



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}, \text{ девятый член равен } x + 3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) ~~Реш~~ b - св. член реак. пр.

k - конст. герм. протр.

$\Downarrow$

$$k^6 b = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$k^8 b = x+3$$

$$k^{14} b = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$x \neq -6$$

$$x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$$

Заметим, что если $x = \frac{9}{25}$;

$$\text{то } k^6 b = 0 \text{ и } k^{14} b = 0$$

$$k^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^4 \cdot 25x-9}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(x-6)^4}} = \frac{1}{(x-6)^2}$$

$$\begin{aligned} & \text{мыт, м.к. } k^8 b \\ & \frac{1}{(x-6)^2} \quad k^6 b \neq 0 \\ & \quad \quad \quad k^{14} b \neq 0 \end{aligned}$$

$$k^8 = \frac{1}{(x-6)^2} \Rightarrow k^8 b = \frac{x+3}{(x-6)^2}$$

$\Downarrow$

$$k^8 b = x+3$$

$\Downarrow$

$$b = \frac{x+3}{(x-6)^2} (x+3)(x-6)^2$$

$\Downarrow$
или k , или b равно 0,
но тогда и $k^8 b = 0$,
а у нас $k^8 b = x + \frac{9}{25}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \pm \frac{9}{(x-6)^2}$$

$$b = (x+3)(x-6)^2$$

$$b \geq 0; \text{ т.к. } k^2 b \geq 0$$

$$\Downarrow \\ x \geq -3$$

$$x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty)$$

$$\Downarrow \\ x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty)$$

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} = 0$$

$$(x \neq 6; \text{ т.к. тогда } b=0 \Rightarrow k^2 b \neq 0) \parallel$$

$$\sqrt{-84 \cdot (-9)} = 0$$

↑
против



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
/ ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p(\cos 3x) + 3(p+4)\cos x = 6\cos^2 x + 10$$

$$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + 3p\cos x + 12\cos x = 12\cos^2 x - 6 + 10$$

$$4p\cos^3 x - 12\cos^2 x + 12\cos x - 4 = 0$$

$$p\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$$

$$p\cos^3 x = 3\cos^2 x - 3\cos x + 1$$

$$\cos x \neq 0$$

(нет деления на 0)

$$p = \frac{3}{\cos x} - \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^3 x}$$

$$t = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow t \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$$

$$p = t^3 - 3t^2 + 3t$$

$$f(t) = t^3 - 3t^2 + 3t$$

$$f'(t) = 3t^2 - 6t + 3$$

$$f'(t) = 3(t^2 - 2t + 1)$$

$$f'(t) = 3(t-1)^2$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 1$$



Функция возрастает всегда

$$f(-1) = -7$$

$$f(1) = 1$$

Построили примерный график (не точный)



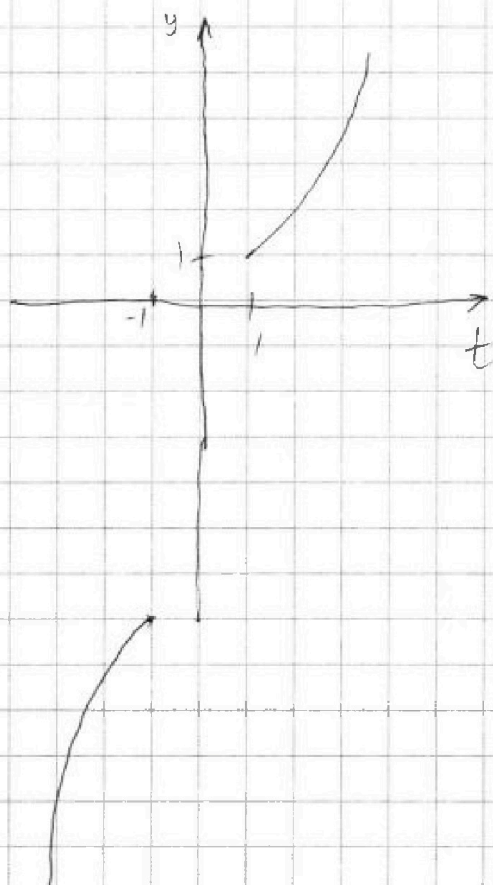
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



p - константа



у уравнения

$p = f(t)$ есть решения,

когда $p \in (-\infty; -1] [1; +\infty)$

и/к т.к. t при этом

$\in (-\infty; -1] [1; +\infty)$, то

~~также~~ $\frac{1}{\cos x} \in (-\infty; -1] [1; +\infty)$



$\cos x \in [-1; 1] [1; 0) (0; 1]$



x можно либо не
найти вообще

Теперь решим уравнение с такими p

$$p^2 t^3 - 3t^2 + 3t$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1$$

$$p \cos x = 3 + 3 \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos^3 x}$$

$$\cos x \neq 0$$

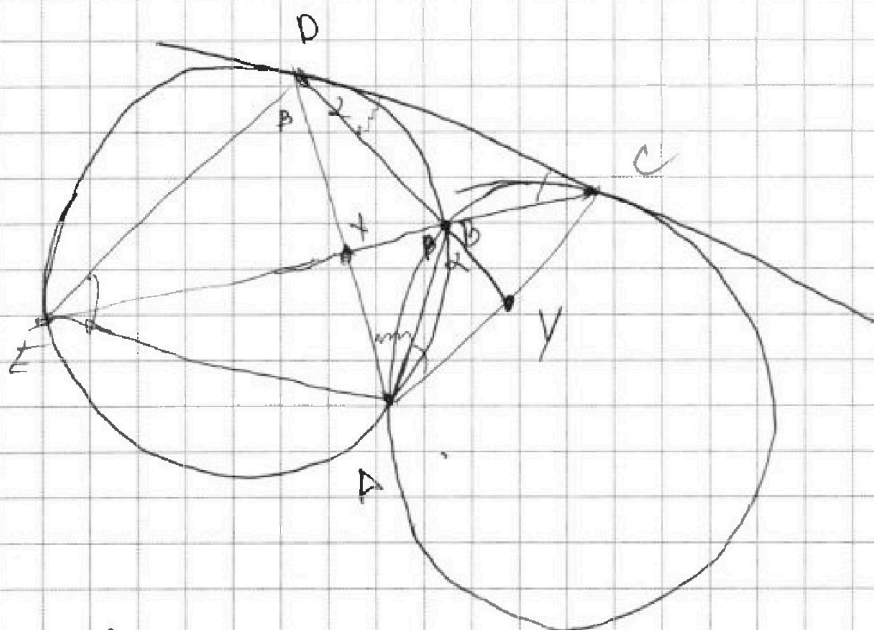


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CX}{XE} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{ED}{CD} = ?$$

Пусть $\angle CDA = 2$

$\angle ADE = \beta$, тогда

$\angle AED = 2$ (св-во касат.)

$\angle ABX = \beta$ (впис. угол на одну дугу)

Прямые DB за т. B $\Rightarrow$ вписанные т. пересечения с AC - Y

тогда $\angle ABY = 2$ (из вписанных ABDE)

из св-ва касат.

$$\left. \begin{aligned} \angle CDY &= \angle BAX \\ \angle DCX &= \angle BAY \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\angle CDY + \angle DCX = \angle DAC$$

$$\begin{aligned} 180 - \angle CBD &= 180 - \angle XBY = 180 - \angle ABY - \angle ABX = \\ &= 180 - 2 - \beta \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle DAC = 180 - \alpha - \beta = \angle EAD \Rightarrow \text{Ах - бисс. в } \triangle EAC$$

$$\Rightarrow \text{по ЗСБ } \frac{AE}{AC} = \frac{EX}{XC} = \frac{5}{2}$$

$$\triangle EAD \sim \triangle DAC \quad (\text{из равенства углов } \angle DEA = \angle CDA, \angle DAC = \angle EAD)$$

$$\frac{ED}{DC} = \frac{EA}{AD} = \frac{AD}{AC}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \left(\frac{AD}{AC} \right)^2 = \frac{5}{2}$$

$$\frac{AD}{AC} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\text{Отв: } \sqrt{\frac{5}{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте посчитаем те точки, которые симметричны относительно центра этого прямоугольника.

Заметим, что каждой ^{клетке} точке соответствует лишь одна ^{клетка} точка, симметричная данной отн. центра. тогда разобьем ~~на пары~~ ^{эти} все клетки на пары симметр. отн. центра ^{клетки}, и будем выбирать 4 из этих пар.

тогда получается а мы можем это сделать C_{20000}^4 способами (20000 ^{это кол-во} ~~пар~~ ^{параметров} ~~пар.~~)

Аналогично если мы будем брать симметрично относительно ср. линии, мы ~~тоже~~ разобьем все клетки на 20000 пар симметричных и выберем 4 из них, это будет C_{20000}^4 для каждой из двух ср. линий.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

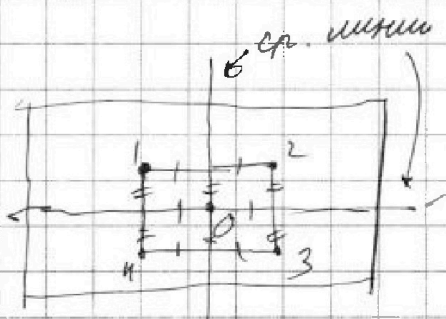
СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мы посчитали $3 \cdot C_{20000}^4$ способов, но мы посчитали несколько раз те случаи, когда множество симметрично относительно 2-х объектов из 3-х (под объектом подразумеваются центры ^{прям} линий, его середину). Давайте докажем, что если множество симметрично относительно 2-х объектов, то оно симметрично относительно третьего.

1) Пусть оно симметрично относительно двух середин, рассмотрим одну клетку так:

(на рисунках будут отмечены центры клеток)



мы рассматривая одну клетку получили ещё 3 (ост. и будут иметь подобный образ)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

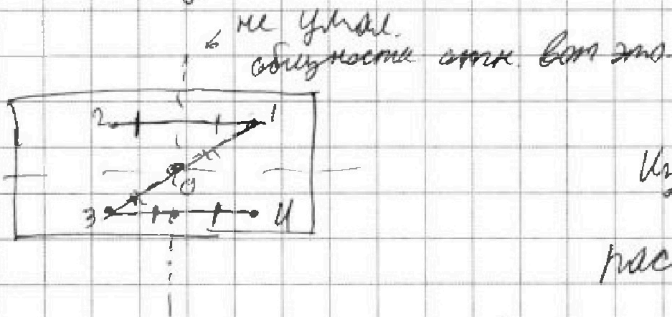
СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что ср. линии пересекаются в центре трап. и заметим что 1 и 3 симм. отн. O (из свойств трап. 1234), аналогично для 2 и 4

$\Rightarrow$ т.к. для ост. 4 точек всё так же, то mn -ство симметрично O .

2) Пусть mn -ство симметрично отн. O и одной из ср. линий:



из mn -отн. O

расстояние от точек

1 и 3 до ср. линии одинаково

$$\Rightarrow \text{отр. } 34 = \text{отр. } 21$$

1 - отн. 4
2 - отн. 3 $\leftarrow$ отн. оставшиеся

(для оставшихся 4 точек рассуждения такие же)

$\text{отр. } 23 = \text{отр. } 14 \Rightarrow \text{отн. т. } 3 \text{ и } 2$
до отн. ср. линии
расст. одинаковое
(так и для точек 1 и 4)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐

1

☐

2

☐

3

☐

4

☒

5

☐

6

☐

7

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что все такие ин-ства - это прямоугольники с центром O и вершинами в клетках, тогда их посчитают так:

разобьем прямоугольник исходный на 4 части средними линиями.

выберу 1 из этих частей и поставлю там 2 точки.

по этим 2м построю прямоугольник нужные (будет отмечено 8 точек)

$\Rightarrow$ способов такие ин-ства выб-

рать C_{10000}^2

$\Rightarrow$ в 3 C_{20000}^4 мы посчитали такие ин-ства

ва 3 раза, а нам надо 1

ответ: $3C_{10000}^4 - 2C_{10000}^2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6)
 $(a-c)(b-c) = p^2$

$a-c; b-c \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ у квадрата простого числа
целых делителей 6:

$\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nwarrow \\ \swarrow \end{matrix} \quad p; p^2; 1; -p; -p^2; -1$

$$(a-c)(b-c) = p$$

$$(a-c) = p$$

$$\text{или } (a-c) = -p^2$$

$$(a-c) = p^2$$

$$(a-c) = -p^2$$

$$(a-c) = 1$$

$$(b-c) = p$$

$$(b-c) = -p$$

$$(b-c) = 1$$

$$(b-c) = -1$$

$$\text{или } (b-c) = p^2$$

$$\text{или } (a-c) = -1$$

$$(b-c) = -p^2$$

$$(a-c) = p$$

и

$$(a-c) = -p$$

$$(b-c) = p$$

$$(b-c) = -p$$

не подх.; т.к. тогда $a=b=c=p$
а у нас $a < b$

$$(a-c) = p^2$$

и

$$(a-c) = -1$$

$$(b-c) = 1$$

$$(b-c) = -p^2$$

не подх.; т.к. тогда:
 $(p^2 > 1)$, т.к. $|p| \geq 2$

$$a = c + p^2$$

$$b = c + 1 \Rightarrow a > b$$

против

$$a = c - 1$$

$$b = c - p^2$$

$a > b$ против.

рассмотрим случай $(a-c) = -p^2$
 $(b-c) = -1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☒ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = c - p^2$$

$$b = c - 1$$

$$\Rightarrow b - a = p^2 - 1$$

Если

квадрат числа,
не :3, дает ост.

$$\Rightarrow p : 3 \text{ (иначе } b - a : 3)$$

$$a^2 + b = 710$$

$$(c - 9)^2 + (c - 1) = 710 \quad \sqrt{\quad}$$

$$c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 710$$

$$c^2 - 17c - 630 = 0$$

$$D = 17^2 + 630 \cdot 4 = 289 + 2520 = 2809 = 53^2$$

$$c = \frac{17 \pm 53}{2} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 35 \\ c_2 = -18 \end{matrix}$$

$$p^2 = 9$$

$$b - a = 8$$

$$a = c - 9$$

$$b = c - 1$$

Теперь рассмотрим случаи,
когда

$$c = 35$$

$$c = 35$$

$$b = 34$$

$$a = 26$$

$$c = -18$$

$$b = -19$$

$$a = -27$$

$$(a - c) = 1$$

$$(b - c) = p^2$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} b - a = \\ a = c + 1 \\ b = c + p^2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow b - a = p^2 - 1$$

как и в пред.

случае

$$p^2 = 9$$

$$a = c + 1$$

$$b = c + 9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(c+1)^2 + c + 9 = 710$$

$$c^2 + 3c + 10 = 710$$

$$c^2 + 3c - 700 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 700 = 2809 = 53^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 53}{2} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 25 \\ c_2 = -28 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} c = 25 & c = -28 \\ b = 34 & b = -19 \\ a = 26 & a = -27 \end{matrix}$$

$$\text{Imb: } \begin{matrix} (26; 34; 25) \\ (26; 34; 35) \end{matrix}$$

$$(-27; -19; -18)$$

$$(-27; -19; -28)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

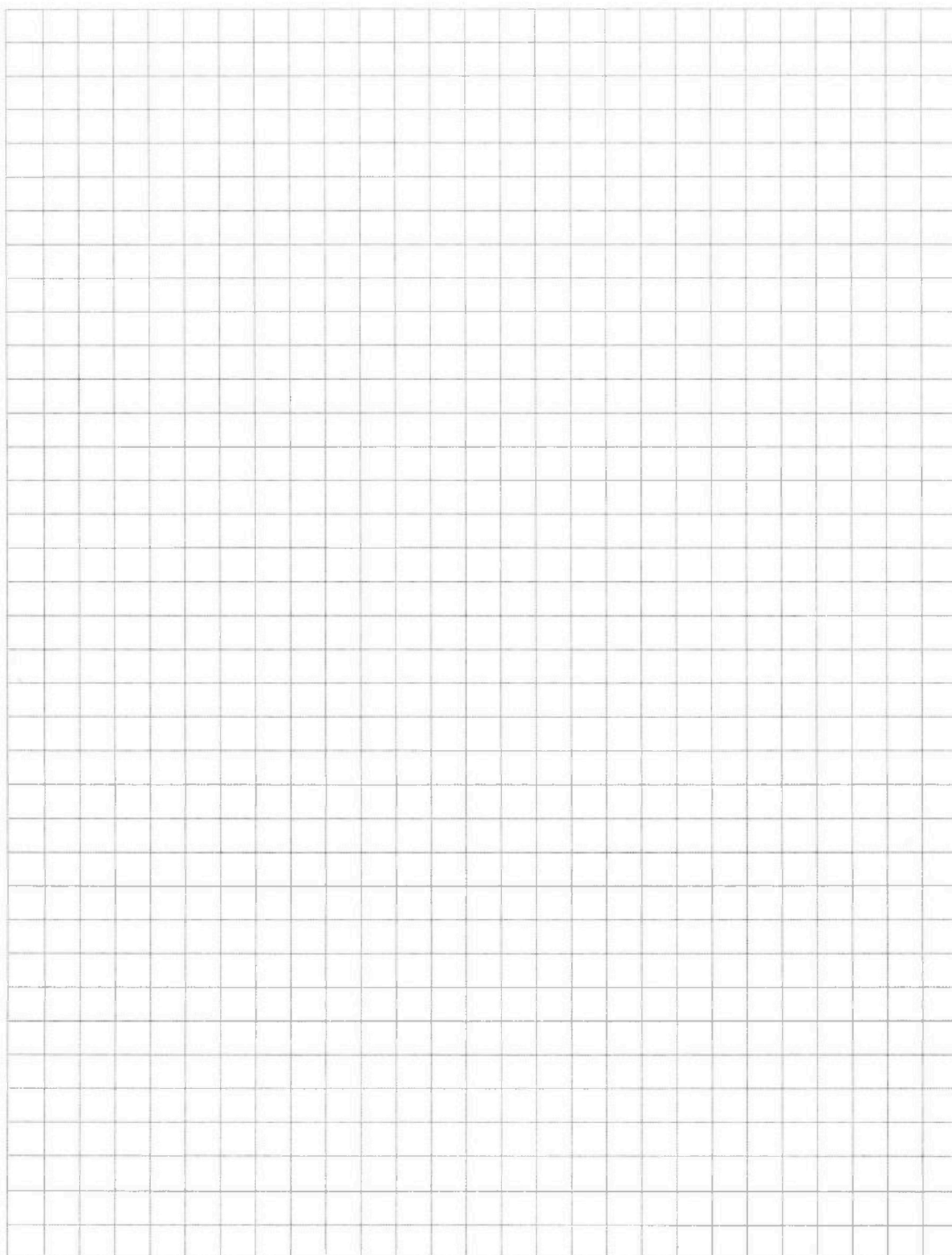
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos^3 = 3 \cos^2 - 3 \cos + 1$$

$$p \cos^2 = 3 \cos - 3 + \frac{1}{\cos}$$

$$p(\cos^2 \cos - 3 \sin^2 \cos) = t(t^2 - 3t + 3)$$

$$p \cos = 3 - 3 \frac{1}{\cos} + \frac{1}{\cos^2}$$

$$p \cos^3 - 3 \cos^2 + 3 \cos + 1 = 0$$

$$\cos^3 - \frac{3}{p} \cos^2 + \frac{3}{p} \cos + \frac{1}{p} = 0$$

$$\cos(\cos^2 + \frac{3}{p})$$

$$\frac{3}{p} \cos$$

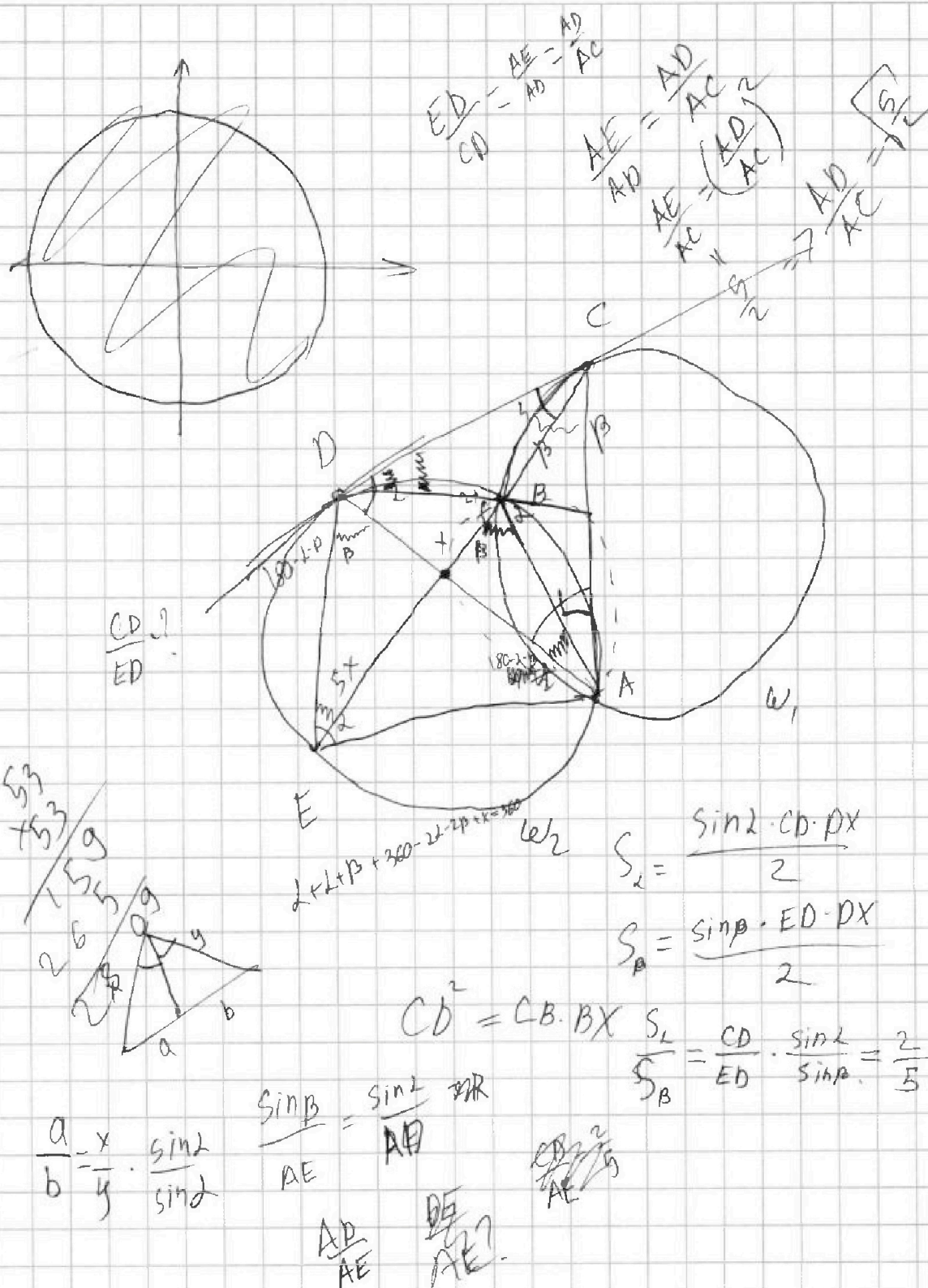


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2\cos^2 x - 1}$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \frac{2\cos^2 2x}{2} \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \cos x (2\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = \\ &= \cos x (2\cos^2 x - 1) = \cos x (4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

$$p(2\cos x (2\cos^2 x - 1)) + 3(p+4)\cos x = 6\cos 2x + 10$$

$$2p\cos x \cos 2x + (p+12)\cos x = 6\cos 2x + 10$$

$$(2p\cos x - 6)\cos 2x + (p+12)\cos x = 10$$

##

$$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + (3p+12)\cos x = 6(\cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p\cos^3 x - 3p\cos x + 3p\cos x + 12\cos x = 12\cos^2 x + 4$$

$$p\cos^3 x + 3\cos x = 3\cos^2 x + 1$$

$$\cos x = t$$

$$(p-3)t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$D = 9 - 4(p-3) = 4p - 3$$

$$4p - 3 \geq 0$$

$$p \neq 3$$

$$\frac{-3 + \sqrt{4p-3}}{2p-6} \leq 1$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{4p-3}}{2p-6}$$

$$\frac{-3 - \sqrt{4p-3}}{2p-6} \geq -1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + (3p+2)\cos x = 6(2\cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p\cos^3 x + 3p+2\cos x = 12\cos^2 x + 4$$

$$p\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 4 = 0$$

$$p\cos^3 x - 4 = 3\cos x(\cos x - 1)$$

$$\cos x \neq 0$$

$$\cos x = t \in (0; 1]$$

$$p = \frac{4 + 3\cos^2 x - 3\cos x}{\cos^3 x}$$

$$-3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$$p = \frac{4}{\cos^3 x} + \frac{3}{\cos x} - \frac{3}{\cos^3 x}$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$$

$$p = 4t^3 - 3t^2 + 3t$$

$$p' = 12t^2 - 6t + 3$$

$$\frac{1}{\cos x} = t$$

- ① 3
- ③ 5
- ⑤ 4
- ⑥ 4
- ⑦ 5

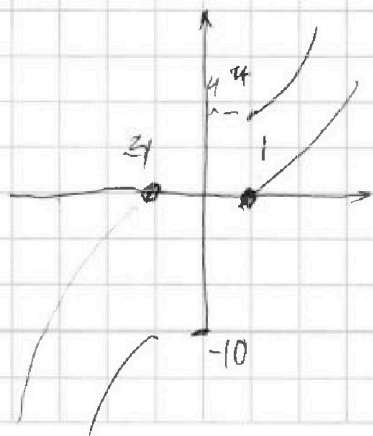
$$4t^2 - 2t + 1$$

$$(2t - 1)^2$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$D = 36 - 12 < 0$$

$$21/31$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

b

kb

$$k^6 b = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$k^8 b = x+3$$

$$k^{14} b = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$k^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{(25x-9)(x-6)}} = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^4}} = \frac{1}{(x-6)^2}$$

$$k^8 = \frac{1}{(x-6)^2}$$

$$\frac{1}{(x-6)^2} b = x+3$$

$$b = (x+3)(x-6)^2$$

$$k = \sqrt[8]{\frac{1}{(x-6)^2}}$$

$$x > 3$$

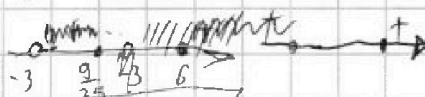
$$x > 6$$

$$x = -1$$

$$x > 6$$

$$x > 6$$

$$(25x-9)(x-6)$$



$$\sqrt{36 \cdot 7}$$

$$\sqrt{\frac{36}{x^3}}$$

$$b = 2 \cdot x^2$$

$$k = \sqrt[8]{\frac{1}{(x-6)^2}}$$

$$k^8 = \frac{1}{(x-6)^2}$$

$$x \in \left(3, \frac{9}{25}\right) \cup (6, \infty)$$



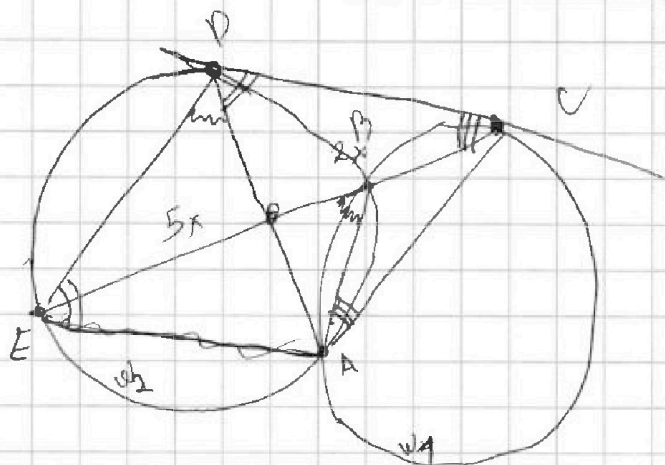
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

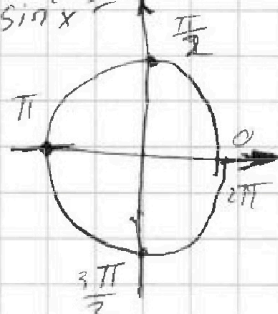


$\frac{ED}{CD} = ?$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \sin^2 x - \cos^2 x = \\ &= 1 - 2 \cos^2 x = \end{aligned}$$

$$\rightarrow \cos \pi = \sin^2 \frac{\pi}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$



$$\cos(3x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$\cos 3x = \cos x - 2 \cos^3 x - 2 \sin^2 x \cos x =$$

$$= \cos x (1 - 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x) = \cos(2x + x) = \sin 2x \sin x - \cos 2x \cos x$$

$$= \cos x (1 - 2) = -\cos x$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin \pi \sin \frac{\pi}{2} - \cos \pi \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = \sin 2\pi \cdot \sin \pi - \cos 2\pi \cdot \cos \pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$(a-c) = 1 \quad -1$$

$$(b-c) = p^2 \quad -p^2$$

$$a-c = c+1$$

$$\Leftrightarrow b = c + p^2 + 1$$

$$\begin{matrix} c-1 \\ \times \\ c-p^2 \end{matrix}$$

$$b-a = p^2 = 1 \Rightarrow p = 3$$

$$a = c+1$$

$$\Leftrightarrow b = c+9$$

$$c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 710$$

$$c^2 + 3c - 700 = 0$$

$$D = 9 + 2800 = 2809 = 53^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 53}{2} \Rightarrow \begin{matrix} c = 25 \\ c = -\frac{56}{2} = -28 \end{matrix}$$

$$3 \cdot C_{\text{всего}}^4 - C_{\text{всего}}^2 \frac{C_{\text{всего}}^2}{4} - 2 \frac{C_{\text{всего}}^2}{4} + C_{\text{всего}}^2 \frac{C_{\text{всего}}^2}{4}$$

$$3 C_{\text{всего}}^4 - \frac{C_{\text{всего}}^2}{4} - 2 \frac{C_{\text{всего}}^2}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a^2 + b = 710$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} a-c &= p \\ b-c &= p \end{aligned}$$

$$a=b$$

p - простое

$$(a-c) = p^2 = -p^2$$

$$(b-c) = 1 = -1$$

$$p^2 + c$$

$$1 + c$$

$$b-c=1$$

$$b=c+1$$

$$a-c=p^2$$

$$a=c+p^2$$

$$b=c+1$$

$$p^2 > 1$$

$$a > p$$

$$b-c=c$$

$$\begin{array}{r} 53 \\ \times 53 \\ \hline 159 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 285 \\ \times 9 \\ \hline 2809 \end{array}$$

$$a-c = -p^2$$

$$b-c = -1$$

$$b=c-1$$

$$a = c - p^2$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 12 \\ \hline 119 \\ 112 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 53 \\ -17 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$c^2 - 17c + 630 = 0$$

$$D = 17^2 + 4 \cdot 630 = 289 + 2520 = 2809 = 53^2$$

$$c = \frac{17 \pm 53}{2} = \begin{cases} c=35 \\ c=18 \end{cases}$$

$$b-a = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

$$p=3$$

$$p=3$$

$$p=3$$

$$(c-9)^2 + c - 1$$

$$c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 710$$

$$c^2 - 17c + 80 = 710$$

$$b=c-1$$

$$p=c-9$$