



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел (a, b, c) такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

Пусть q — знаменатель этой прогрессии. Тогда:

$$a_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \quad a_1 \cdot q^9 = x+4, \quad a_1 \cdot q^{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}, \text{ где}$$

a_1 — первый член прогрессии

$$\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = \frac{a_1 \cdot q^{12}}{a_1 \cdot q^3} = q^9 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^4} = q^9; q^9 = (x-3)^2$$

$$q = \sqrt[9]{|x-3|}$$

$$\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = \frac{a_1 \cdot q^{12}}{a_1 \cdot q^9} = q^3 \Rightarrow \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = \sqrt{|x-3|}, \quad \boxed{x > -4}$$

$$\sqrt{(15x+6)(x-3)} = (x+4)\sqrt{|x-3|}; \quad (15x+6)(x-3) = (x+4)^2 \cdot |x-3|$$

I случай: $x \geq 3$

$$(15x+6)(x-3) = (x^2+8x+16)(x-3); \quad (x-3)(x^2-7x+10) = 0$$

$x=3$ — не подходит, т.к. четвертый член прогрессии не определен при $x=3$

$$x^2-7x+10=0 \Rightarrow x_{1,2} = \{2; 5\}$$

с учетом раскрытия модуля $x=5$, $q = \sqrt[9]{2}$

II случай: $x < 3$

$$(15x+6)(x-3) = (x^2+8x+16)(3-x); \quad (x-3)(x^2+23x+22) = 0$$

$$x^2+23x+22=0 \quad x_{1,2} = \{-1; -22\} \quad q_{1,2} = \{\sqrt[9]{2}; \sqrt[9]{5}\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x = -22$ не подходит под условие $x > -4$

Ответ: $-1; 5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(y) = |y-20| + 2|y-35|$

Её приблизительный график выглядит так:

У ломаной 2 точки изменения наклона, то.к.

коэффициент при y в модуля больше, возрастание и убывание функции определяет точка $y=35$

$f(35)$ - наименьшее значение функции

$f(35) = 35 - 20 = 15 \Rightarrow f_{\min} = 15$

теперь рассмотрим $g(z) = \sqrt{225-z^2}$; $g'(z) = \frac{-z}{\sqrt{225-z^2}}$

$g(z) = \sqrt{225-z^2}$ Так как z^2 неотрицателен, наибольшее значение $g(z)$ принимает при $z^2 = 0$

$g_{\max} = g(0) = \sqrt{225} = 15 = f_{\min}(y) \Rightarrow f(y) = g(z) \Leftrightarrow \begin{cases} y=35 \\ z=0 \end{cases}$

Подставим найденные значения в первое уравнение системы

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$2\sqrt{(x+7)(5-x)} = -(\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x})^2 + x+7+5-x = -(\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x})^2 + 12$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $t = \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x}$, тогда:

$$t+6 = -t^2+12; t^2+t-12=0 \quad t_1=-4 \quad t_2=3$$

I:

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = -4; \sqrt{x+7} + 4 = \sqrt{5-x}; x+7+16+8\sqrt{x+7} = 5-x;$$

$$8\sqrt{x+7} = -18-2x; 4\sqrt{x+7} = -9-x, \quad \boxed{-9-x \geq 0}$$

$$16(x+7) = 81+18x+x^2; x^2+2x-31=0$$

$$\frac{D}{4} = 1+31=32; x = -1 \pm 4\sqrt{2}; -9-x \geq 0 \Rightarrow x \leq -9$$

$$-1+4\sqrt{2} > -1 > -9; -1-4\sqrt{2} < -9; 4\sqrt{2} \wedge 8; \sqrt{2} \wedge 2, \sqrt{2} < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1-4\sqrt{2} > -9$$

II:

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 3; \sqrt{x+7} = 3 + \sqrt{5-x}; x+7 = 9+5-x+6\sqrt{5-x}$$

$$2x-7 = 6\sqrt{5-x}, \quad \boxed{2x-7 \geq 0}$$

$$4x^2-28x+49 = 36(5-x); 4x^2+8x-131=0$$

$$\frac{D}{4} = 16+524=540 = 6 \cdot 9 \cdot 10 = 15 \cdot 9 \cdot 4$$

$$x = \frac{-4 \pm 6\sqrt{15}}{4} = \frac{-2 \pm 3\sqrt{15}}{2}$$

$$2x-7 \geq 0, 2x \geq 7;$$

$$-\frac{2-3\sqrt{15}}{2} < 0 < 7; \frac{-2+3\sqrt{15}}{2} \vee \frac{7}{2}; 3\sqrt{15} \vee 9; \sqrt{15} \vee 3; \sqrt{15} > 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2+3\sqrt{15}}{2} > \frac{7}{2} \quad \text{— корни не подходят}$$

Ответ: $(\frac{3\sqrt{15}-2}{2}; 35; 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

Пусть $\cos x = t$: $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 4t^3 - 3t$; $\cos 2x =$
 $= 2 \cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$

$$4t^3 - 3t + 6t = 6t^2 - 3 + p; 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

Заменим, что $(2t-1)^3 = (2t-1)(4t^2 - 4t + 1) = 8t^3 - 12t^2 + 6t - 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4t^3 - 6t^2 + 3t = \frac{(2t-1)^3 + 1}{2}$

$$p = \frac{(2t-1)^3 + 1}{2} + 3; -1 \leq t \leq 1 \Rightarrow p_{\min} = \frac{-2^3 + 1}{2} + 3 = -10$$

$$p_{\max} = \frac{1^3 + 1}{2} + 3 = 4$$

$\forall p \in [-10; 4] \exists x$, удовлетворяющий уравнению

$$2p = (2t-1)^3 + 1 + 6; (2t-1)^3 = 2p - 7; 2t-1 = \sqrt[3]{2p-7};$$

$$t = \frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2}; \cos x = \frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2}; x = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2} \right) + 2\pi n,$$

$n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $p \in [-10; 4]; x = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

10. $\frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE}$, т.к. AF - медиана $\triangle ACE$

11. $\triangle ADC \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{CD}{DE}, \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{ED} \Rightarrow \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AE} = \left(\frac{CD}{ED}\right)^2$

$$\frac{AC}{AE} = \left(\frac{CD}{ED}\right)^2 \Rightarrow \frac{CF}{FE} = \left(\frac{CD}{ED}\right)^2 \Rightarrow \frac{CD}{ED} = \frac{3}{5}$$

Ответ: $\frac{3}{5}$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

Очевидно, что для любой из возможных симметрий необходимо наличие пар ^{клеток} ~~клеток~~, составляющих симметрию. Одну из этих этих клеток в паре можно выбрать произвольно, а вторая однозначно определится. Таким образом, из 8 клеток можно выбрать 4, а остальные подберутся однозначно.

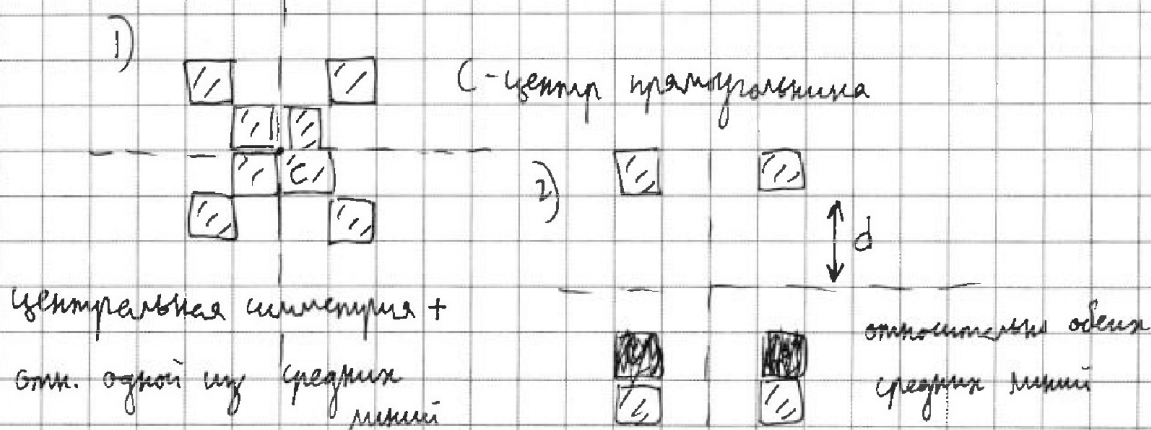
Всего клеток в прямоугольнике: $N = 150 \cdot 200 = 30000$

Значит, способов выбрать 4 клетки: $N_1 = C_{30000}^4$

Рассмотрим ситуацию, когда одновременно выполняется условие разных симметрий.

Можно заметить, что возможен случай выполнения либо одной из них, либо всех сразу.

Пример-иллюстрация так последнего случая:





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом, невозможен случай, когда две из симметрий выполняются, а третья — нет.

Найдём количество вариантов совпадения симметрий.

Теперь клетки, которые нужно закрасить, разбиваются на две группы по 4 клетки; положение каждой из групп выбирается произвольно.

П.ч. одна из сторон прямоугольника меньше другой, максимум

смещение миним из двух клеток симметричных отн. средней линии клеток d_1 может принимать значения $d \in [0; 74]$ вдоль одной стороны и $d \in [0; 99]$ вдоль другой стороны

Общее число способов выбрать d_1 и d_2 для двух групп клеток по обеим сторонам равно: $N_2 = C_{75}^2 \cdot C_{100}^2$

Число способов закрасить клетки по одной из симметрий

$$N^* = 3 N_1 = 3 C_{30000}^4$$

Однако в это число способов ^{примого} дважды вошли случаи совпадения симметрий. Значит: $N = N^* - N_2 = 3 C_{30000}^4 - 2 C_{75}^2 \cdot C_{100}^2$

Ответ: $3 C_{30000}^4 - 2 C_{75}^2 \cdot C_{100}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

Пусть p -простое число

$$(a-c)/(b-c) = p^2 \Leftrightarrow$$

Заметим, что системы

I, VI не подходят под

целые $a > b$.

$$\text{II} \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = p & \text{I для } a, b, c \in \mathbb{Z} \\ b-c = p \\ a-c = p^2 & \text{II} \\ b-c = 1 & \text{III} \\ a-c = 1 & \text{IV} \\ b-c = p^2 & \text{V} \\ a-c = -1 & \text{VI} \\ b-c = -p^2 & \text{VII} \\ a-c = -p & \text{VIII} \\ b-c = -p & \text{IX} \end{cases}$$

$a-b = p^2-1; a-b = (p-1)(p+1)$, для чисел $p-1, p, p+1$ верно, что хотя

бы одно из них кратно трём. Если $(p-1)(p+1) \not\equiv 3 \Rightarrow p \not\equiv 3$, но

p -простое число $\Rightarrow p=3$

$$a-b=8; a=b+8$$

$$a+b^2=820 \Rightarrow b+8+b^2=820; b^2+b-812=0$$

$$D=1+3248=3249=9 \cdot 361; b_1 = \frac{-1+3 \cdot 19}{2} = 28, b_2 = -29$$

$$a_1=36, a_2=-21, \text{ так } c=b-1 \Rightarrow c_1=27, c_2=-30$$

$(36; 28; 27), (-21; -29; -30)$ - подходят

$$\text{III} \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b=1-p^2, \text{ но } p^2 \geq 4 \Rightarrow a < b - \text{ не подходит под целые}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{IV} \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$$

$$a-b=p^2-1 \Rightarrow a-b=8 \Rightarrow a=b+8; \text{аналогично решению системы II}$$

$$a_1=36, b_1=28, a_2=-21, b_2=-29$$

$$c=a+1 \Rightarrow c_1=37, c_2=-20 \quad (36; 28; 37), (-21; -29; -20)$$

↑
подходит

$$\text{V} \begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases}$$

$$a-b=-p^2+1 < 0 \quad - \text{не подходит по условию задачи}$$

$$\text{Ответ: } (36; 28; 37), (-21; -29; -30), (36; 28; 37), (-21; -29; -20)$$

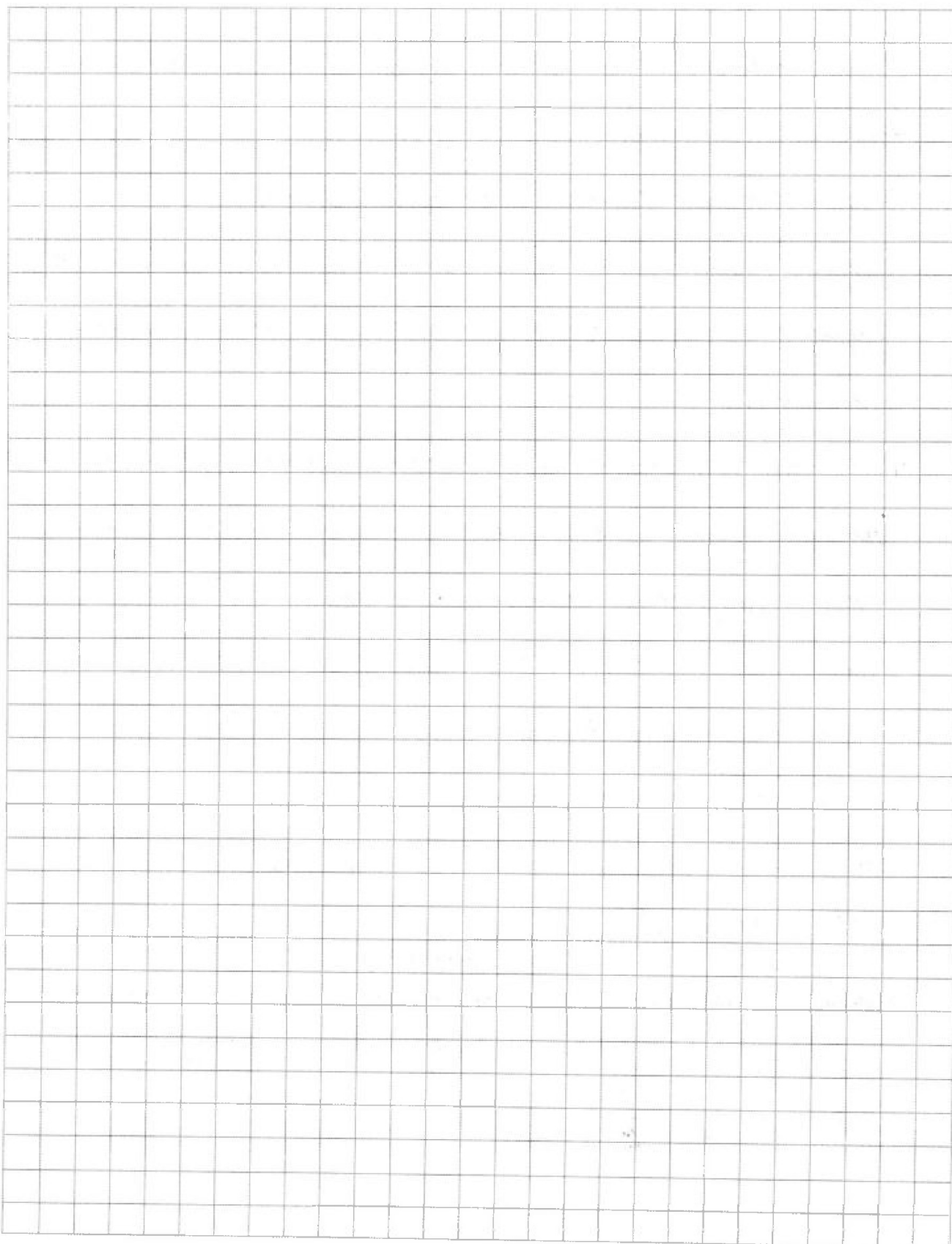


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



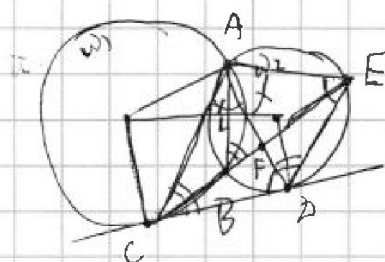


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{SD}{ED} = \frac{CF}{FE} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \quad \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$$

$$\frac{AG}{AD} = \frac{AF}{AE}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CD}{DE}; \quad \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE} \quad \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$$

$$a-b = p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \quad p-1, p, p+1 \quad \text{сумма кратно } 3 \Rightarrow p \div 3 \Rightarrow p=3$$

$$a-b=8; \quad a=8b \quad b^2+8b-810=0; \quad 810=40 \cdot 205=4 \cdot 5 \cdot 41=4 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 3$$

$$a=8+b; \quad 8+b^2+b=810; \quad b^2+b-810=0; \quad 810=4 \cdot 205 \quad \begin{matrix} 812 \\ 4 \\ \hline 3248 \end{matrix}$$

$$b = \frac{-1 \pm 3 \cdot 19}{2}$$

$$\begin{cases} -1-57 = -29 \\ -1+57 = 28 \end{cases} \quad \begin{matrix} 19 \\ 3 \\ \hline 57 \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} 9 \\ 15 \\ \hline 19 \end{matrix}$$

$$a_1 = -21; \quad a_2 = 36$$

$$c_1 = -30; \quad c_2 = 24$$

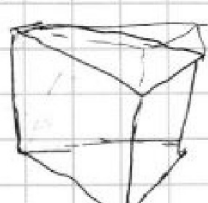
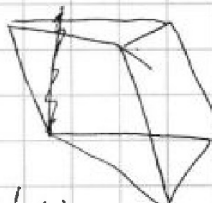
$$(-21; -29; -30) \quad (36; 28; 27)$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 11 \\ 13 \\ 31 \end{matrix}$$

$$(2t+1)^3$$

$$(2t+x)^3 = 8t^3 + 3 \cdot 2t^2x + 3 \cdot 2tx^2 + x^3$$



$$= 8t^3 +$$

$$(2t+1)^3 = 8t^3 + 12t^2 + 6t + 1$$

$$(2t+1)(4t^2+4t+1) =$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t = \frac{(2t+1)^3 - 1}{2}$$

$$(2t+1)^3 - 1 + 6 = 2p; \quad 2t+1 = \sqrt[3]{2p-5}; \quad t = \frac{\sqrt[3]{2p-5} - 1}{2}$$

$$2t+1 = \sqrt[3]{2p-5};$$

$$t = \frac{\sqrt[3]{2p-5} - 1}{2};$$

$$2p = (2t+1)^3 + 5$$

$$p = \frac{(2t+1)^3 + 1}{2} + 3; \quad p \leq 16$$

$$\frac{2(1)}{2} + 3 = 16$$

$$(2t-1)^3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{5-x-3z} + 6 + 2\sqrt{y-2x-x^2+z} & \sqrt{x+4} - \sqrt{5-x-3z} + 6 + 2\sqrt{y-(x+1)^2-1+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{(15-z)(15+z)} & (y-20)^2 + 4(y-35)^2 + 4|y-35||y-20| = 225 - z^2 \end{cases}$$

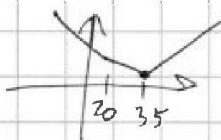
$$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p; \cos 3x = \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = 2k^3 - k - 2k + 2k^3 = 4k^3 - 3k$$

$$4t^3 - 3t + 6t = 3(2t^2 - 1) + p; 4t^3 + 3t = 6t^2 - 3 + p; 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x; 2\cos 4x \cos x + 6\cos x = 3\cos 2x + p \quad (a+b)(\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + c) = d$$

$$f = |y-20| + 2|y-35|$$

$$z=0; y=$$



$$|y-20| + 2|y-35| \quad f_{\min} = \dots$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(x+4)(5-x)}$$

$$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p;$$

$$2\sqrt{(x+4)(5-x)} = -(\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x})^2 + x+4+5-x = -(\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x})^2 + 12$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 4 \\ \hline 112 \\ 81 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 5 \\ \hline 180 \\ 524 \end{array}$$

$$a+b^2=820$$

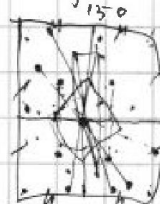
$$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \dots$$

$$\begin{cases} a-c=b-c=p \\ b-c=1; c=b-1 \\ a-c=p^2 \\ a-c=p \quad a-c=b-1 \\ b-c=-p \end{cases}$$

$$c = \frac{a+b}{2}$$

$$a+b^2=820$$

$$a-b=p^2-1 \neq 3m, m \in \mathbb{Z}$$



$$f' = 12t^2 - 12t + 3$$

$$4t^2 - 4t + 21 = 0$$

$$(2t-1)^2 = 0$$



$$t \in [-1; 1]$$

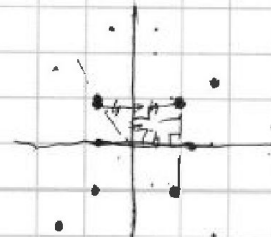
$$f_{\min} = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$$

$$f_{\max} = 4 - 6 + 6 = 4$$

$$4\cos^3 x + 5\cos x = 3\cos 2x + p$$

$$4\cos^3 x = 6$$

$$4 - 6 + 3 = 1$$



Омн. комм. для озн. из 2-х