y - 16$ - бул. ф.

$\min_{y \in S} t = 5y - 16$
 $\min_{y \in S} t = 9$

а т.к. $0 \leq t \leq 9$

$y = 5, t = 9$

$x \geq -5$
 $x \leq 1$

$-x^2 - 4x + 5 \geq 0$

$x^2 + 4x - 5 \leq 0$

$D = 16 + 20 = 36$

$x_1 = \frac{-4-6}{2} = -5$

$x_2 = \frac{-4+6}{2} = 1$

$x \in [-5, 1]$

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 1 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

$x+5 + 1-x + 16 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

$x+5 - 2\sqrt{5-4x-x^2} + 1-x = 4(5-4x-x^2) - 16\sqrt{5-4x-x^2} + 16$

$16\sqrt{5-4x-x^2} + 16 = 4(5-4x-x^2) + 16$
 $t = \sqrt{5-4x-x^2}, t \geq 0$

$4t^2 - 14t + 10 = 0$

$2t^2 - 7t + 5 = 0$

$D = 49 - 40 = 9$

$t_1 = \frac{7-3}{4} = 1$

$t_2 = \frac{7+3}{4} = 2.5$

$4x^2 + 16x + 15 = 0$

$D = 256 - 240 = 16$

$x_1 = \frac{-16-4\sqrt{16}}{8} = -\sqrt{11}-4$

$x_2 = \sqrt{11}-4$

$\sqrt{5-4x-x^2} = 4$

$5-4x-x^2 = 16$

$x^2 + 4x + 11 = 0$

$x^2 + 4x - 4 = 0$

$D = 16 + 16 = 32$

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{32}}{2} = \frac{-4-4\sqrt{2}}{2} = -2-2\sqrt{2}$

$x_2 = 2\sqrt{2}-2$

Всего вариантов

Старые точки: 100, 400 = 40000

Все разбив на пары: берём 7 пар:

где

где каждая из 3-х пар:

$\frac{40000}{4} = 10000$

Вар. выбор 2, 4, 2



сумма пар:

всего

$\frac{40000!}{4000! \cdot 4}$

$\frac{4000!}{3996! \cdot 4!}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

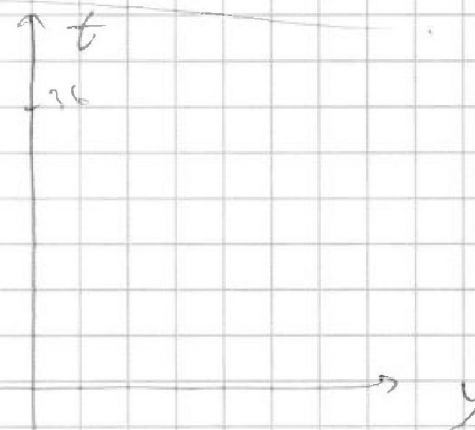
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$q^2 = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = q^{\frac{2}{3}} \\ q^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{6} \Rightarrow q^6 = \frac{1}{6\sqrt{6}} \Rightarrow v_{15} = q^6 \cdot v_3 = \frac{1}{6\sqrt{6}} \cdot 3 = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \quad \checkmark \\ q = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad x=0 \quad \checkmark$$

$$3) x=18 \Rightarrow v_7 = \sqrt{(25 \cdot 18 - 9)(18 - 6)} = \sqrt{9(25 \cdot 2 - 1) \cdot 12} = 6\sqrt{2 \cdot 49} = 42\sqrt{2} \\ v_9 = 21 \\ v_{15} = \sqrt{\frac{25 \cdot 18 - 9}{(18 - 6)^3}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 49}{12^3}} = \frac{3 \cdot 7}{12\sqrt{12}} = \frac{3 \cdot 7}{12 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24} \\ \Rightarrow q = \frac{21}{42\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ q^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{8} \\ q^6 = \frac{1}{16\sqrt{2}} \\ v_{15} = v_9 q^6 = \frac{21}{16\sqrt{2}} \quad \times$$

$$\sqrt{(25 \cdot 18 - 9)(18 - 6)} = \sqrt{9(25 \cdot 2 - 1) \cdot 12} = 6\sqrt{3 \cdot 49} = 42\sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{25 \cdot 18 - 9}{12^3}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 49}{12^3}} = \frac{3 \cdot 7}{12\sqrt{12}} = \frac{7}{4 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24} \\ q^2 = \frac{21}{42\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ q^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{12} \Rightarrow q^6 = \frac{1}{24\sqrt{3}} \\ v_{15} = 21 \cdot \frac{1}{24\sqrt{3}} = \frac{7}{8\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-7z} + 4 = 2\sqrt{y-yx-x^2+z} \\ |y+1| + |y-5| = \sqrt{81-z^2} \\ 0 \leq \sqrt{81-z^2} \leq 9$$



$$t = |y+1| + |y-5| \\ \textcircled{I} y = -4$$

$$t = -y - 4 - 4y + 20 =$$

$$-5y + 16, \text{ где } y = -4 \Rightarrow \text{max} = 36 \\ y = -4 \Rightarrow \text{max} = 36 \text{ при } y = -4$$

$$\textcircled{II} y \in [-1, 5] \Rightarrow t = y + 4 - 4y + 20 = -3y + 24 \text{ — убывающая — min при } y = 5 \Rightarrow \text{min} = 9$$