



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть b - первый член геом. прогрессии, q - знаменатель этой прогрессии, b_i - i -ый член геом. прогрессии, тогда $b_7 = bq^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, $b_{13} = bq^{12} = 5-x$, $b_{15} = bq^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0 & (1) \\ (13x-35)(x+1) \geq 0 & (2) \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$

(1): $x \in (-\infty; -1) \cup [\frac{35}{13}; +\infty)$

(2): $x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{35}{13}; +\infty)$

ОДЗ: $x \in (-\infty; -1) \cup [\frac{35}{13}; +\infty)$

Из (*) $\Rightarrow bq^6 \geq 0$; так $q^6 \geq 0$, то $b \geq 0$

Если $b \geq 0$ или $q \geq 0$, то $b_{13} = 5-x \geq 0$ и $b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = 0$

тогда $x \geq 5$ и $\begin{cases} x \geq \frac{35}{13} \\ x \geq -1 \end{cases}$ - невозможно выполн. одновременно

тогда $b > 0$, $q \neq 0$. Значит, $bq^{12} > 0 \Leftrightarrow 5-x > 0 \Leftrightarrow x < 5$ (*)

так $b \neq 0$, $q \neq 0$, то $x \neq \frac{35}{13}$. $b^2 q^{12} = \frac{13x-35}{(x+1)^3} (3)$, $b^2 q^{24} = (5-x)^2 (4)$, $b^2 q^{28} = (13x-35)(x+1) (5)$

так $b \neq 0$, $q \neq 0$, то из (5):(4) $\Rightarrow q^4 = \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} (6)$

так $b \neq 0$, $q \neq 0$, то $\frac{b^2 q^{28}}{b^2 q^{12}} = \frac{(13x-35)(x+1)}{(13x-35)/(x+1)^3} = (x+1)^4 = q^{16} \Rightarrow$

$q^4 = x+1$ или $q^4 = -x-1$ (7)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

из (6) и (7) получаем, что $q^4 = \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2}$ и $\begin{cases} q^4 = x+1 \\ q^4 = -x-1 \end{cases}$

1) $q^4 = x+1$, тогда

$$\frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} = x+1 \quad /: (x+1) \neq 0 \text{ (из ДЗ)}$$

$$\frac{13x-35}{(5-x)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{13x-35-x^2+10x-25}{(5-x)^2} = 0$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 60 = 529 - 240 = 289$$

$$x_1 = \frac{23-17}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{23+17}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ (не удовлет. ДЗ)}$$

2) $q^4 = -x-1$

$$\frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} = -x-1 \quad /: (x+1) \neq 0 \text{ (из ДЗ)}$$

$$\frac{13x-35}{(5-x)^2} = -1 \Leftrightarrow \frac{13x-35+x^2-10x+25}{(5-x)^2} = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$D = 9 + 40 = 49$$

$$x_1 = \frac{-3-7}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-3+7}{2} = 2 \text{ (не удовлет. ДЗ)}$$

Проверка! 1) если $x=3$, то подставив значение во все уравнения, получим, что при $x=3$ существуют геом. прогресс с $b_1 = \frac{1}{4}$, $q = \sqrt{2}$ ($b_7 = \frac{1}{4}$, $b_{13} = 2$, $b_{15} = 4$)

2) при $x=-5$ существуют геом. прогрессии с $b_1 = \frac{5}{32}$, $q = \sqrt{2}$ ($b_7 = \frac{5}{4}$, $b_{13} = 10$, $b_{15} = 20$)

Ответ! $x=3$, $x=-5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+8} \quad (1)$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \quad (2)$$

Пусть $v = y+1$, тогда $y-12 = v-13$, тогда

$$|v| + 3|v-13| = \sqrt{169-z^2} \leq 13 \quad (2)$$

Заметим, что при любых v $|v| + 3|v-13| \leq 13$, т.к. $\sqrt{169-z^2} \leq \sqrt{169} = 13$

$$1) \quad v \geq 13 \Rightarrow |v| = v, |v-13| = v-13$$

$$v + 3v - 39 \leq 13 \Leftrightarrow 4v \leq 52 \Leftrightarrow v \leq 13$$

т.к. $v \geq 13$ и $v \leq 13$, то $v = 13$

$$2) \quad 0 \leq v < 13 \Rightarrow |v| = v, |v-13| = 13-v$$

$$v + 39 - 3v \leq 13 \Leftrightarrow -2v \leq -26 \Leftrightarrow v \geq 13 -$$

$$3) \quad v < 0 \Rightarrow |v| = -v, |v-13| = 13-v \quad \text{постороннее решение}$$

$$-v + 39 - 3v \leq 13 \Leftrightarrow -4v \leq -26 \Leftrightarrow v \geq \frac{13}{2} -$$

Тогда $v = 13$ — единственное возможное значение, тогда $y = 12$,
 $z = 0$ (т.к. рав-во $\sqrt{169-z^2} = |12| + 3|13-13| = 13 =$

$$= \sqrt{169-z^2} \Rightarrow 169-z^2 = 169 \Rightarrow z=0)$$

Подставив $y = 12, z = 0$ в (1):

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

Заметим, что $(x+3)(4-x) = 12+x-x^2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 4 \\ (x+3)(4-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; 4]$

Пусть $x+3 = t$, $t \geq 0$, тогда $4-x = 4-t$, тогда

$$\sqrt{t} + \sqrt{4-t} = 2\sqrt{t(4-t)} - 5$$

Допустиме предпоз. на ОДЗ:
Возведем обе части в квадрат:

$$t + 4 - t - 2\sqrt{t(4-t)} = 4t(4-t) - 20\sqrt{t(4-t)} + 25$$

$$4t(4-t) - 18\sqrt{t(4-t)} + 18 \geq 0$$

Пусть $\sqrt{t(4-t)} = k$, $k \geq 0$, тогда

$$4k^2 - 18k + 18 \geq 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 9k + 9 \geq 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 18 = 81 - 72 = 9$$

$$k_1 = \frac{9-3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$k_2 = \frac{9+3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Тогда $\begin{cases} t(4-t) = \frac{9}{4} \\ t(4-t) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12+x-x^2 = \frac{9}{4} \\ 12+x-x^2 = 9 \end{cases}$

1) $x^2 - x - \frac{39}{4} \geq 0$

$$D = 1 + 4 \cdot \frac{39}{4} = 40$$

$$x_1 = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2} = \frac{1-2\sqrt{10}}{2} < \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} < -3$$

$$x_2 = \frac{1 + 2\sqrt{10}}{2} < \frac{1+2}{2} = 4$$

2) $x^2 - x - 3 \geq 0$

$$D = 1 + 3 \cdot 4 = 13$$

$$x_3 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} > -3, \quad x_4 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} < 4$$

Из ОДЗ $\Rightarrow 2x \in [-6; 8]$. Заметим, что x_1, x_2, x_3, x_4 удовлетв. ОДЗ.

Ответ!

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1-2\sqrt{10}}{2} \\ x_2 = \frac{1+2\sqrt{10}}{2} \\ x_3 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$y = 12, z = 0$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2 \cos^2 x - 1) \cdot$$

$$\cos x - 2 \sin x \cos x \cdot \sin x = \cos x (2 \cos^2 x - 1 - 2 \sin^2 x) =$$

$$= \cos x (2 \cos^2 x - 1 - 2 + 2 \cos^2 x) = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

Тогда $4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$$

Пусть $\cos x = t$, $-1 \leq t \leq 1$, тогда

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

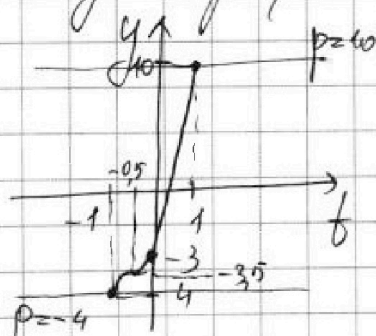
Пусть $y = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$, тогда $y'(t) = 12t^2 + 12t + 3 =$

$$= 3(4t^2 + 4t + 1) = 3(2t + 1)^2 \geq 0. \text{ М.к. } y'(t) \geq 0 \text{ при}$$

любым $-1 \leq t \leq 1$, то функция $y(t)$ возрастает

при $-1 \leq t \leq 1$ (точка перегиба при $t = -\frac{1}{2}$)

Тогда график $y = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$ имеет вид:



$$y(1) = 10, y(0) = -3, y(-1) = -4$$

$$y(-\frac{1}{2}) = -3.5$$

Тогда где $4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$ имеет место дв. решение при $p \in [-4; 10]$, причем при каждом p $\cos x$ определяется по графику $y(\cos x)$ и имеет одно значение

Ответ: $p \in [-4; 10]$.



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
□3
☐

4

5

☐

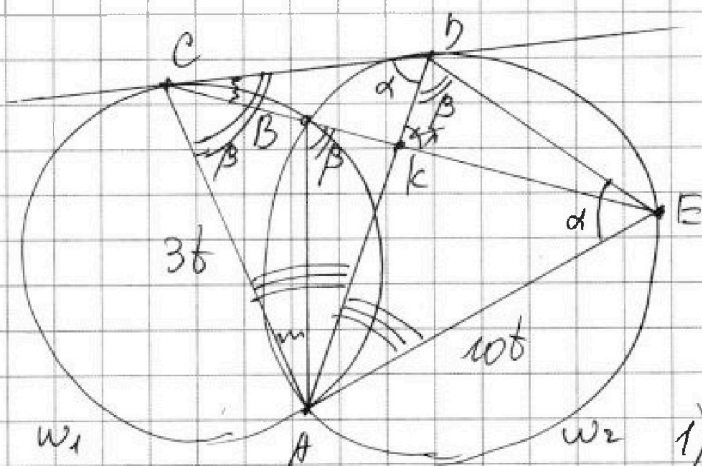
6

7
□

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $AD \cap CE = K$,

morgan $\frac{CK}{KE} = \frac{3}{10}$

Рис. $\angle CDA = \alpha$,

$$\angle ADE = \beta, \text{ maka}$$

1) $\angle CBA = \angle DEA$, так как $CD \parallel DE$ и $CB \parallel DE$

2) $\angle ADE = \angle ABE = \beta$, т.к. $\square ABDE$ - вписан

3) $\angle CAB = \angle CBA$, т.к. CB - перпенд. к WA

4) Из т. 1 о внеш. угле $\triangle ABC$: $\angle ABE = \angle BAC + \angle BCA = \angle DCB + \angle BCA = \angle DCA = \beta$

8) Так $\angle CDA = \angle BEA = \alpha$, $\angle ACP = \angle ABE = \beta$, то

$$\triangle ACB \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE} (*), \angle CAK = \angle DAE$$

9) $\angle AKC = \angle KAE$, но по теме о ~~дугах~~ ~~дугах~~ $\Rightarrow$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{3}{10}$$

Длина $AC = 36$, $AE = 106$,

morgan $ug(x) \Rightarrow \frac{3b}{Ab} = \frac{10\%}{10\%} \frac{AB}{ab} = \frac{cH}{DE}$

$$(10) \frac{36}{AB} = \frac{AD}{108} \Rightarrow AB^2 = 308^2 \Rightarrow AB = \sqrt{308} \Rightarrow \frac{96}{AB} = \frac{36}{\sqrt{308}}$$

Therefore, $\frac{ED}{CD} = \frac{AD}{3\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{3\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$

Ans: $\frac{\sqrt{30}}{3}$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a > b \\ a - b \not\equiv 3 \\ (a - c)(b - c) = p^2, p - \text{простое} \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

П.к $a > b$, то $a - c > b - c$; тогда если $(a - c)(b - c) = p^2$,

p -простое число, то $\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -p^2 \end{cases}$

Если $\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = -1 \end{cases}$, то $a \leq b$ - против

Если $\begin{cases} a - c = p \\ b - c = p \end{cases}$ или $\begin{cases} a - c = -p \\ b - c = -p \end{cases}$, то $a = b$ - против

$$1) \begin{cases} a = c + p^2 \\ b = c + 1 \end{cases} \Rightarrow a - b = p^2 - 1$$

П.к $p^2 \equiv 0 \pmod{3}$ или $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, то $p^2 - 1 \equiv 2 \pmod{3}$ или $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$

П.к $a - b \not\equiv 3$, то $p^2 - 1 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p \geq 3$

$$a = c + 9, b = c + 1 \Rightarrow a + b^2 = c + 9 + c^2 + 2c + 1 = 560$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0$$

$$D = 9 + 550 \cdot 4 = 2209 = 47^2$$

$$c_1 = \frac{-3 - 47}{2} = -25; c_2 = \frac{-3 + 47}{2} = 22$$

Тогда тройки: $(-16; -24; -25), (31; 23; 22)$

$$2) \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases} \Rightarrow a - b = p^2 - 1. \text{ П.к } a - b \not\equiv 3, \text{ то аналогично}$$

п. 1, получаем, что $p \geq 3$, тогда $a = c - 1, b = c - 9 \Rightarrow$
 $a + b^2 = c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 560 \Rightarrow c^2 - 17c - 480 = 0$

$$D = 289 + 4 \cdot 480 = 2209 = 47^2$$

$$c_1 = \frac{17 - 47}{2} = -15; c_2 = \frac{17 + 47}{2} = 32. \text{ Тогда тройки: } (-16; -24; -15), (31; 23; 32)$$

Ответ: $(-16; -24; -25), (31; 23; 22), (-16; -24; -15), (31; 23; 32)$

Дуга M -середина AB , тогда KM -высота.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по теореме Пифагора $KM = \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{32}{18} - \frac{9}{18}} = \sqrt{\frac{23}{18}} = \frac{\sqrt{23}}{3\sqrt{2}}$

Погда $S_{AKB} = \frac{1}{2} KM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{23}}{3\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{23}}{6\sqrt{2}}$

$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{AKB} \cdot l$ (так как $\triangle AKB$ — перпендикуляр сечение), где $V_{ABCA_1B_1C_1} = H \cdot S_{ABC}$, где H — высота пирамиды

$$H = \frac{S_{AKB} \cdot l}{S_{ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{23}}{6\sqrt{2}} \cdot 3}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{23} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = 2 \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{6}}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{23}}{\sqrt{6}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a > b & a > b \\ a - b \div 3 \\ (a - c)(b - c) = p^2 \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$$

1) $a - c = 1, b - c = p^2$
 $a = c + 1$
 $b = c + p^2$
 $a > b$
 $c + 1 > c + p^2$
 $1 > p^2$ - кром

$$\underbrace{c + p^2}_a + \underbrace{c^2 + 2c + 1}_{b^2} = 560$$

$$p^2 + c^2 + 3c + 1 = 560$$

$$9 + c + c^2 + 2c + 1 = 560$$

$$c^2 + 3c = 550$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 550 = 2209$$

$$c_1 = -25 \quad c_2 = 22$$

$$a - c > b - c$$

3) $a - c = -1$
 $b - c = -p^2$
 $a = c - 1$
 $b = c - p^2$

$$a = c - 1$$

$$b = c - p^2$$

$$c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 560$$

$$c^2 - 17c = 480$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0 \quad 16 \cdot 3 \cdot 10$$

$$c^2 = 289 + 480 = 2209 = 47^2$$

$$c_1 = \frac{17 - 47}{2} = -\frac{30}{2} = -15$$

$$c_2 = \frac{17 + 47}{2} = \frac{64}{2} = 32$$

2) $a - c = p^2$
 $b - c = 1$
 $a = c + p^2$
 $b = c + 1$
 $a > b \Leftrightarrow c + p^2 > c + 1$
 $p^2 > 1$ - верно

$$c + p^2 + b^2 = 560$$

$$p = 3$$

$$a = 9 + c$$

$$b = c + 1$$

$$a - b = p^2 - 1 \div 3$$

$$p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$p \equiv \pm 1 \pmod{3}$$

4) $a - c = p$
 $b - c = p$
 $a = b$

$$\frac{5 \cdot 11 \cdot 10}{25 \cdot 22} = \frac{-3 -}{2} = 22 \quad 44$$

$$(-16; -24; -25)$$

$$(31; 23; 22)$$

$$(14; 6; 15)$$

$$(31; 23; 32)$$

$$4 \cdot 3 \cdot 10$$

$$\begin{array}{r} 320 \\ + 289 \\ \hline 609 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 480 \\ - 4 \\ \hline 476 \\ + 289 \\ \hline 765 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{t} + \sqrt{4-t} = 2\sqrt{t(4-t)}$$

$$\begin{array}{r} 2\sqrt{2\sqrt{10}} \\ 4\sqrt{4\sqrt{10}} \end{array}$$

$$\sqrt{t} - 2\sqrt{t(4-t)} - \sqrt{4-t} + 5 = 0$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{4-t} = 2\sqrt{t(4-t)} - 5$$

$$t + 2t - 2\sqrt{t(4-t)} = 4t(4-t) - 20\sqrt{t(4-t)} + 25$$

$$18\sqrt{t(4-t)} = 4t(4-t) + 18$$

$$9\sqrt{t(4-t)} = 2t(4-t) + 9$$

$$2k^2 - 9k + 9 = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 18 = 81 - 72 = 9$$

$$k_1 = \frac{9-3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$k_2 = \frac{9+3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{10} - 6}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{10} - 6}{2} = \frac{1 + 2\sqrt{10}}{2}$$

$$x_3 = \frac{4 - \sqrt{13} - 6}{2} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x_4 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$t(4-t) = \frac{9}{4}$$

$$t^2 - 4t + \frac{9}{4} = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot \frac{9}{4} = 16 - 9 = 7$$

$$t_1 = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{2} > 0$$

$$t_2 = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} < \frac{4+4}{2} = 4$$

$$t(4-t) = 9$$

$$t^2 - 4t + 9 = 0$$

$$D = 16 - 36 = -20$$

$$t_1 = \frac{4 - \sqrt{13}}{2}$$

$$t_2 = \frac{4 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \quad \text{— хотим бы 1 решение}$$

$$-1 - 3 - 6 \leq p \leq 1 + 3 + 6 = 10 \quad \cos 3x = \cos(2x+x) = \cos x \cos 2x - \sin 2x \sin x =$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x = \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2\sin^2 x) =$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1 + 2 + 2\cos^2 x) = \cos x (4\cos^2 x - 3)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos x (4 \cos^2 x - 3) + 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 6 \cos x - 3 \cos x - 3 = p$$

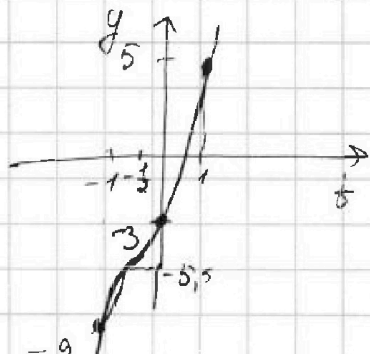
$$4 \cos^3 x + (\cos x + 1)(6 \cos x - 3) = p$$

$$4 \cos^3 x + 3(\cos x + 1)(2 \cos x - 1) = p$$

$$\cos x = t$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$y = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$



$$\cos^2 x - \sin^2 x =$$

$$= \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a > b$$

$$a \neq b$$

$$(a-c)(b-c) = \frac{p^2}{4}$$

$$a + b^2 = 560$$

$$-4 + 1 - 6 + 8 - 3$$

$$f'(x) = 12t^2 + 12t + 3 = 0$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$f'(x) = 3(t+1)^2 \geq 0$$

$$(2t+1)^2 = 0$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$-1 < -\frac{1}{2} < 1$$

$$y = 4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

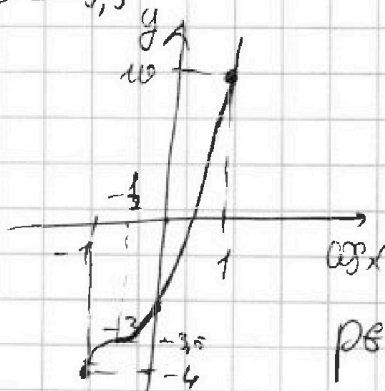
$$-4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -5,5$$

$$-4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$4 + 6 + 8 - 8 =$$

$$-4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3,5$$



$$p \in [-4; 10]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-8} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+8}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-8^2}$$

$$\begin{cases} y+1=6 \\ x+3=9 \\ 8+y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=9-3 \\ y=6-1 \\ 8+y=6 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x-8 \geq 0 \\ y+x-x^2+8 \geq 0 \\ 169-8^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x+y+1 = x+y+4+8 = x+y+12$$

$$x=9-3$$

$$4-x=4-9+3=-2$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x+8 \leq 4 \\ x^2 \leq x+y+8 \\ 8^2 \leq 169 \end{cases}$$

$$\sqrt{9} + \sqrt{-9-6} + 5 =$$

$$4-x-8 = 4-9+3 = -2$$

$$x+3 + 4-x-8 = 2-8$$

$$6-1+9-3-x^2+c+y =$$

$$= a+b+c+8-x^2 =$$

$$= a+b+c+3-a^2+6a-9 =$$

$$= 7a+b+c-a^2-6$$

$$4-x-8 + y+x-x^2+8 =$$

$$= -x^2+y+4$$

$$|b| + 3|b-13| = \sqrt{169-8^2} \leq 13$$

$$1) b \geq 13$$

$$b + 3b - 39 \leq 13$$

$$4b \leq 52$$

$$b \leq 13$$

$$b = 13$$

$$2) 0 \leq b \leq 13$$

$$b + 3b + 39 \leq 13$$

$$-2b \leq -26$$

$$2b \geq 26$$

$$b \geq 13$$

$$3) b < 0$$

$$-b - 3b + 39 \leq 13$$

$$-4b \leq -26$$

$$4b \geq 26$$

$$b \geq \frac{13}{2} - \text{нот}$$

$$b = 13$$

$$y+1 = 13$$

$$y = 12$$

$$8 = 0$$

$$|13| + 3|12-13| = \sqrt{169-8^2}$$

$$13 = \sqrt{169-8^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-8} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2+0}$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \in R \quad b_i \in R \quad x-2$$

$$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \quad b_{13} = 5-x, \quad b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$b_7 = b_9^6, \quad b_{13} = b_9^{12}, \quad b_{15} = b_9^{14}$$

$$b_9^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \quad b_9^{12} = 5-x, \quad b_9^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$b \geq 0 \quad \frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0 \quad 5-x \geq 0 \quad x \leq 5$$

$$\text{или } q \geq 0$$

$$b \geq 0 \quad q \geq 0$$

$$x \geq \frac{35}{13}, \quad x \geq 5 - \text{нельзя}$$

$$b \geq 0 \quad q \geq 0$$

$$b^2 q^{12} = \frac{13x-35}{(x+1)^3} = (5-x)b$$

$$b^2 q^{28} = (13x-35)(x+1)$$

$$b^2 q^{12} \cdot (x+1)^4 = b^2 q^{28}$$

$$(x+1)^4 = q^{16}$$

$$\begin{cases} q^4 = x+1 \\ q^4 = 5-x \end{cases}$$

$$b^2 q^{12} = \frac{13x-35}{(x+1)^3}, \quad b_9^{12} = 5-x, \quad b^2 q^{28} = (13x-35)(x+1)$$

$$b^2 q^{24} = (5-x)^2$$

$$q^4 = \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2}$$

$$1) \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} = (x+1)$$

$$\frac{13x-35-x^2+10x-25}{(5-x)^2} = 0$$

$$\frac{x^2-23x+60}{(5-x)^2} = 0$$

$$b = \frac{13x-35}{(x+1)^3(5-x)}$$

$$b_9^6 = \frac{13x-35}{(x+1)^3(5-x)} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$x \geq \frac{23-14}{2} = 3$$

$$x_2 \geq \frac{23+14}{2} = 20$$

$$x \geq 5 - \text{нельзя}$$

$$x = 529 - 240 = 289$$

$$b = \frac{13x-35}{(x+1)^3(5-x)}$$

$$b_9^6 = \frac{13x-35}{(x+1)^3(5-x)} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b^2 q^{12} = \frac{13x-35}{(x+1)^3}, \quad b_9^{12} = 5-x, \quad b^2 q^{28} = (13x-35)(x+1)$$

$$b^2 q^{24} = (5-x)^2$$

$$q^4 = \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2}$$

$$1) \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} = (x+1)$$

$$\frac{13x-35-x^2+10x-25}{(5-x)^2} = 0$$

$$\frac{13x-35}{(5-x)^2} = 0$$

$$\frac{x^2-23x+60}{(5-x)^2} = 0$$

$$x = 529 - 240 = 289$$

$$x \geq \frac{23-14}{2} = 3$$

$$x_2 \geq \frac{23+14}{2} = 20$$

$$x \geq 5 - \text{нельзя}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} = -x-1 \quad /: (x+1) \neq 0$$

$$\frac{13x-35}{(5-x)^2} = -1$$

$$\frac{13x-35+x^2+10x+25}{(5-x)^2} = 0$$

$$\frac{x^2+3x-10}{(5-x)^2} = 0$$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 2 \text{ --- } \text{корень}$$

Проверка: 1) $x=8$

$$q^6 = 8$$

$$q^2 = 2 \quad q = \sqrt{2}$$

$$q^6 = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$$

$$bq^6 = \sqrt{\frac{39-35}{4^3}} = \sqrt{\frac{4}{4^3}} = \sqrt{\frac{1}{4^2}} = \frac{1}{4}$$

$$bq^{12} = 2$$

$$bq^{14} = \sqrt{(39-35)(3+1)} = \sqrt{4 \cdot 4} = 4$$

$$b = \frac{1}{4 \cdot 8} = \frac{1}{32}$$

$$\frac{1}{32} \cdot 8 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{32} \cdot 64 = 2$$

$$\frac{1}{32} \cdot 128 = 2^3 = 4$$

$$2) \underline{x=20} \quad bq^6 = \sqrt{\frac{260-35}{21^3}} = \sqrt{\frac{225}{21^3}} = \frac{15}{\sqrt{21^3}}$$

$$bq^{12} = \sqrt{5-0}$$

$$3) \underline{x=5} \quad bq^6 = \sqrt{\frac{-65-35}{-4^3}} = \sqrt{\frac{-100}{-4^3}} = \sqrt{\frac{100}{4^3}} = \frac{10}{2^3} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$bq^{12} = 10$$

$$bq^{14} = \sqrt{(-65-35)(-4)} = \sqrt{100 \cdot 4} = 10 \cdot 2 = 20$$

$$q^2 = 2 \quad \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

$$b = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$$

$$\frac{5}{32} \cdot 8 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{32} \cdot 64 = 10$$

$$\frac{5}{32} \cdot 128 = 5 \cdot 4 = 20$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$x^2 - x - 12 \leq 0$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -3$$

$$\sqrt{(x+3)} - \sqrt{(4-x)} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 4 \\ -x^2 + x + 12 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} + \quad / \quad / \quad / \quad + \\ -3 \quad \quad \quad 4 \end{array} \rightarrow x$$

$$\begin{aligned} x+3 &\geq 0 & \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \\ x &\geq -3 \\ 4-x &\geq 4 - x + 3 \geq x - x \end{aligned}$$

$$\sqrt{x+3} = t$$

$$\begin{aligned} x+3 &= t^2 \\ x &= t^2 - 3 \end{aligned}$$

$$4-x = 4 - t^2 + 3 = 7 - t^2$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t^2} + 5 = 2\sqrt{t(7-t^2)}$$

$$\sqrt{t} + 5 = \sqrt{7-t^2} + 2\sqrt{t(7-t^2)}$$

$$a-b+5 \leq a^2+b^2$$

$$t + 10\sqrt{t} + 25 = 7-t^2 + 4t(7-t^2) + 4\sqrt{7-t^2} \cdot \sqrt{t(7-t^2)}$$

$$t + 10\sqrt{t} + 25 = 7-t^2 + 28t - 4t^3 + 4(7-t^2) \cdot \sqrt{t}$$

$$\sqrt{t} + 5 = \sqrt{7-t^2} + 2\sqrt{t(7-t^2)}$$

$$-t^2 + 7t$$

$$\sqrt{t} + 5 - \sqrt{7-t^2} = 2\sqrt{t(7-t^2)} - 5$$

$$t + 7 - t - 2\sqrt{t(7-t^2)} = 4$$

$$2\sqrt{t(7-t^2)} = (\sqrt{t} + \sqrt{7-t^2})^2 - t - (7-t^2) = (\sqrt{t} + \sqrt{7-t^2})^2 - 7$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t^2} + 5 = (\sqrt{t} + \sqrt{7-t^2})^2 - 7$$

$$2\sqrt{7-t^2} = 12$$

$$\sqrt{7-t^2} = 6$$

$$7-t^2 = 36$$

$$t = 7 - 36 = -29$$

$$1 + 2\sqrt{10} \sqrt{7-t^2}$$

$$2\sqrt{10} \sqrt{7-t^2}$$

$$1 + 2\sqrt{10}$$

$$1 + \sqrt{10} \sqrt{7-t^2}$$

$$2\sqrt{10}$$



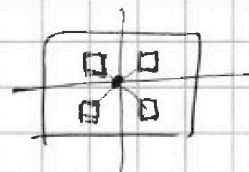
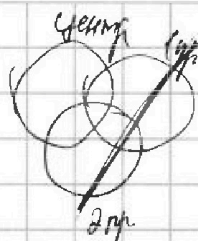
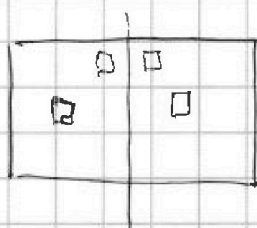
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

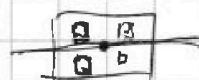
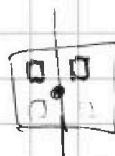
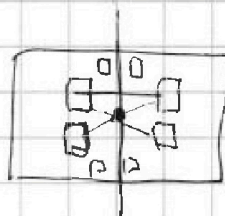
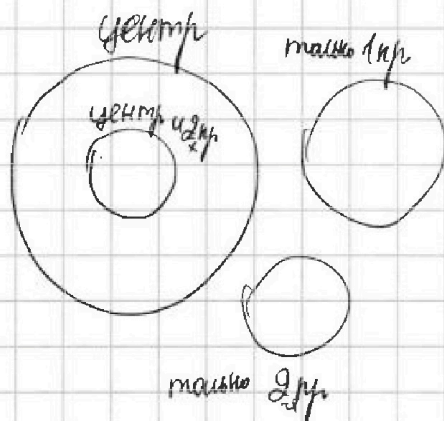
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$25.000 \cdot 50.000 \cdot (50.000 - 2) \cdot (50.000 - 4) \cdot (50.000 - 6) =$$

$$= 8 \cdot 25.000 \cdot 24.998 \cdot 24.996 \cdot 24.994$$

$$50.000 \cdot (50.000 - 4) = 4 \cdot 25.000 \cdot 24.998$$



$$8 \cdot 25.000 \cdot 24.998 \cdot 24.996 \cdot 24.994 +$$

$$16 \cdot 25.000 \cdot 24.998 \cdot 24.996 \cdot 24.994 =$$

$$= 25.000 \cdot 24 \cdot$$

$$C_{50000}^2 \cdot C_{24998}^1 \cdot C_{24996}^1 \cdot C_{24994}^1 +$$

$$+ 2 \cdot C_{50000}^1 \cdot C_{24996}^1 \cdot C_{24992}^1 \cdot C_{24988}^1$$

$$50.000 \cdot (50.000 - 4) \cdot (50.000 - 8) \cdot$$

$$\cdot (50.000 - 12) =$$

$$= 8 \cdot 25.000 \cdot 24.998 \cdot$$

$$\cdot 24.996 \cdot 24.994$$

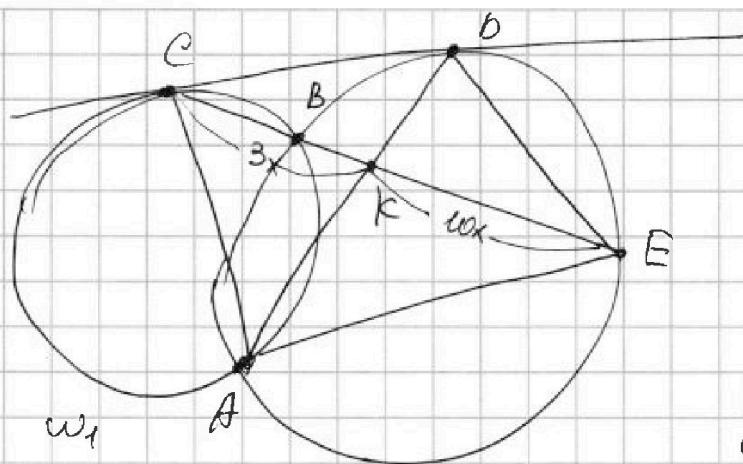


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



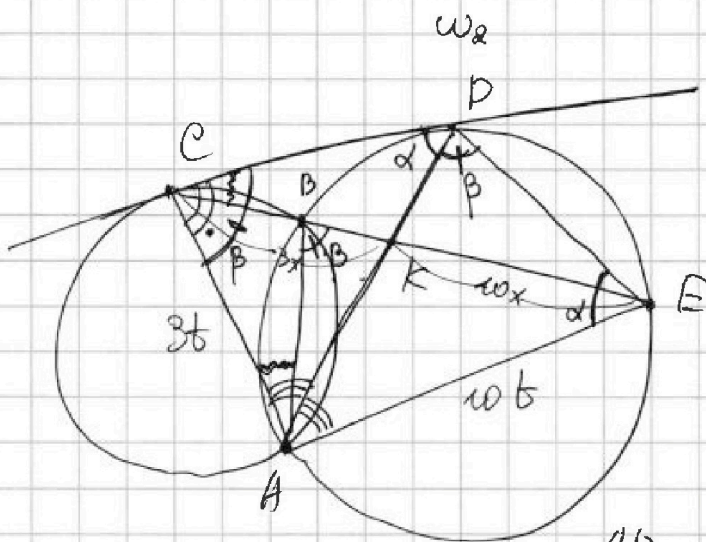
$$240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$$

$$120 \cdot 3 = 360$$

$$1 + \frac{3}{2} - \frac{6}{2} =$$

$$= 1 - \frac{3}{2} = 1 - 1,5 = -0,5$$

$$\frac{ED}{CB} = ?$$



$$\frac{3x}{\sin \alpha} = \frac{CD}{\sin \lambda}$$

$$\frac{wx}{\sin \beta} = \frac{DE}{\sin \lambda}$$

$$CD \cdot \frac{DE}{CD} = \frac{3x}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{wx}$$

$$= \frac{3}{w} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{AD}{AC}$$

$$\frac{AD}{3t} = \frac{AD}{AD} = \frac{DE}{CD}$$

$$3t^2 = AD^2$$

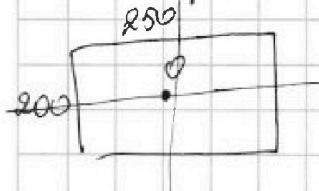
$$AD = \sqrt{30}t$$

$$\frac{DE}{CD} = \frac{\sqrt{30}t}{3t} = \frac{\sqrt{30}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$$

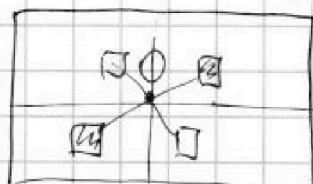
$$\text{Всего клеток } 250 \cdot 200 = 50.000$$

$$50.000 \cdot (50.000 - 2) \cdot (50.000 - 4) \cdot (50.000 - 6) = 8 \cdot 25.000 \cdot 24.998 \cdot 24.994$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot AC}{\sin(\alpha + \beta) \cdot AE} = \frac{3}{w}$$



Всего клеток





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите **номер страницы** и **суммарное количество страниц** в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

