



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}, \text{ девятый член равен } x + 3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Пусть $\sqrt{(25x-9)(x-6)} = b$, тогда $x+3 = q^2b$, а $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = q^8b$.

Тогда заметим, что $(q^2b)^4 = (q^8b) \cdot (b)^3$, т.е. подставив получим:

$$(x+3)^4 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \sqrt{(25x-9)^3 \cdot (x-6)^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^4 = (25x-9)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 = 25x-9 \\ (x+3)^2 = 9-25x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+9=25x-9 \\ x^2+6x+9=9-25x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-19x+18=0 \\ x^2+31x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, x=-18 \\ x=0, x=-31 \end{cases}$$

Заметим, что из ОДЗ: $\frac{(25x-9)}{(x-6)^3} \geq 0$, т.е. $x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$.

Тогда $x=1$ нам не подходит. Таким образом $\begin{cases} x=-31 \\ x=-18 \\ x=0 \end{cases}$ не

Ответ: $\begin{cases} x=-31 \\ x=-18 \\ x=0 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим полученные x на принадлежность ОДЗ:

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-5, 1]. \text{ Заметим, что } 1 < \frac{\sqrt{11}}{2} < 2, \text{ т.к. } 1 < \frac{11}{4} < 4.$$

~~Если~~ Если $x = -2 - \frac{\sqrt{11}}{2} \in \text{ОДЗ}$, $x = -2 + \frac{\sqrt{11}}{2} \in \text{ОДЗ}$, $x = -2 \in \text{ОДЗ}$.

Получим ответ:

$$\text{Ответ: } (x, y, z) = (-2 - \frac{\sqrt{11}}{2}, 5, 0), (-2, 5, 0), (-2 + \frac{\sqrt{11}}{2}, 5, 0).$$



1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3p \cos x + 12 \cos x = 6 \cos^2 x - 6 + 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4p \cos^3 x + 12 \cos x = 6 \cos^2 x + 4 \Leftrightarrow p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p-1) \cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[p-1]{p-1} \cos x)^3 = (1 - \cos x)^3$$

Заметим, что функция $f(x) = x^3$ монотонно возрастает, значит уравнение эквивалентно следующему:

$$\sqrt[p-1]{p-1} \cos x = 1 - \cos x \Leftrightarrow \cos x (\sqrt[p-1]{p-1} + 1) = 1.$$

Если $\sqrt[p-1]{p-1} + 1 = 0$, т.е. $p = 0$, то $0 = 1$ - реш. нет. $p \in (1; 2)$.

Если $\frac{1}{\sqrt[p-1]{p-1}} > 1$, то $\frac{1}{p-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{p+2}{p-1} > 0 \Leftrightarrow p \in (0; 1)$ - реш. нет.

Если $\frac{1}{\sqrt[p-1]{p-1}} < -1$, то $\frac{1}{p-1} < -1 \Leftrightarrow \frac{p}{p-1} < 0 \Leftrightarrow p \in (0; 1)$ - реш. нет.

Таким образом, если $p \in [0; 2)$, то

Если $\frac{1}{1 + \sqrt[p-1]{p-1}} > 1$, т.е. $\frac{-\sqrt[p-1]{p-1}}{1 + \sqrt[p-1]{p-1}} > 0$, т.е. $\sqrt[p-1]{p-1} \in (-1; 0)$, т.е. $p \in (0; 1)$ - реш. нет.

Если $\frac{1}{1 + \sqrt[p-1]{p-1}} < -1$, т.е. $\frac{\sqrt[p-1]{p-1} + 2}{\sqrt[p-1]{p-1} + 1} < 0$, т.е. $\sqrt[p-1]{p-1} \in (-2; -1)$, т.е. $p \in (-7; 0)$ - реш. нет.

Таким образом, если $p \in (-7; 1)$ - реш. нет.

Если $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$, то $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[p-1]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[p-1]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, если $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.

4) $O_1, O_2 \perp AB$, т.к. O_1, A, O_2, B - дельтоид



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

$a < b$

$b - a \neq 3$

$(a-c)(b-c) = q^2$, q - прост. или $a-c=q$, $b-c=q$, но тогда $a=b$ - противоречие, или $a-c=q^2$, $b-c=1$,
~~но тогда $a=q^2+c$, $b=1+c$. Очевидно, что $q^2 > 1$, тогда $a > b$ - противоречие, или $b-c=-q^2$, $a-c=-1$, но тогда $a > b$ - противоречие. Остается 2 случая:~~

I: $c=a-1$, тогда $b-a+1=q^2$, $b=710-a^2$, тогда
 $710-a^2-a+1=q^2 \Leftrightarrow 711-a^2-a=q^2$, $a < 710-a^2$.
 Решим (*): $a^2+a+q^2-711=0$, т.е. $a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 711 - 4q^2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2845-4q^2}}{2}$.
 $q^2 < \frac{2845}{4} = 711 + \frac{1}{4}$. Но $29^2 = 841$, а $23^2 = 529$. Значит $q \leq 23$.

$q=23 \Rightarrow \frac{2845}{4} - \frac{2116}{4} = 21^2$, т.е. если $q=23$, то $a = \frac{-1 \pm 23}{2} = \begin{bmatrix} 11 \\ -12 \end{bmatrix}$

$q=19 \Rightarrow \frac{2845}{4} - \frac{1444}{4} = 1401$ - не кв., $q=17 \Rightarrow \frac{2845}{4} - \frac{1156}{4} = 1689$ - не кв., $q=13 \Rightarrow \frac{2845}{4} - \frac{676}{4} = 2169$ - не кв.,
 $q=11 \Rightarrow \frac{2845}{4} - \frac{484}{4} = 2361$ - не кв., $q=7 \Rightarrow \frac{2845}{4} - \frac{196}{4} = 2609$ - не кв., $q=5 \Rightarrow \frac{2845}{4} - \frac{100}{4} = 2745$ - не кв.,
 $q=3 \Rightarrow \frac{2845}{4} - \frac{36}{4} = 2809 = 53^2$, т.е. $a = \frac{-1 \pm 53}{2} = \begin{bmatrix} 26 \\ -27 \end{bmatrix}$, $q=2$, значит $\frac{2845}{4} - 1 = 2829$ - не кв.

Таким образом, для I случая у нас 4 вар. на a , это $\begin{bmatrix} -27 \\ -12 \\ 11 \\ 26 \end{bmatrix}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II: Если же $\begin{cases} a-c=-q^2 \\ b-c=-1 \end{cases} \Rightarrow c=b+1$, тогда $a-b-1=-q^2$, т.е.

$a-710+a^2-1=-q^2$, т.е. $a^2+a-711+q^2=0$. Мы получим такое же уравнение, как и в случае (I), а значит и получим

те же самые значения "a", а значит и значения "b".

Для I: Если $a=-27$, то $b=710-27^2=710-729=-19$, значит $c=-28$, т.е. пара a, b, c $-27, -19, -28$ ~ удовл. усл.

Если $a=-12$, то $b=710-144=566$, $c=-13$ ~ удовл. усл.

Если $a=11$, то $b=710-121=589$, $c=10$ ~ удовл. усл.

Если $a=26$, то $b=710-676=34$, $c=25$ ~ удовл. усл.

Для II:

$$a=-27, b=-19, c=-18 \sim \text{угг.}$$

$$a=-12, b=566, c=567 \sim \text{угг.}$$

$$a=11, b=589, c=590 \sim \text{угг.}$$

$$a=26, b=34, c=35 \sim \text{угг.}$$

Ответ: $(a, b, c) = (-27, -19, -28), (-12, 566, -13), (11, 589, 10), (26, 34, 25),$
 $(-27, -19, -18), (-12, 566, 567), (11, 589, 590), (26, 34, 35).$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1. ЧЕРНОВИК

Пусть $\sqrt{(25x-9)(x-6)} = b$, тогда $x+3 = q^2 b$, а $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = q^8 b$. Заметим, что $\frac{(q^2 b)^3}{q^8 b} = b^2$, тогда получим

~~уравнение:~~ $\frac{(x+3)^3}{\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}} = (25x-9)(x-6)$.

$\frac{(q^2 b)^4}{(q^8 b)^2} = (b)^2$, тогда получим следующее уравнение на x :

$$\frac{(x+3)^4}{(25x-9)(x-6)^3} = (25x-9)(x-6) \Rightarrow (x+3)^4 = \frac{(25x-9)^2}{(x-6)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{25x-9} = \frac{25x-9}{(x-6)^2} \Leftrightarrow (x+3)^2 = \frac{(25x-9)^2}{x-6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 = \frac{25x-9}{x-6} \\ (x+3)^2 = -\frac{25x-9}{x-6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 27x - 54 = 25x - 9 \\ x^3 - 27x - 54 = -25x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^3 - 52x - 45 = 0 \quad (1) \\ g(x) = x^3 - 2x - 63 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

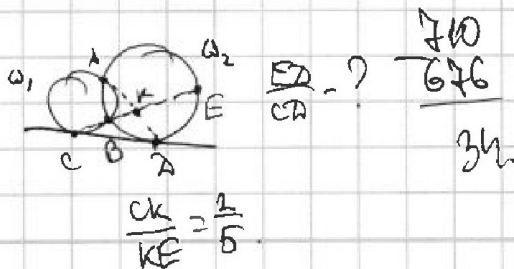
Ограничения на x : $x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$. Тогда замечаем, что

~~$f(x) = 3x^2 - 52$. Ошибка~~

$$(30-3) = 900 -$$

$$\begin{array}{r} -910 \\ 910 \\ -144 \\ \hline 566 \\ 548 \\ \hline 8852 \end{array}$$

$$(25+1) = 625 + 50 + 1 = 676.$$



$$\frac{ED}{CD} = ? \quad \begin{array}{r} 710 \\ 676 \\ \hline 34. \end{array}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} = a.$$

ЧЕРНОВИК

$$x+3 = q^2 a$$

$$(x-3)^2 = q^8 a^3$$

$$\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^2}} = q^8 a$$

$$\frac{(x+3)^3}{q^8 a} = a.$$

$$\sqrt{\frac{25x-9}{(x+3)^2}} = q^8 b.$$

$$x+3 = q^2 b$$

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} = b.$$

$$\frac{q^{16} b^4}{q^{16} b^2} = b^2.$$

$$1-p+1.$$

$$\frac{p-2}{p-1} < 0$$

$$p \in (1; 2).$$

$$(x^2+6x+9)(x-6) = x^3+6x^2+9x-6x^2-36x-54 = x^3-27x-54.$$

$$q^2 b$$

$$125 - 260 - 45.$$

$$225 - 245 - 52 - 15 - 3 - 15.$$

$$225 - 52.$$

$$3x^2 - 52.$$

$$225 - 52 - 15 - 3 - 15.$$

$$\sqrt{\frac{52}{3}}.$$

$$\frac{52}{3} \sqrt{\frac{52}{3}} - \frac{52}{3} \sqrt{\frac{52}{3}}$$

$$q^8 b^4 = q^8 b \cdot b^3.$$

$$(25x-9)(x-6) \geq 0.$$

$$x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup [\frac{6}{5}; +\infty).$$

$$\cos 3x = \cos x \cdot \cos(2\cos^2 x - 1) - 2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x (1 - \cos^2 x)$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x = 6 \cos 2x + 10.$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x = 6 \cos 2x + 10.$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x + 4.$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos x = 3 \cos^2 x + 1.$$

$$(x+3)^4 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^2}} \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}$$

$$x+4z \leq 1$$

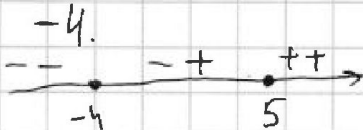
$$2\sqrt{y+z+4-(x-2)^2}$$

$$x \geq -5.$$

$$1-x \leq 6.$$

ЧЕРНОВИК

$$4z \leq 1-x.$$



569

$$4z \leq 6.$$

$$z \leq \frac{3}{2}.$$

$$-y-4 \leftarrow 4y+20.$$

$$36.$$

$$\begin{array}{r} 2845 \overline{) 5} \\ 25 \\ \underline{39} \\ 30 \\ \underline{45} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2845 \overline{) 4} \end{array}$$

$$5 \cdot 569.$$

$$2500 + 2 \cdot 3 \cdot 50 + 9.$$

$$(24+1)(25-1)^2 = 625 - 50 + 1 = 576.$$

$$\begin{array}{r} 49 \overline{) 1} \\ 49 \\ \underline{49} \\ 0 \end{array}$$

$$4 \cdot 19 + 4 \cdot 25 = 4 \cdot 44 = 4 \cdot 4 \cdot 11$$

$$\begin{array}{r} 711 \\ \times 17 \\ \hline 2800 + 44. \end{array}$$

$$(20-1)^2 = 400 - 40 + 1.$$

$$\begin{array}{r} 284 \overline{) 14} \\ 284 \\ \underline{284} \\ 0 \end{array}$$

$$2 < \frac{11}{4} < 3$$

$$a^2 + a + q^2 = 711.$$

$$-4q^2 +$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 119 \\ \hline 289. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \overline{) 1} \\ 49 \\ \underline{49} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{2845 - 4q^2}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 2845 \overline{) 3} \\ 27 \\ \underline{27} \\ 15 \\ \underline{12} \\ 21 \end{array}$$

$$(20-1)^2 = 400 - 40 + 1.$$

$$\begin{array}{r} 284 \overline{) 14} \\ 284 \\ \underline{284} \\ 0 \end{array}$$

$$b-a \neq 3.$$

$$a =$$

$$(a-c)(b-c) = p^2.$$

$$a^2 + b = 710.$$

$$\begin{array}{l} a-c = -q^2 \\ b-c = -1. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 284 \overline{) 5} \\ 284 \\ \underline{284} \\ 0 \end{array}$$

$$20-3 = 400 -$$

$$\begin{array}{r} 284 \overline{) 14} \\ 284 \\ \underline{284} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \overline{) 6} \\ 169 \\ \underline{169} \\ 0 \end{array}$$

$$a-c = -q^2$$

$$b-c = -1$$

$$b-c = -q^2$$

$$b = c - q^2.$$

$$a-c = -1.$$

$$a = c - 1$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+2840}}{2}$$

$$40 \cdot 40 = 1600$$

$$2841$$

$$\begin{array}{r} 46 \overline{) 246} \\ 46 \\ \underline{46} \\ 0 \end{array}$$

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 143, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 187, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 247, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 287, 293, 299, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 437, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 473, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 517, 521, 523, 527, 539, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 623, 629, 631, 637, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 667, 671, 673, 677, 683, 687, 691, 693, 697, 701, 709, 713, 719, 727, 733, 739, 743, 749, 757, 761, 763, 767, 773, 779, 787, 793, 797, 803, 809, 811, 817, 821, 823, 827, 829, 833, 837, 839, 843, 847, 853, 857, 859, 863, 867, 871, 877, 881, 883, 887, 893, 897, 901, 907, 911, 913, 917, 919, 923, 927, 929, 931, 937, 941, 943, 947, 953, 959, 961, 967, 971, 973, 977, 983, 989, 991, 993, 997, 1000.$$

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 529} \\ 13 \\ \underline{13} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80+1 = 1600+100+1 \\ 189 \\ \underline{189} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 339 \overline{) 1156} \\ 339 \\ \underline{339} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \overline{) 1681} \\ 41 \\ \underline{41} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46 \overline{) 246} \\ 46 \\ \underline{46} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 529} \\ 13 \\ \underline{13} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80+1 = 1600+100+1 \\ 189 \\ \underline{189} \\ 0 \end{array}$$